数学的に美しい？
バラ曲線とフィボナッチ

デザイン用定規スピログラフを中心に

富安亮子

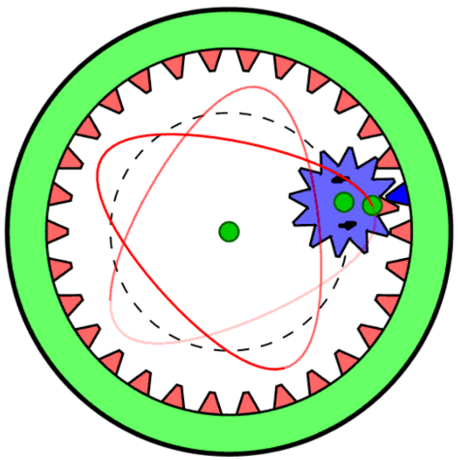
九州大学
マス・フォア・インダストリ研究所

Contents

スピログラフは、スマートフォンのアプリもあります

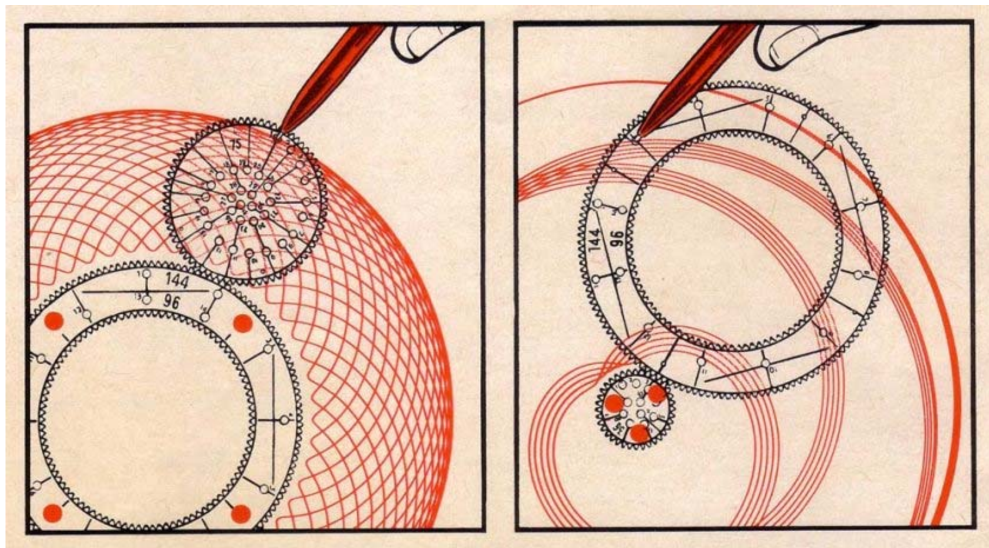
内トロコイドと外トロコイド

- 固定した歯車Aの中を、歯車Bを回転させたとき得られる曲線は、まとめて「内トロコイド(hypotrochoid)」と呼ばれる。

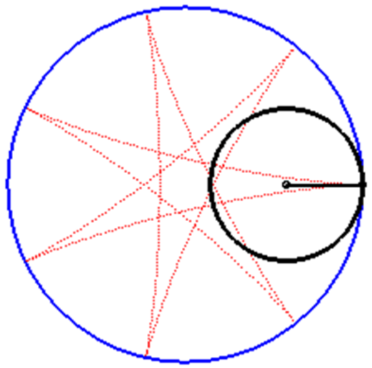


- 固定した歯車Aの外を、歯車Bが回転する場合、「外トロコイド(epitrochoid)」と呼ばれる。

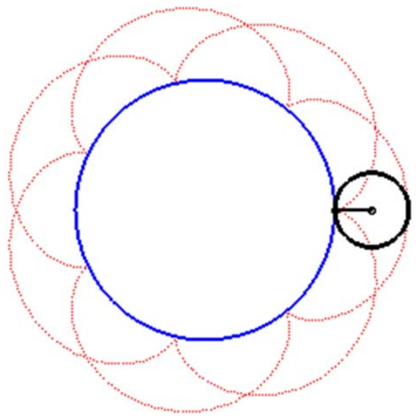
- つまり、円のスピログラフで描けるスピログラフ曲線は、内トロコイドか外トロコイド。



下図のように、回転する歯車の縁にペンを置いたときの、内トロコイド・外トロコイド曲線は、内サイクロイド・外サイクロイドと呼ばれる。



内サイクロイド

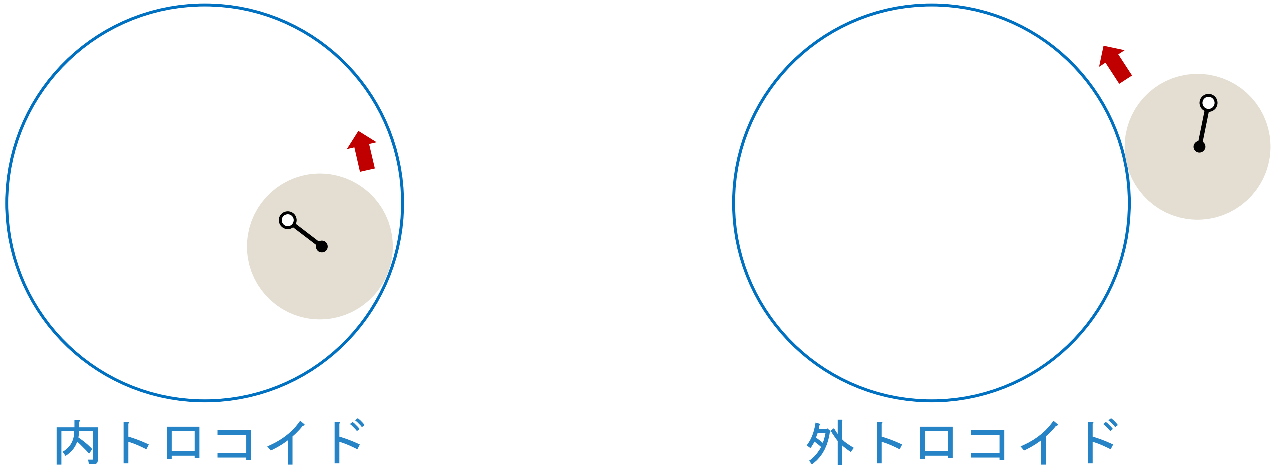


外サイクロイド

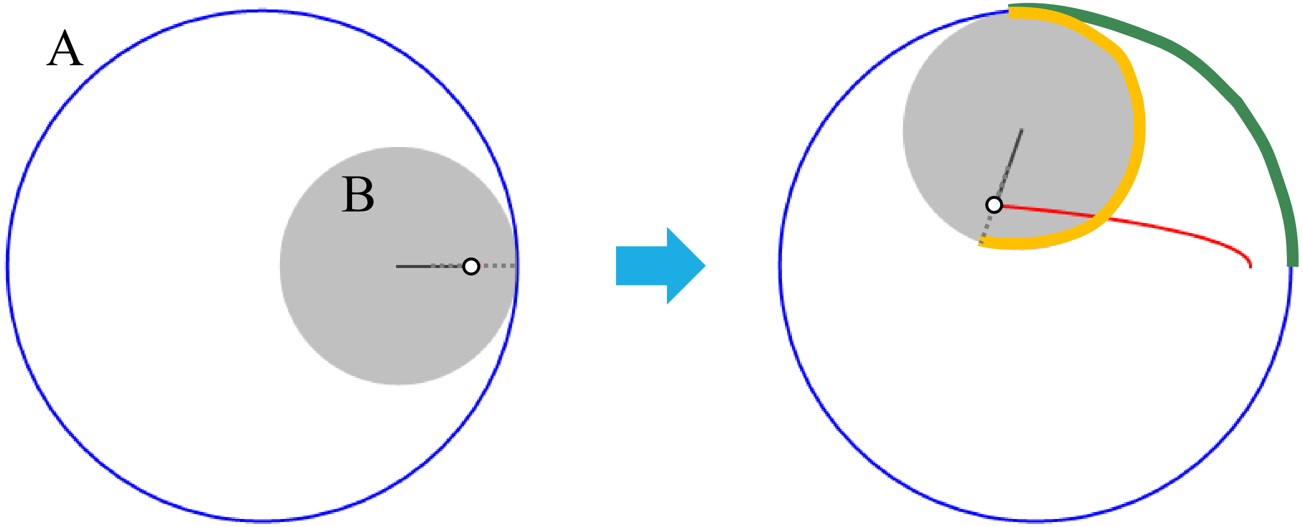
トロコイド = trochos (タイヤ) + oid (のようなもの)。

サイクロイド= cycle (円) + oid (のようなもの)。

- 以下では、簡単のため、歯車を円で表すことにする。

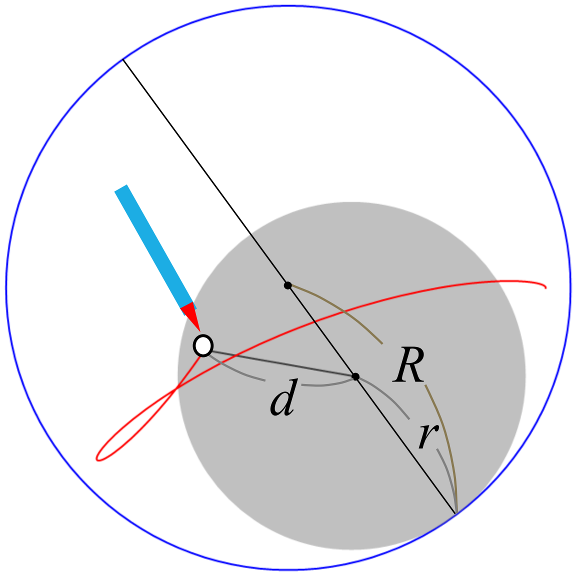


- 円Aに接して、円Bは「滑ることなく」回転する（歯車はこのためにある）。
例えば以下のように円Bが転がったとき、緑・オレンジの線の長さは等しい。



予測可能？

- 少し試してみると、スピログラフでどんな結果が出るか予測するのは、かなり難しい。



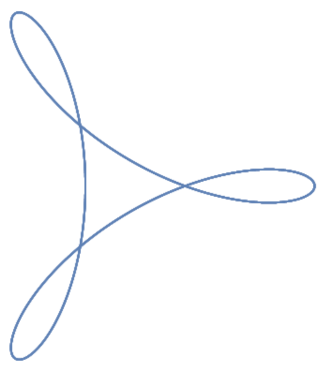
以下の3つの数字でパラメータづけできる。

R: 固定する円の半径

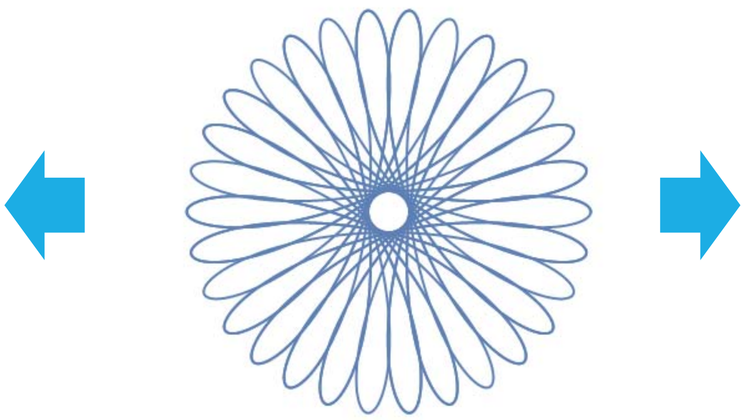
r: 回転する円の半径

d: 回転する円の中心からペンを入れる穴までの距離

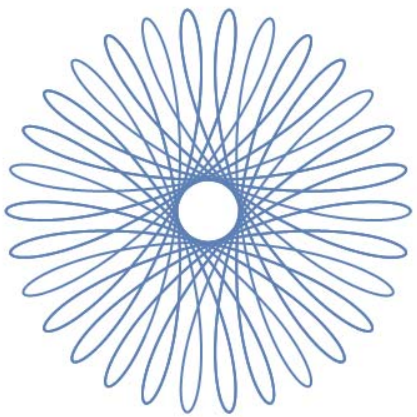
- $r/R=2/3,\ d/R=9/20$



- $r/R=19/30,\ d/R=9/20$



- $r/R=19/30,\ d/R=1/2$



スピログラフの歴史

- 1965年にD. Fischerがデザイン定規として開発し、
  おもちゃとして売り出したところ、日本も含め、
  ベストセラーに。

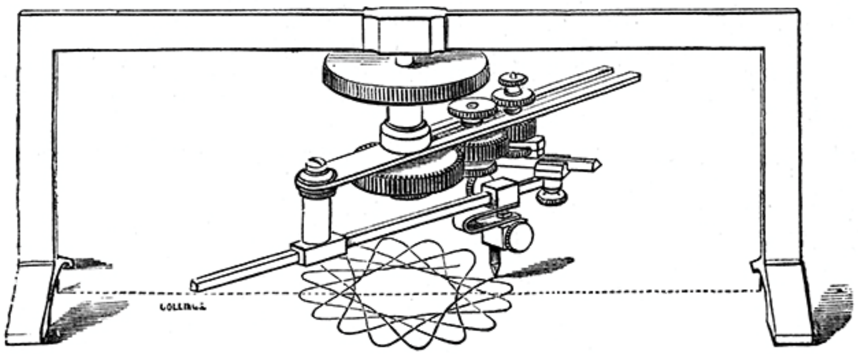
- ただし、スピログラフの原型は、ポーランド出身でフランスに移り住んだ
  B. Abakanowicz が1880年代に発明したとされる。

Bruno Abakanowicz

スピログラフの変遷

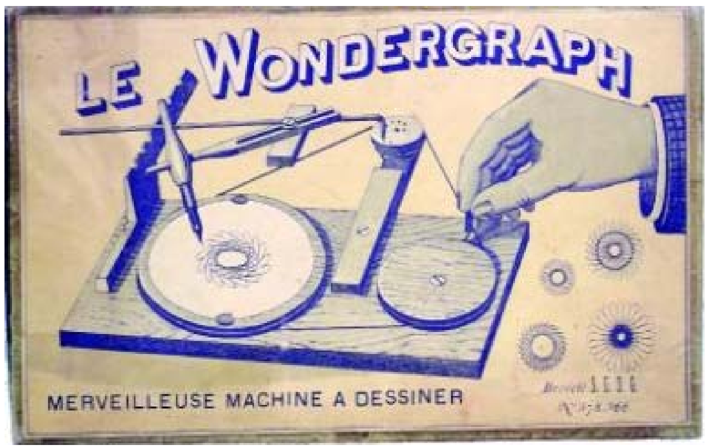
以下は、アバカノヴィッチのアイデアを具体化して作られたと考えられるもの。

- スタンリーのgeometrical pen.
  実物（金属製）は、ロンドンのサイエンス・ミュージアムにある。



Improved Geometrical Pen.

- 1908年にWonderGraphという子ども向けのおもちゃも売り出されている。



スピログラフ発明に関わるミステリー

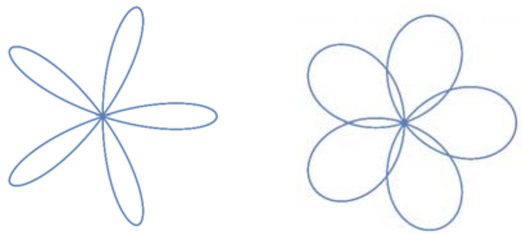
- 数学者で発明家でもあったアバカノヴィッチも、
  1881年にスピログラフで特許を取得している。

  数学の理論で特許を取ることは特許法で認められてないが、
  具体的に製品化する方法については、特許が認められる。

- 英語版Wikipediaの記事によると、アバカノヴィッチの発明は
  様々な曲線で囲まれた図形の面積を求める数学的装置、として、だった。

原典: “L‘Europe mathématique: histoires,mythes, identités”, 13章 (ポーランドにおける数学的生活)

面積？



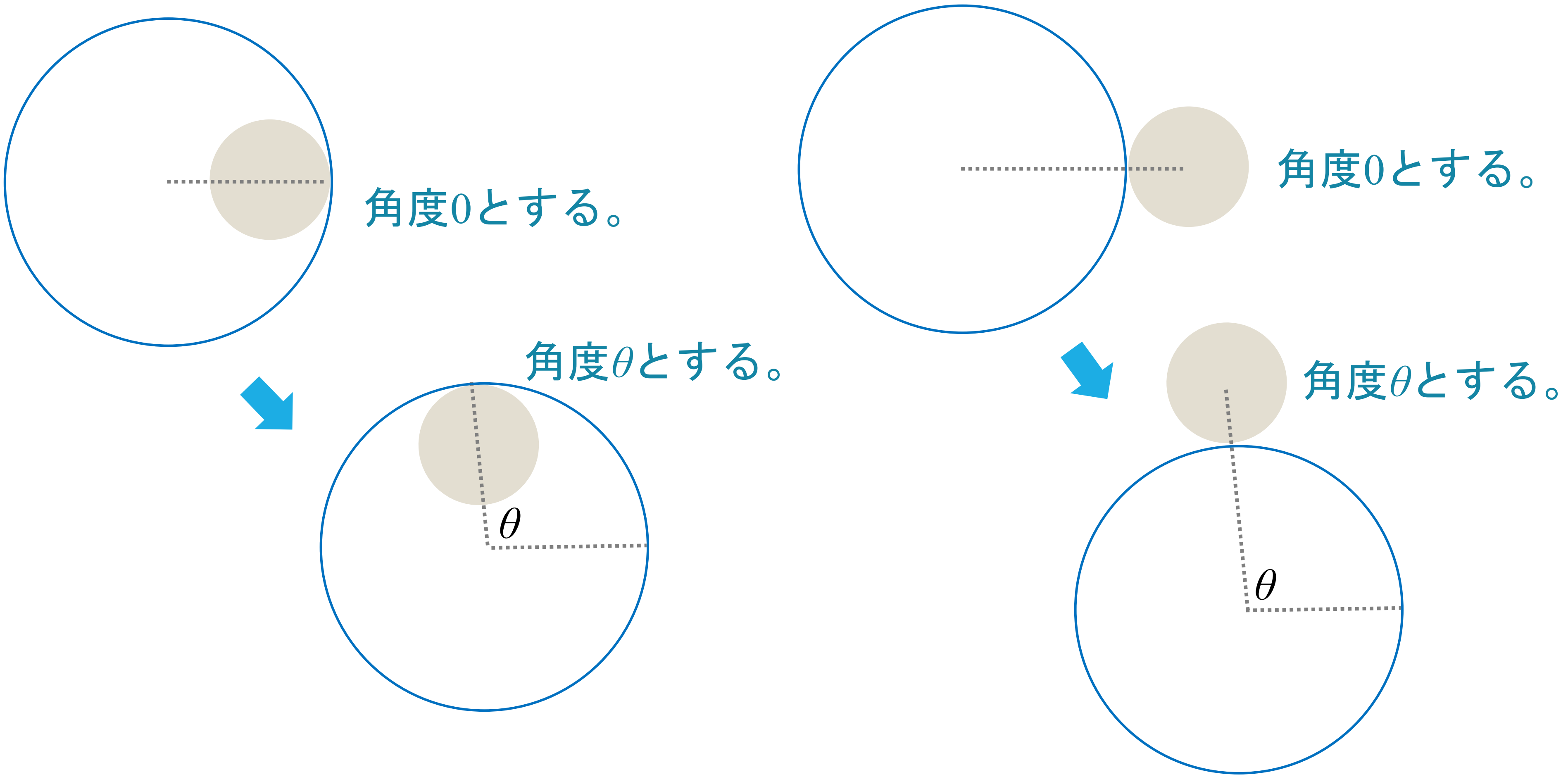
- これから紹介するように、スピログラフ曲線の長さは、楕円の弧長の計測に
  帰着できる。

すると「面積」は「長さ」の誤り？と考えたくなるが、そういうわけでもない。

スピログラフ曲線の長さを測る

円Bは円Aに沿って「公転」するだけでなく「自転」もしている。

そこで、まず、公転角・自転角を測るための基準を決めておく。

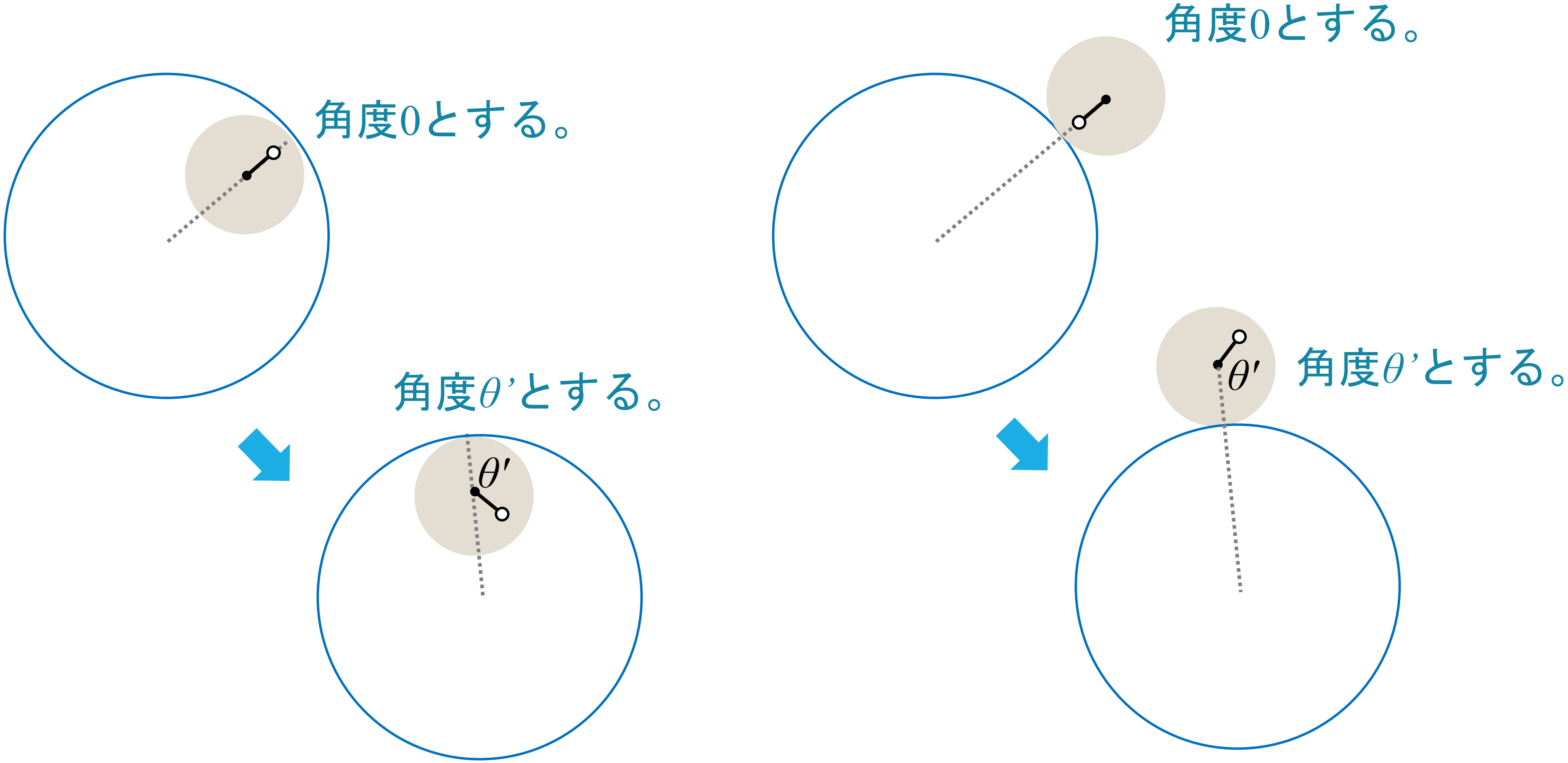


公転角は、円A, Bの中心を結ぶ直線と、横軸のなす角度とする:

自転角を定める

自転角θ’は、ペンを入れる穴が最も固定円の縁に近づいたときを0として、

それを基準に取る。



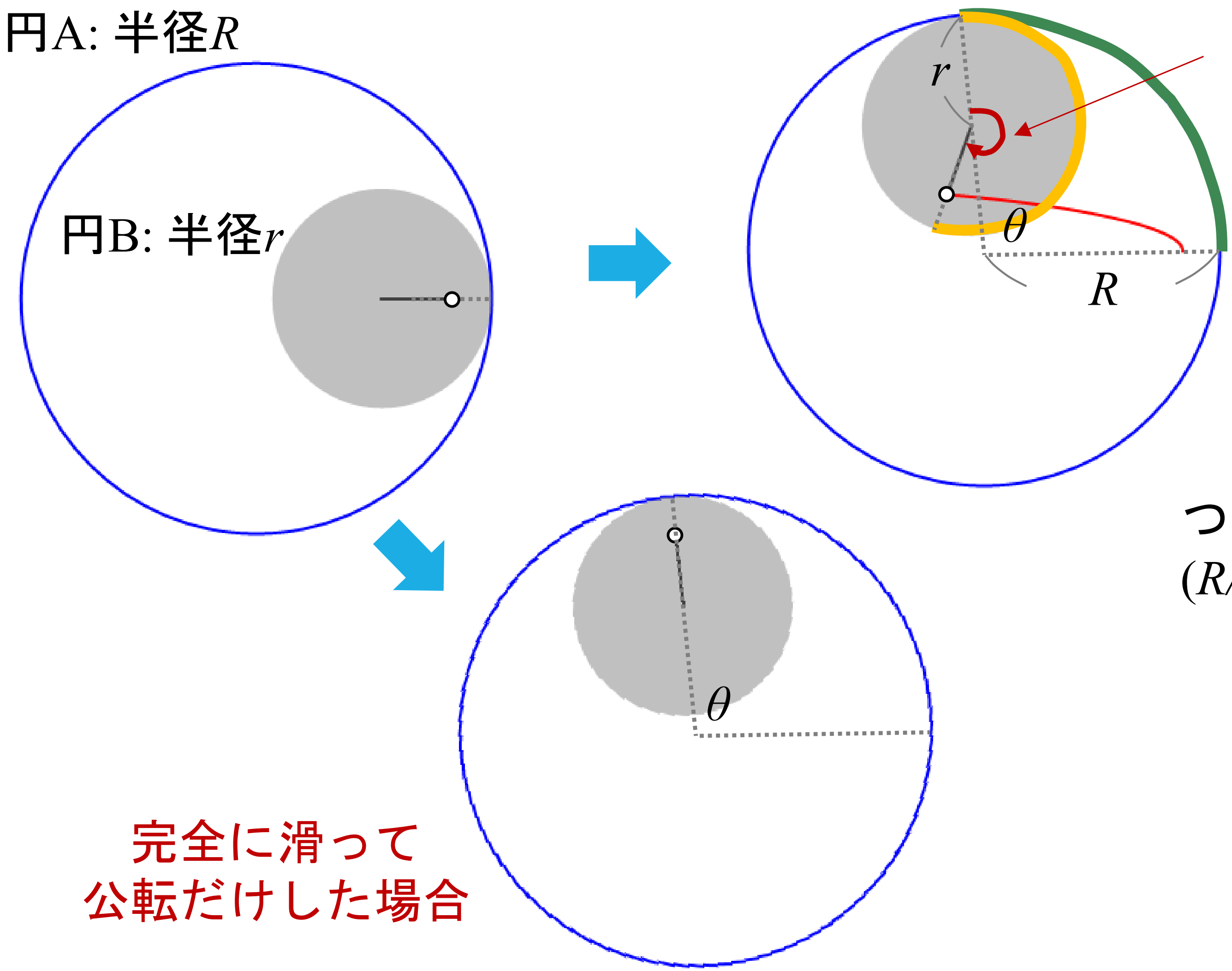
回転円と固定円との中心を結ぶ線を基準にして、
それとなす角度。

自転角と公転角の関係

回転円が角度θだけ公転したとき、何度自転したか？という問題を考える。

内トロコイドの場合

角度θだけ公転した状態



公転と反対周りに
この角度θ'だけ自転した場合

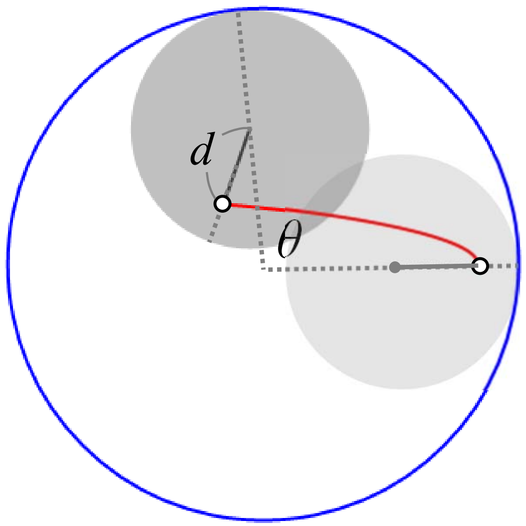
緑・オレンジの線の
長さが等しいので、

$$r\,\theta' = R\,\theta.$$

つまり円Bは公転とは逆向きに
$(R/r)\theta$だけ自転した。

スピログラフ曲線の長さの求め方

内トロコイドの長さについては、以下のようなことが知られている。



固定円: 半径R

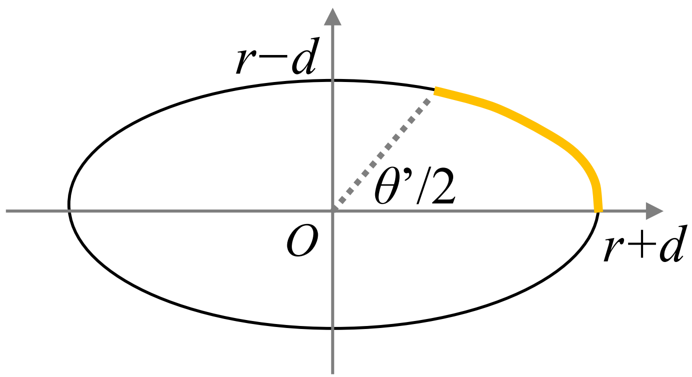
回転円: 半径r

回転円の中心から
ペン先までの距離: d

① 公転した角度をθとする。

② 先ほどの式から、自転角θ'は
以下に等しい。

$$\theta' = (R/r)\,\theta.$$



③ θだけ回転する間に、ペンがひいた曲線の長さは

左図の楕円の弧長

（オレンジの曲線の長さ）×$(R/r-1)$に等しい。

外トロコイドでは、$R/r-1$を$R/r+1$に

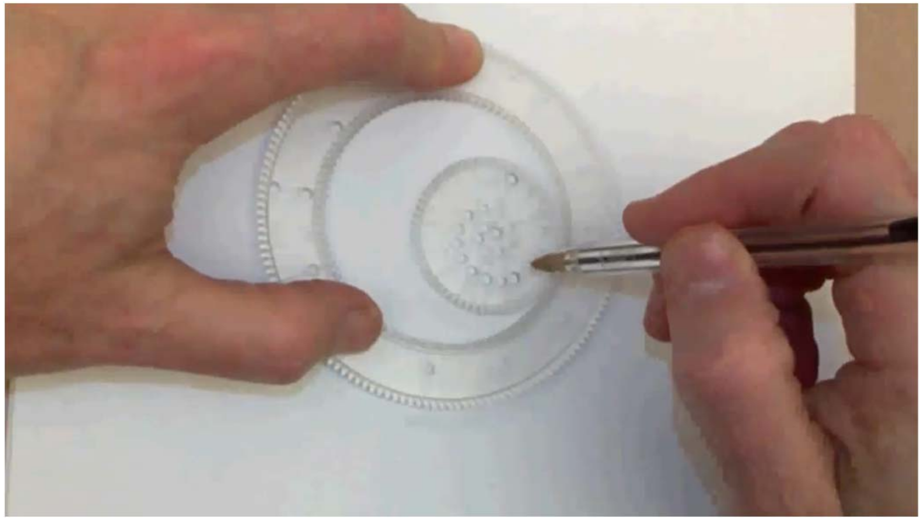
置き換えた式が成立する。

楕円の弧長を求めることに帰着された!

カスプ(尖点): ペンがゆっくり進む場所

楕円の話からスピログラフ曲線の

特徴を分類する方法が一つ得られる。



公転の速さと自転の速さは比例する。

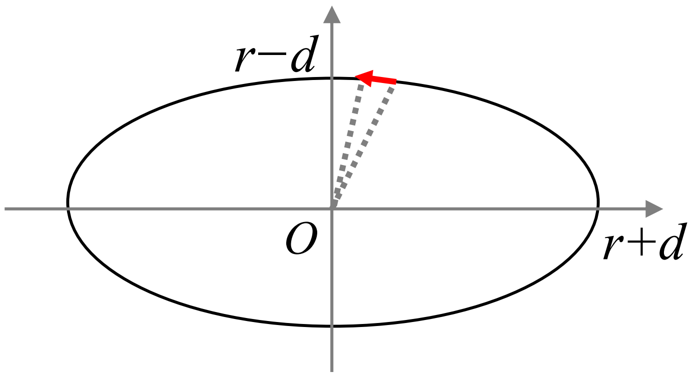
$$r\,\theta' = R\,\theta.$$

しかし、ペンが進む速さは、

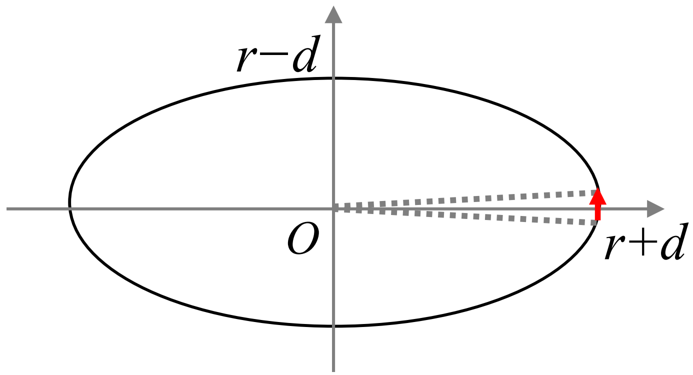
円が回転する速さに比例しない。

楕円の形から分かるように、同じ角度だけ回っても、

ペンが速く進む場所と、ゆっくり進む場所がある。

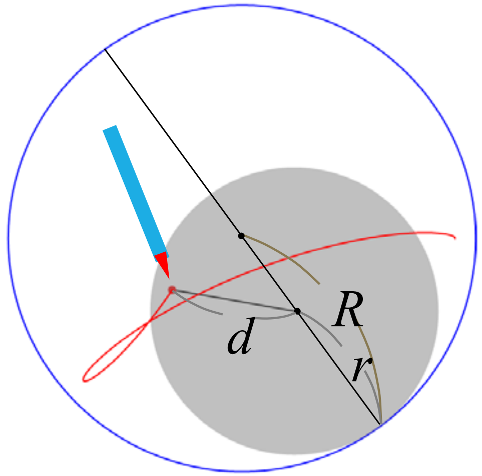


さくさく進む



ちょっとしか進まない

外トロコイドのカスプ

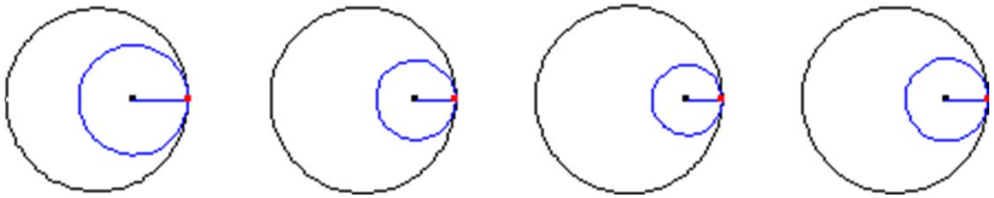


ペン先が回転円の縁にある場合(つまり$r = d$) の曲線をサイクロイドと呼んだ。

rとdの値の差が小さいほどカスプが尖りやすいため、サイクロイドが一番尖っていることになる。

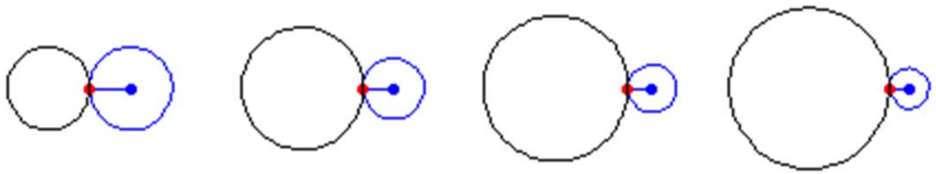
- 内サイクロイド

R=(5/3)r　R=(7/3)r　R=(8/3)r　R=(9/4)r



- 外サイクロイド

R=r　R=2r　R=3r　R=4r



カスプと自転の同期現象

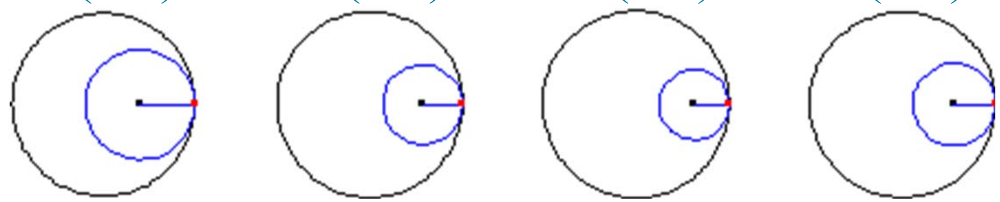
カスプ（尖点, ペンが一番ゆっくり進むところ）は、

ペン先が固定円の縁に最も近づく方向に、回転円が向いているとき起きる。

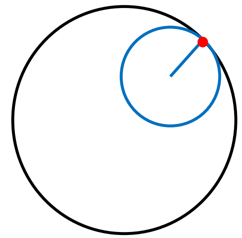
トロコイドも同じ。

- 内サイクロイド

$R=(5/3)r$　$R=(7/3)r$　$R=(8/3)r$　$R=(9/4)r$

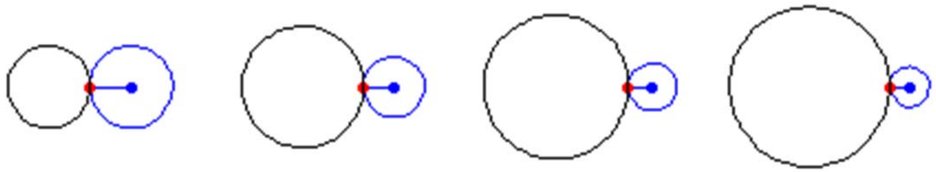


内サイクロイドではこの向き

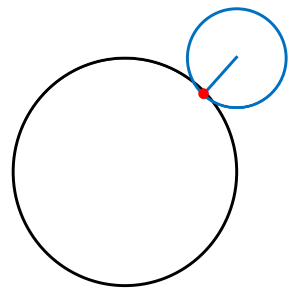


- 外サイクロイド

$R=r$　$R=2r$　$R=3r$　$R=4r$



外サイクロイドではこの向き



特に、カスプから次のカスプに行くとき、自転角がちょうど一回転する。

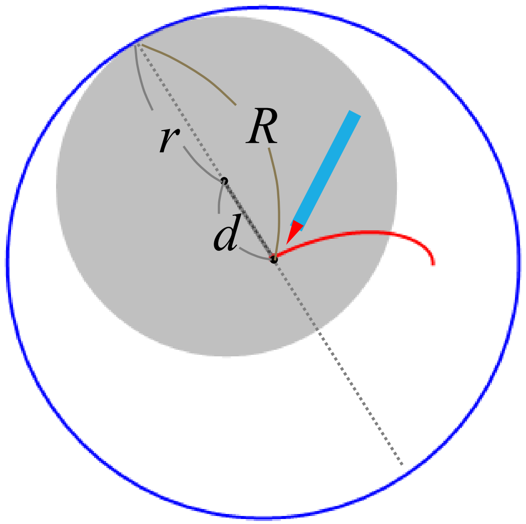
バラ曲線

例) バラ曲線: 以下の状況が生じるとき、バラ曲線と呼ぶ。

円Bを回転させたとき、ペン先が円Aの中心を通る。

つまり下図の状況:

円A: 半径R
円B: 半径r



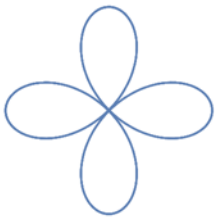
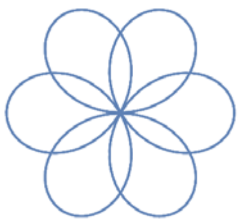
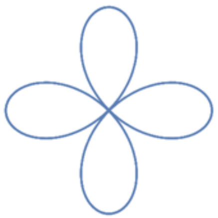
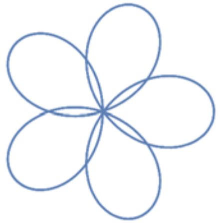
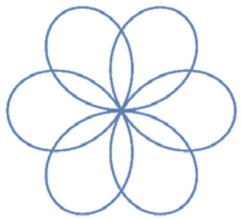
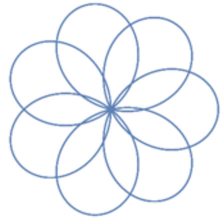
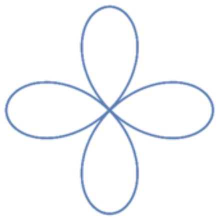
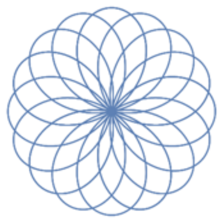
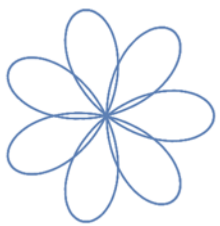
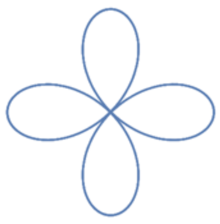
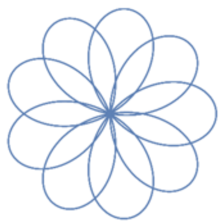
- $r \leq R$より

$$r + d = R$$

特に、$r \approx d$ のとき　$r/R \approx 1/2$

バラ曲線はトゲを持たない

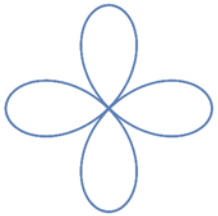
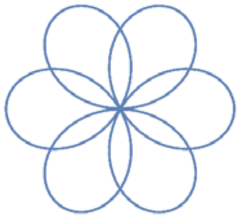
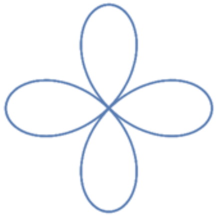
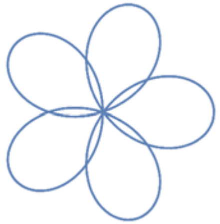
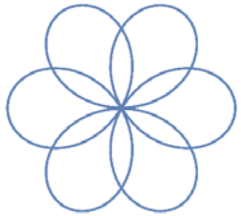
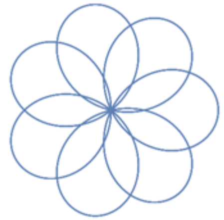
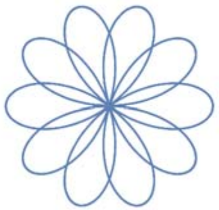
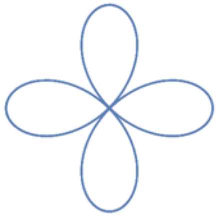
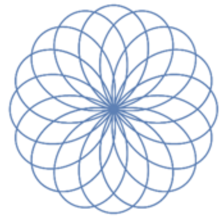
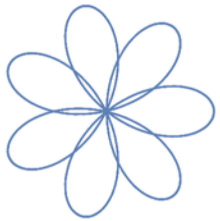
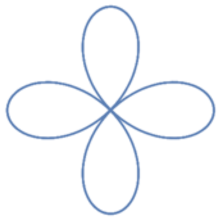
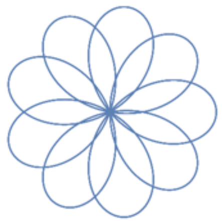
$1/2 \le r/R \le 1$が成立するよう(m, n)を変化させて $\dfrac{r}{R} = \dfrac{m+n}{2n}$ のバラ曲線を描いた。
半径の比r/Rが1/2に近づくと、花びらの先端(=カスプ)は細くなる。

	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5
n=m+1	 n/m=2, r/R=3/4	 n/m=3/2, r/R=5/6	 n/m=4/3, r/R=7/8	 n/m=5/4, r/R=9/10	 n/m=6/5, r/R=11/12
n=m+2	 n/m=3, r/R=2/3	 n/m=2, r/R=3/4	 n/m=5/3, r/R=4/5	 n/m=3/2, r/R=5/6	 n/m=7/5, r/R=6/7
n=m+3	 n/m=4, r/R=5/8	 n/m=5/2, r/R=7/10	 n/m=2, r/R=3/4	 n/m=7/4, r/R=11/14	 n/m=8/5, r/R=13/16
n=m+4	 n/m=5, r/R=3/5	 n/m=3, r/R=2/3	 n/m=7/3, r/R=5/7	 n/m=2, r/R=3/4	 n/m=9/5, r/R=7/9

花びら(=カスプ)の数の法則

$$\frac{r}{R}=\frac{m+n}{2n}$$

花びら（葉）の枚数は、r/Rを既約分数で表したときの分母に等しい

	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$
$n=m+1$	 $n/m=2,\ r/R=3/4$	 $n/m=3/2,\ r/R=5/6$	 $n/m=4/3,\ r/R=7/8$	 $n/m=5/4,\ r/R=9/10$	 $n/m=6/5,\ r/R=11/12$
$n=m+2$	 $n/m=3,\ r/R=2/3$	 $n/m=2,\ r/R=3/4$	 $n/m=5/3,\ r/R=4/5$	 $n/m=3/2,\ r/R=5/6$	 $n/m=7/5,\ r/R=6/7$
$n=m+3$	 $n/m=4,\ r/R=5/8$	 $n/m=5/2,\ r/R=7/10$	 $n/m=2,\ r/R=3/4$	 $n/m=7/4,\ r/R=11/14$	 $n/m=8/5,\ r/R=13/16$
$n=m+4$	 $n/m=5,\ r/R=3/5$	 $n/m=3,\ r/R=2/3$	 $n/m=7/3,\ r/R=5/7$	 $n/m=2,\ r/R=3/4$	 $n/m=9/5,\ r/R=7/9$

バラ曲線がバラに見えないわけ

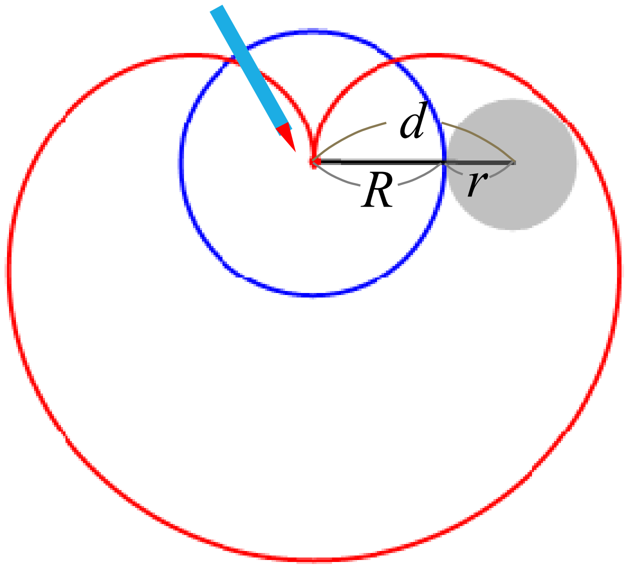
実は、外トロコイドでも以下は可能で、この場合もバラ曲線と呼ばれる:

円Bを回転させたとき、ペン先が円Aの中心を通る。

ただし、回転する円Bの外にペンを固定するため、特製スピログラフが必要。

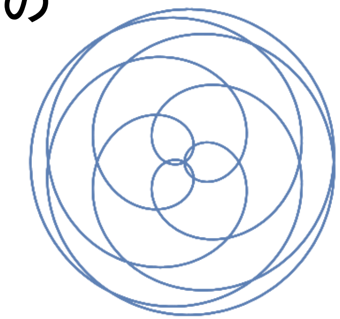
円A: 半径R

円B: 半径r

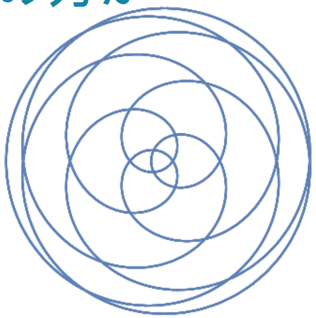


- $r/R = 3/5$, $d/R = 8/5$とした場合の

  外トロコイド バラ曲線:

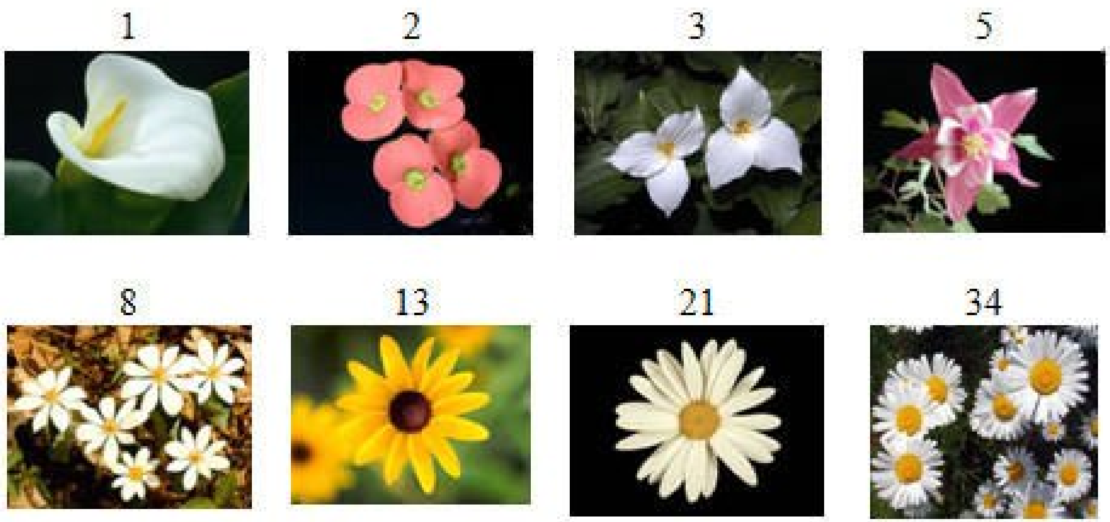


$d/R = 3$ぐらいの方が
バラっぽい？



植物のミステリー

現実の植物の花びら（葉）の枚数は、なぜかフィボナッチ数になるものが多い…



https://pixelstrobist.com/fibonacci-numbers-and-nature/

3葉のクローバーより
4葉のクローバが珍しいのも
同じ理由とされる。

- フィボナッチ数の作り方

$$0 + 1 = 1$$
$$1 + 1 = 2$$
$$1 + 2 = 3$$
$$2 + 3 = 5$$
$$3 + 5 = 8$$

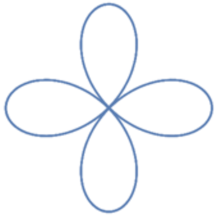
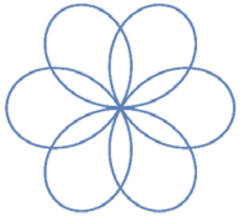
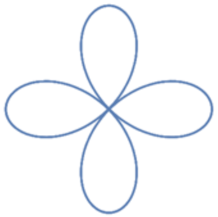
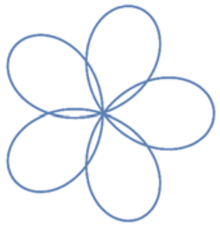
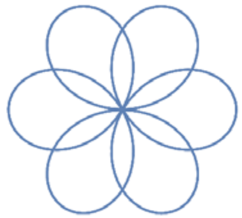
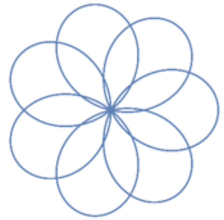
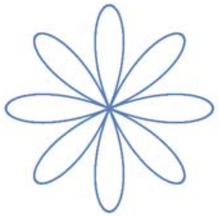
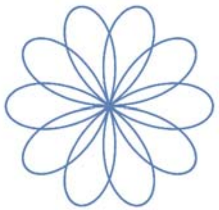
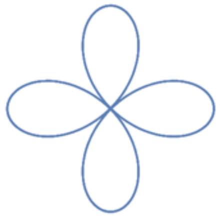
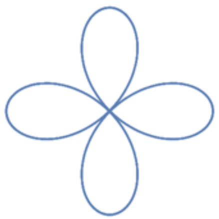
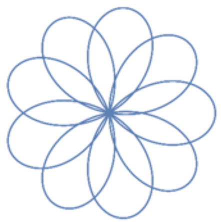
$$5 + 8 = 13$$
$$8 + 13 = 21$$
$$13 + 21 = 34$$

0　1　1　2　3　5　8　13　21　34　…

各数字は1つ前の数字と2つ前の数字の和

フィボナッチ バラ曲線

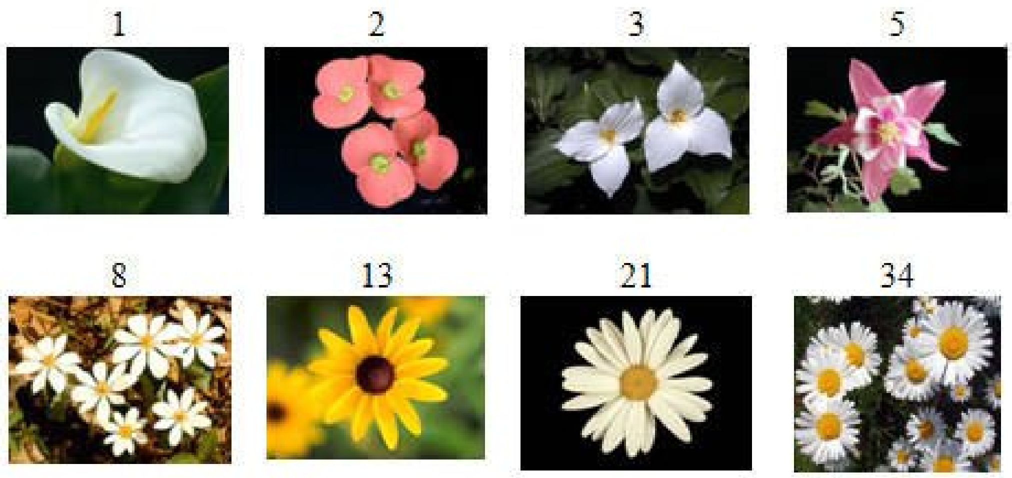
花びら（葉）の枚数がフィボナッチ数になっていたのは以下:

	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5
n=m+1	 n/m=2, r/R=3/4	 n/m=3/2, r/R=5/6	 n/m=4/3, r/R=7/8	 n/m=5/4, r/R=9/10	 n/m=6/5, r/R=11/12
n=m+2	 n/m=3, r/R=2/3	 n/m=2, r/R=3/4	 n/m=5/3, r/R=4/5	 n/m=3/2, r/R=5/6	 n/m=7/5, r/R=6/7
n=m+3	 n/m=4, r/R=5/8	 n/m=5/2, r/R=7/10	 n/m=2, r/R=3/4	 n/m=7/4, r/R=11/14	 n/m=8/5, r/R=13/16
n=m+4	 n/m=5, r/R=3/5	 n/m=3, r/R=2/3	 n/m=7/3, r/R=5/7	 n/m=2, r/R=3/4	 n/m=9/5, r/R=7/9

実際の花を描く

植物の花びらの枚数がフィボナッチ数になる理由を探るために、

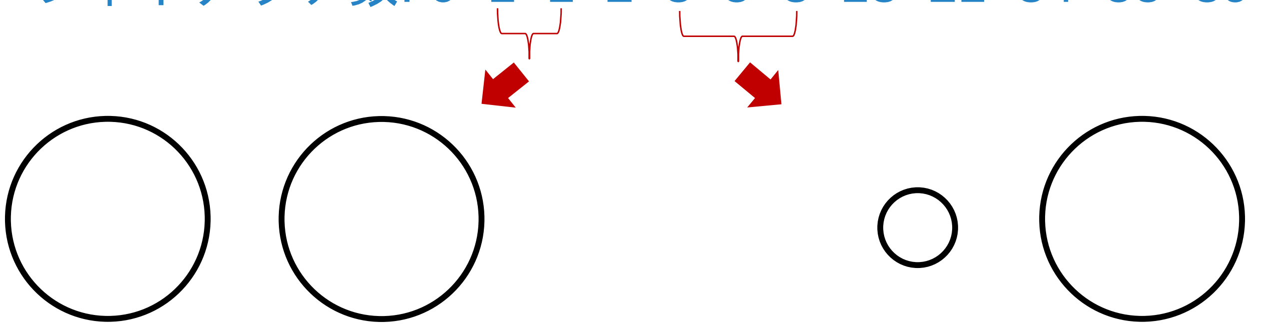
スピログラフで、現実に存在する花を表現することを考える。



ただし、用いる歯車の半径の比r/Rは、隣接する（または二つ隣の）

フィボナッチ数の比になるように取る。

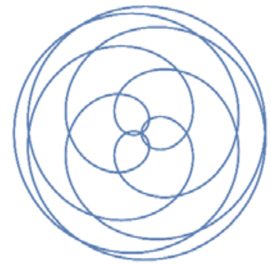
フィボナッチ数: 0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89



1:1

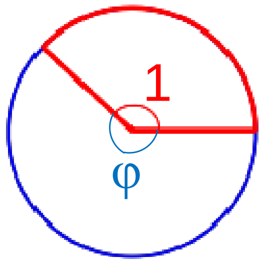
3:8

3:5



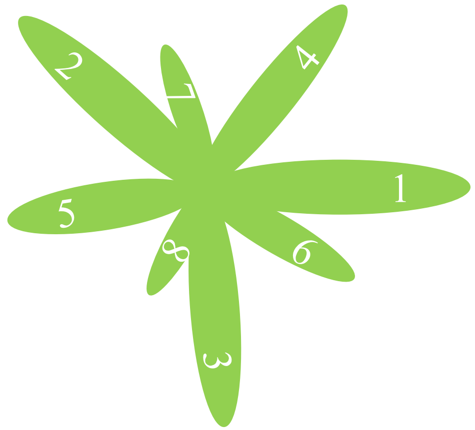
半径の比をフィボナッチ数の比にした理由

１つ隣か２つ隣のフィボナッチ数に固定する理由を説明する。



360° を1:φの比になるよう分割する。 $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$: 黄金数

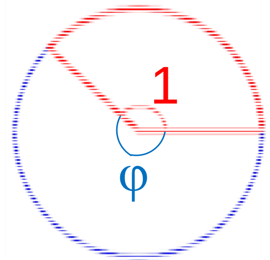
得られる小さい方の角度$360^\circ \times (1+\varphi)^{-1} \approx 137.5^\circ$を黄金角と呼ぶ。



多くの植物が、n枚目の葉を出した後、黄金角だけ回転した向きに次の葉を出すことが知られている。これによって葉が重ならず、多くの太陽の光に当たることができると言われている。

- スピログラフの場合、半径の比＝歯車の数の比（整数 : 整数）なので、黄金角のような無理数は表しづらいが、フィボナッチ数を使った近似でこの問題は回避できる。

次の花びらの出る角度



スピログラフ曲線では、カスプから次のカスプまで、

r/R回転（公転）する。r/Rを以下のように変化させると黄金角に高速収束する。

- 隣接するフィボナッチ数の比

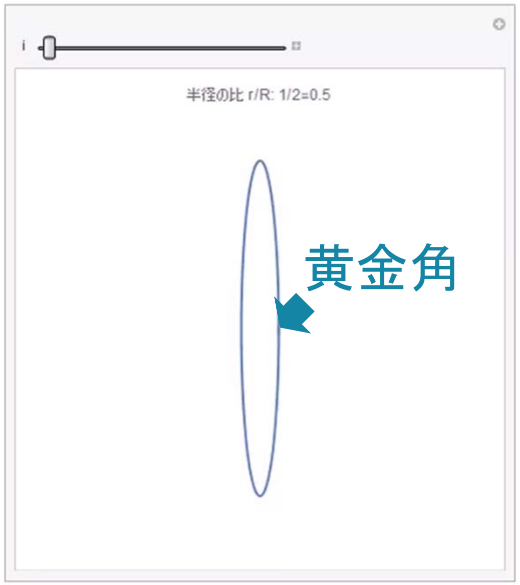
r/R = 1/1, 1/2, 2/3, 3/5, 5/8, 8/13, 13/21, …

$$\frac{\varphi}{1+\varphi} = 0.61803409..$$ に収束する数列

- 2つ隣のフィボナッチ数の比

r/R =1/2, 1/3, 2/5, 3/8, 5/13, 8/21, …

$$\frac{1}{1+\varphi} = 0.38196601..$$ に収束する数列



「スピログラフ曲線の花びらの枚数 = r/Rの分母」より、上記のr/Rを用いた場合、

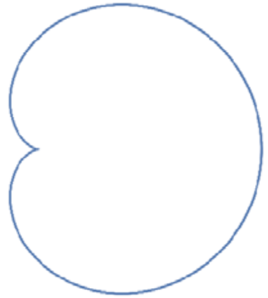
花びらの数がフィボナッチ数に等しいことも自然成立する。

例(1/4)

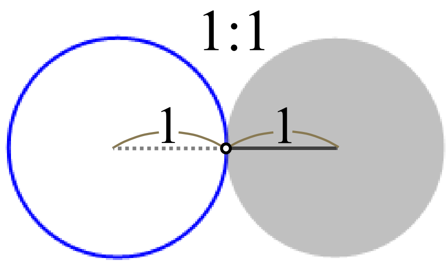
フィボナッチ数: 0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89

1

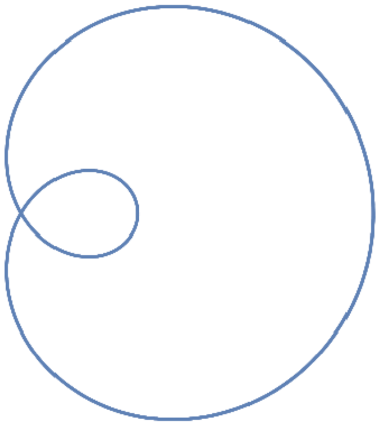
2

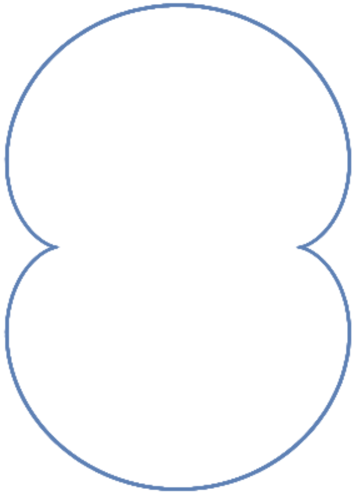


心臓型曲線

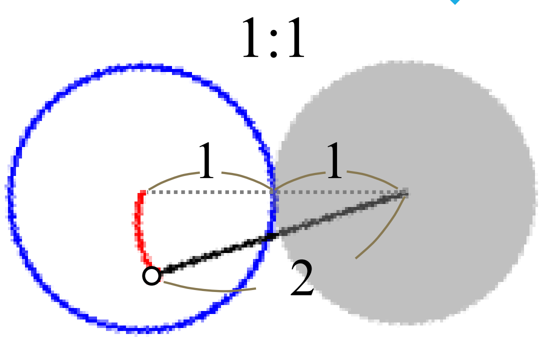


外サイクロイド

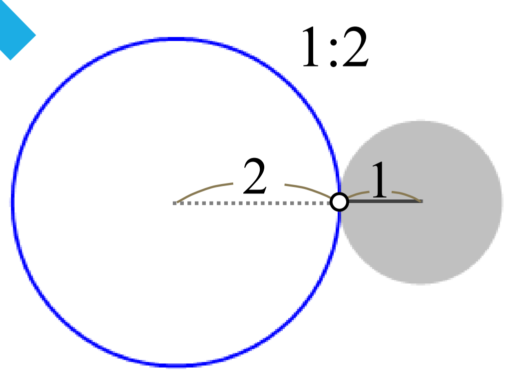




腎臓型曲線



外トロコイド バラ曲線



外サイクロイド

例(2/4)

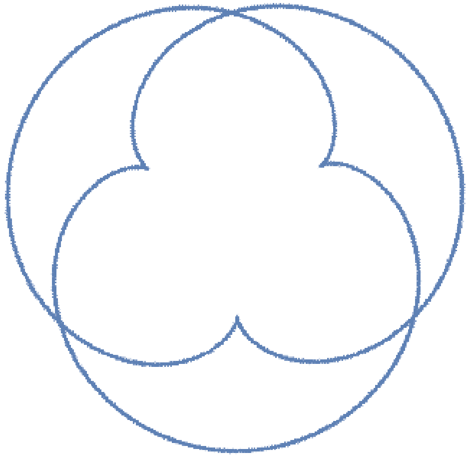
フィボナッチ数: 0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89

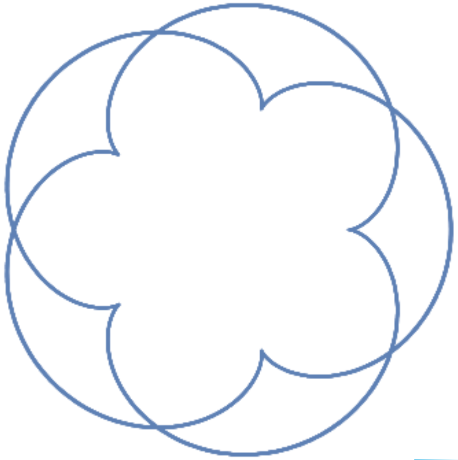
3

3

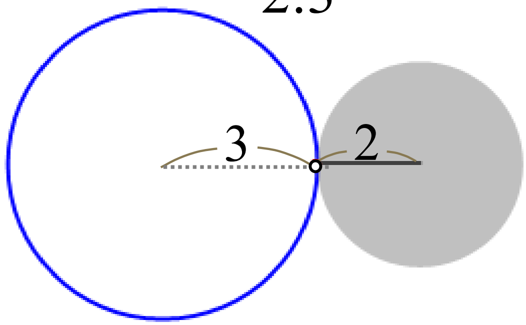
5

5



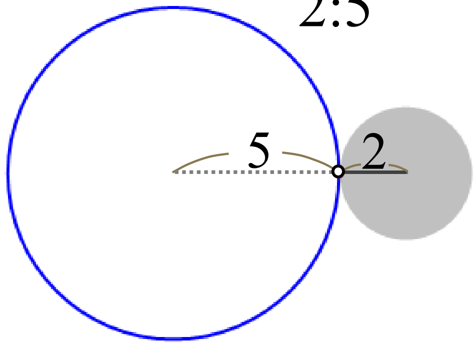


2:3



外サイクロイド

2:5



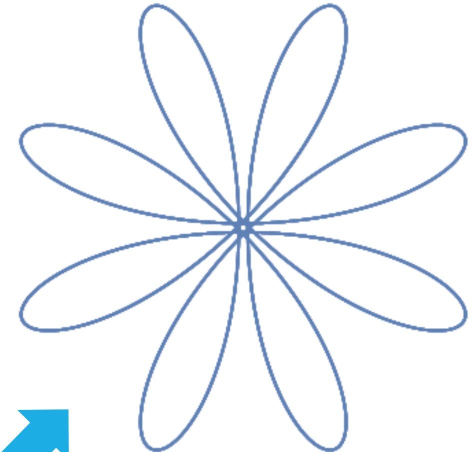
外サイクロイド

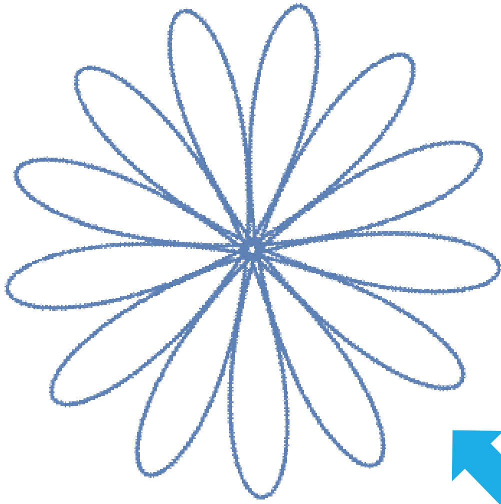
例(3/4)

フィボナッチ数: 0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89

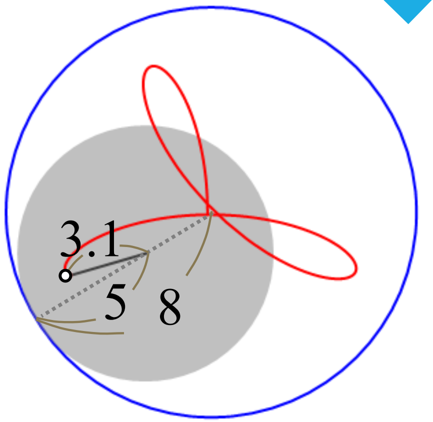
8

13

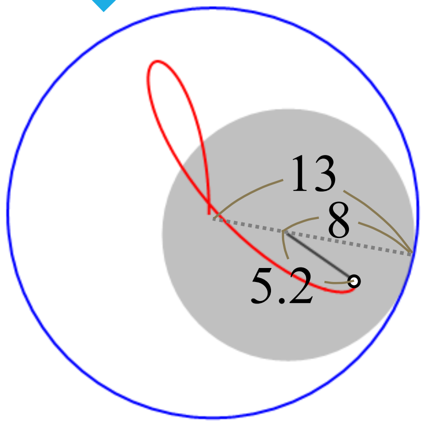




5:8



8:13



ほぼバラ曲線 (3.1+5 ≈ 8)

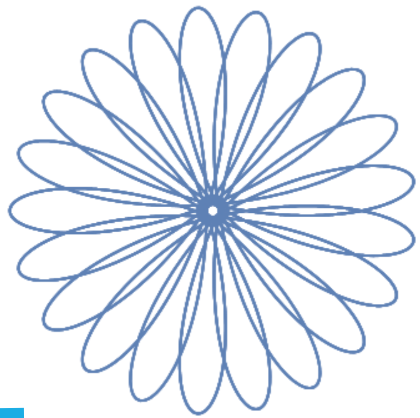
ほぼバラ曲線 (5.2+8 ≈ 13)

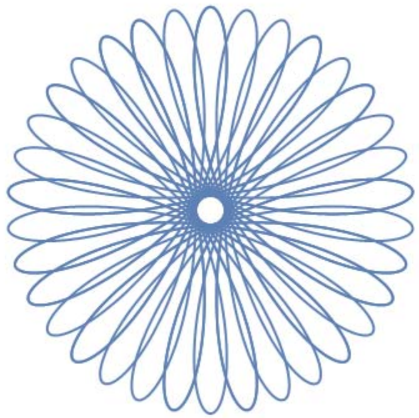
例(4/4)

フィボナッチ数: 0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89

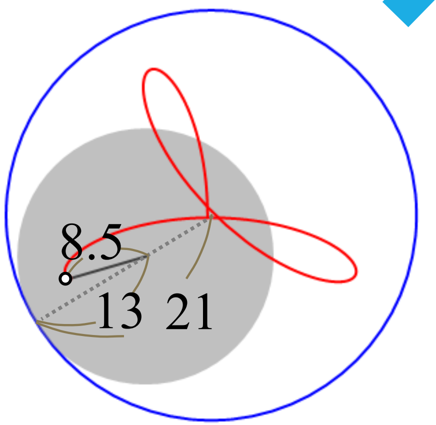
21

34

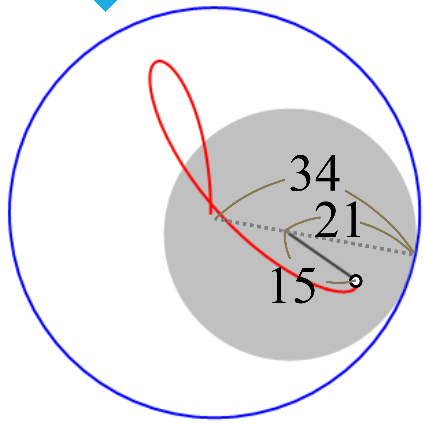




13:21



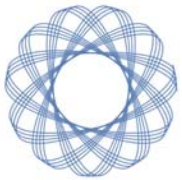
21:34



だいたいバラ曲線 $(8.5+13 \approx 21)$

だいたいバラ曲線? $(15+21 \approx 34)$

第１のミステリーの解明



スピログラフ発明のミステリー

スピログラフで面積を求める方法とは？

植物のミステリー（なぜ4つ葉のクローバーは珍しいのか）？

ここまでに得たスピログラフ曲線を実際の花にさらに近づける。このとき、

フィボナッチ数±1枚の花びらが出ると、全体のバランスはどう変わる？

発明のミステリーを解く鍵

スピログラフで描いた曲線で囲まれる図形の面積は、どうやって測る？

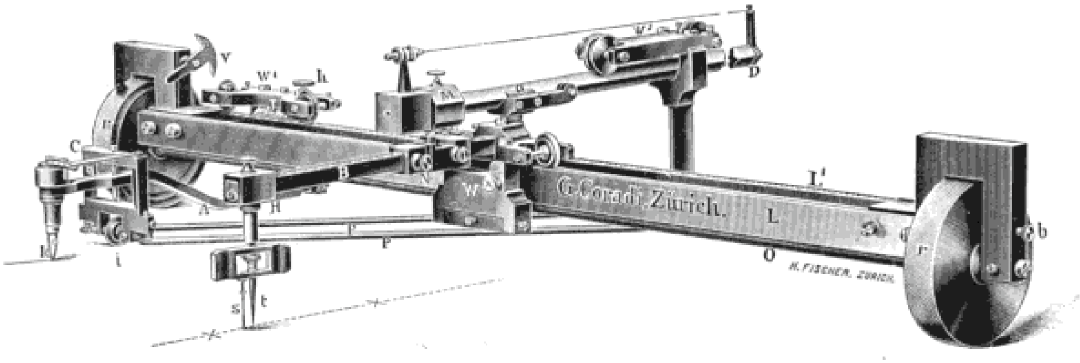
- 先ほどのWikipediaの原典にヒントがあった。

“L‘Europe mathématique: histoires,mythes, identités”,
13章 (ポーランドにおける数学的生活)

“アバカノヴィッチは、積分装置 Integraph の発明者として知られる”

彼が発明した積分装置(Integrating machine) は以下のようなもの。

この針で$y=f(x)$の
グラフをなぞると

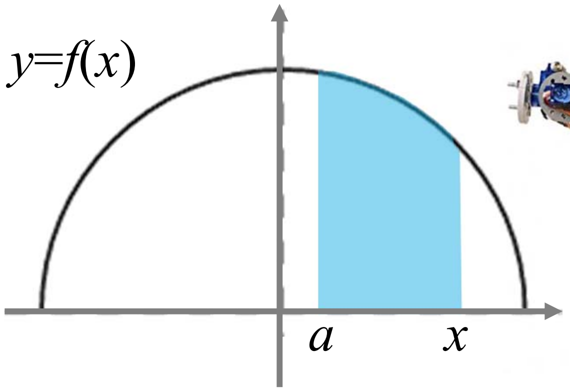


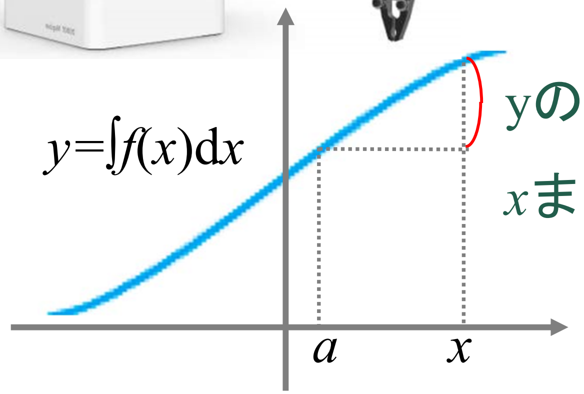
No. 41

こちらのペンが
$y=\int f(x)dx$の
グラフを描く

積分装置を用いてできること

- 例えば、図形の面積を求めることができる。





yの増分が面積S (=aからxまでの積分値)を与える

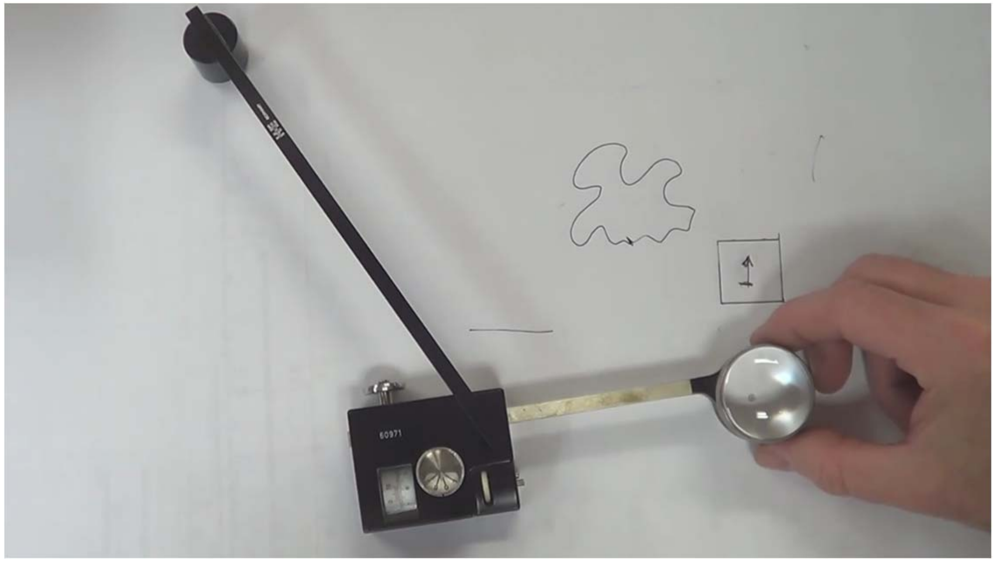
- 戦前は、積分装置を用いて微分方程式を数値的に解く「アナログ微分解析機」が欧米・日本の各国で開発され、軍事などの目的で使用されたとされる。

- アバカノヴィッチのIntegraph自体は、図面のみで実物は残っていないが、よく似たものが現代も販売されている。

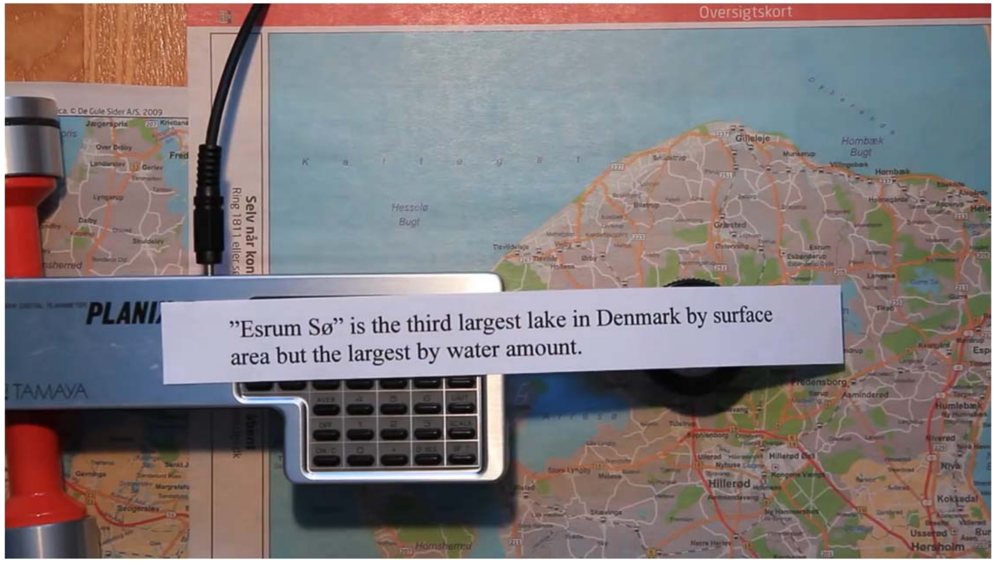
Integraphの原型: プラニメータ

アバカノヴィッチのIntegraphのもととなった発明に面積計プラニメータがある。

- アナログプラニメータ



- デジタルプラニメータ

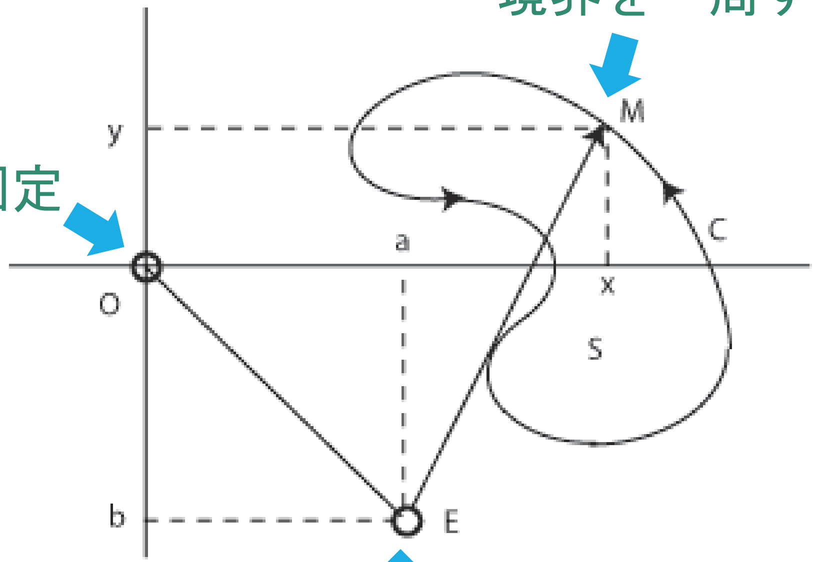


謎を解くもう一つの鍵

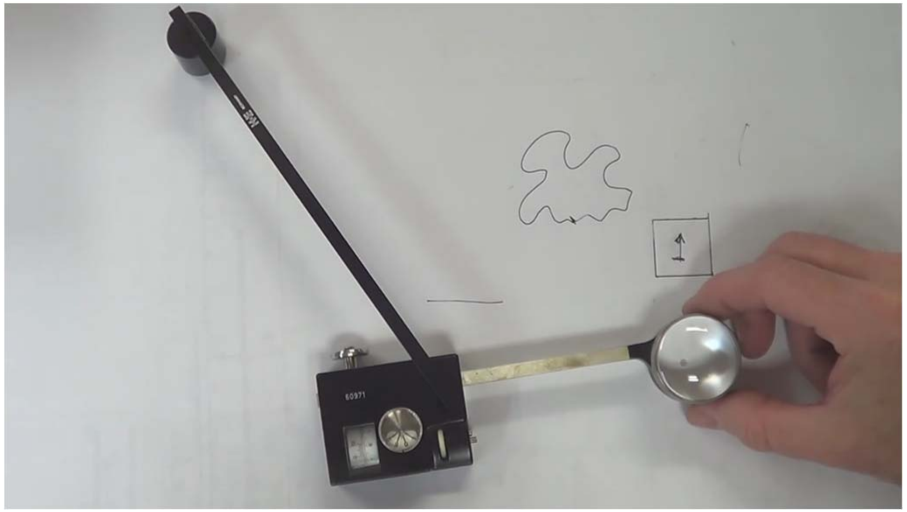
- 極プラニメータの機構を説明する。

面積を求めたい図形の
境界を一周する針

固定



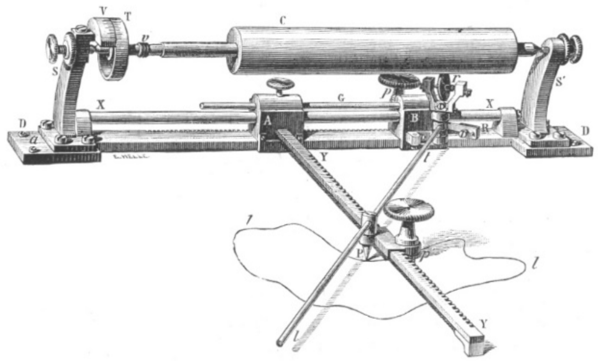
タイヤがついていて、
軸MEと垂直な方向に
のみ回転する。



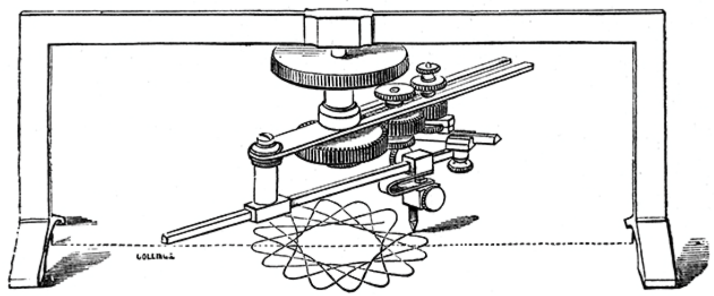
針が一周する間のタイヤの回転数から
図形の面積を求めることができる。

スピログラフ発明に関わる謎の解明

- プラニメータとスピログラフを組み合わせれば、スピログラフで描ける様々な図形の面積を求めることができる。



＋

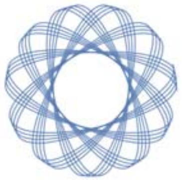


Improved Geometrical Pen.

つまり、積分装置と組み合わせて用いるdrawing machineとしての役割が、スピログラフが発明された当初の目的だった。

もちろん現代のようなコンピュータなどなく、computer といえば、計算を行うテクニシャンを指していた時代の話。
間もなくプラニメータのようなアナログコンピュータもcomputerと呼ばれ始める。

第２のミステリーの解明



スピログラフ発明のミステリー

スピログラフで面積を求める方法とは？

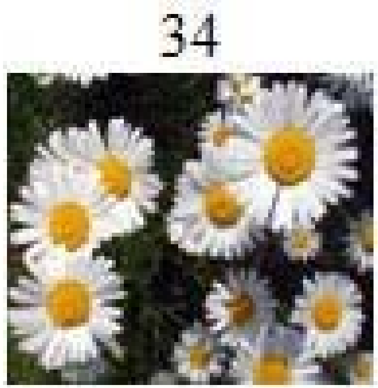
植物のミステリー（なぜクローバーの4つ葉は珍しいのか）？

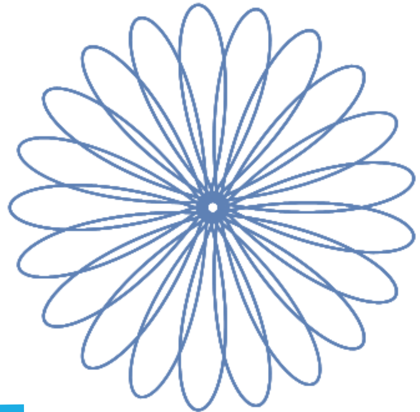
ここまで得たスピログラフ曲線を実際の花にさらに近づける。このとき、

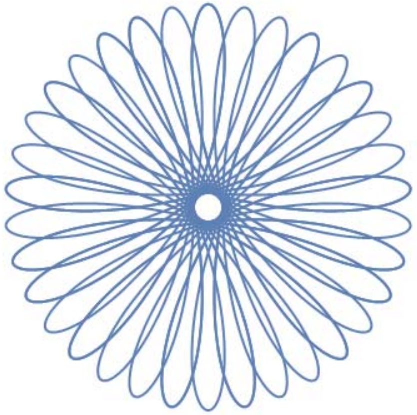
フィボナッチ数±1枚の花びらが出ると、全体のバランスはどう変わる？

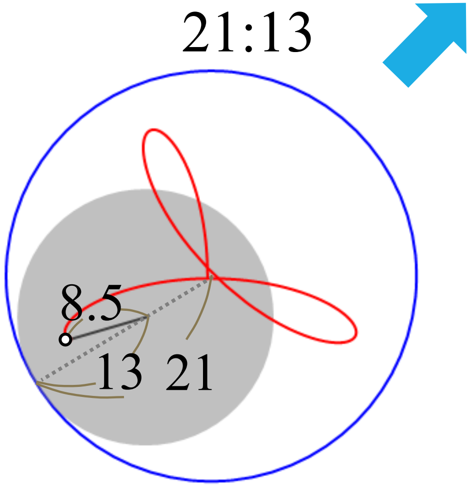
例(4/4)

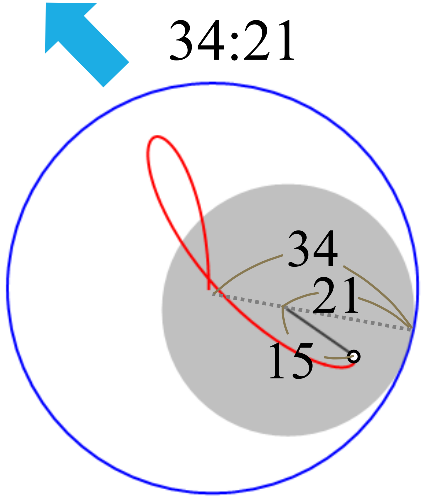
フィボナッチ数: 0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89









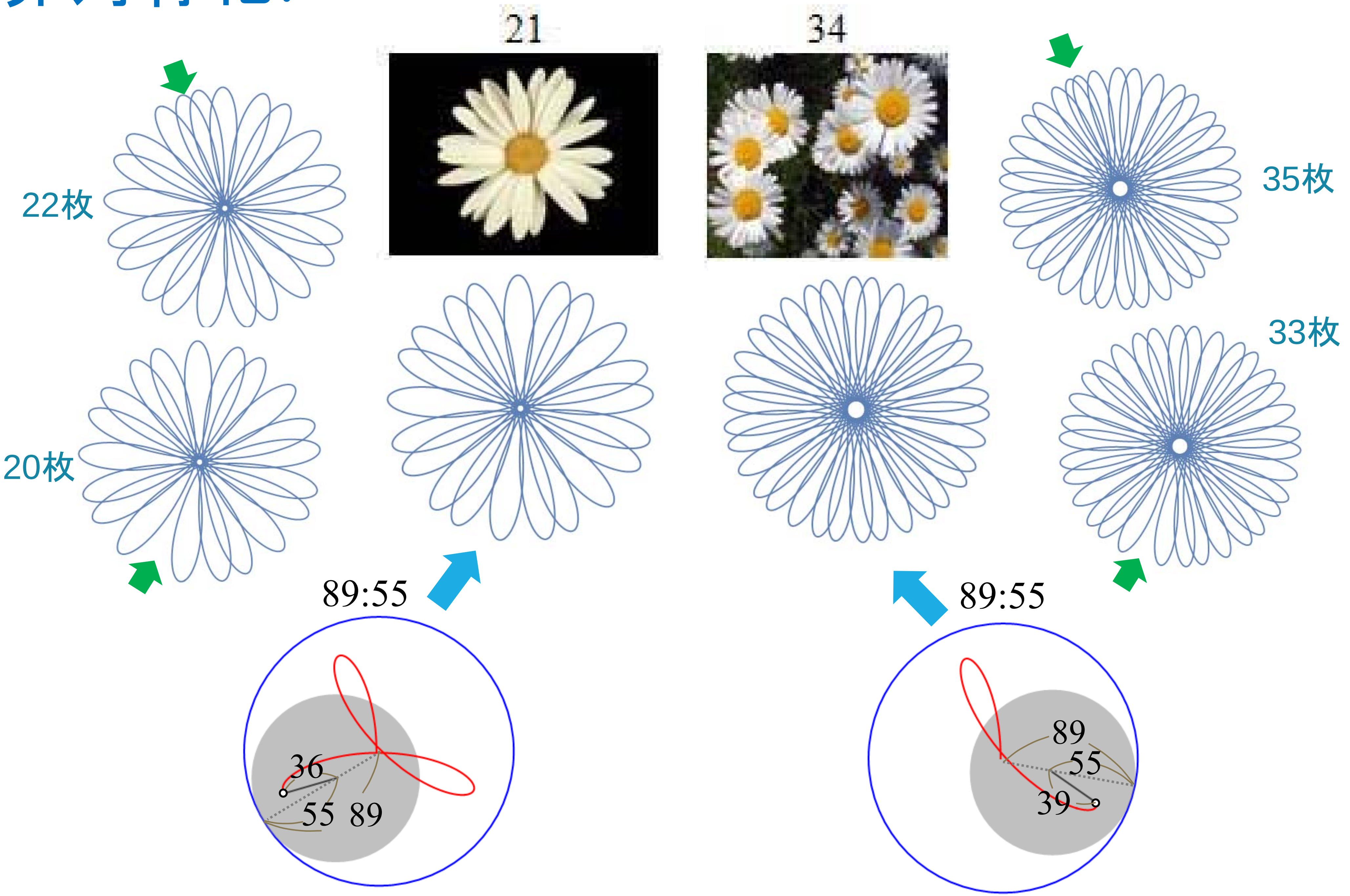


だいたいバラ曲線 (8.5+13 ≈ 21)

だいたいバラ曲線? (15+21 ≈ 34)

非対称化:

フィボナッチ数: 0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89



花びらが21枚出たところで止める　花びらが34枚出たところで止める

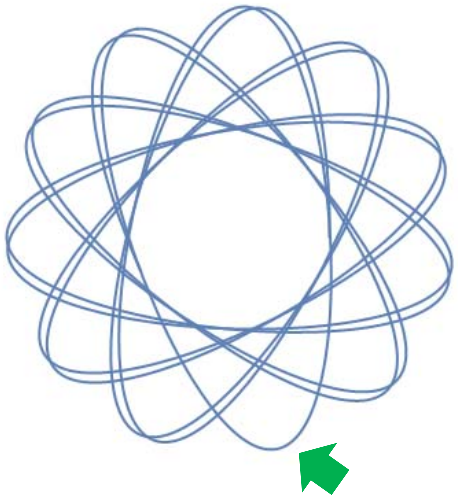
黄金角がもたらす帰結

- r/R=55/89以外でも、r/Rが $\frac{\varphi}{1+\varphi}, \frac{1}{1+\varphi}$ にほぼ等しい(黄金角)ときは、フィボナッチ数±1枚で、花びらの密度に部分的な偏りができる。

- ±1枚でバランスが悪くなるデザインは、黄金角以外でも色々作れる。

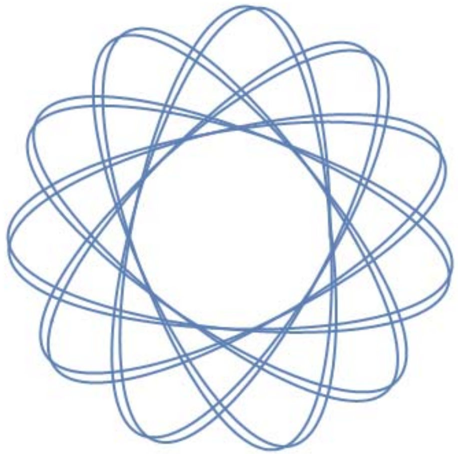
例) r/R=41/90の場合。22±1回転自転すると…

21枚



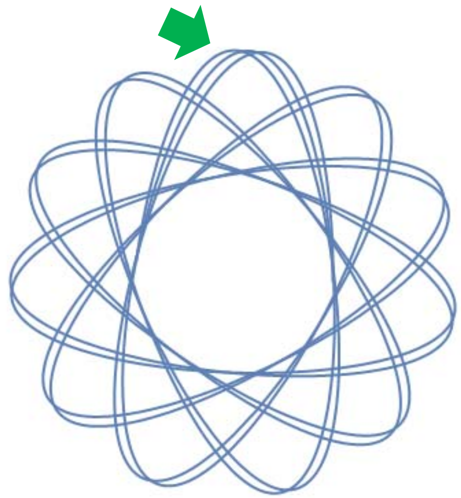
41×21÷90
… 余り51

22枚



41×22÷90＝
902÷90＝… 余り2

23枚



41×23÷90
… 余り43

まとめ

スピログラフで実際の花に近い曲線を描く方法の他、以下について話した。

スピログラフ発明のミステリー

- 面積を求めるための数学的装置として発明された。

植物のミステリー（なぜ4つ葉のクローバーは珍しいのか）

- n枚目と$n+1$枚目の花びら（葉）のなす角が黄金角の場合、
フィボナッチ数± 1枚で全体のバランスが悪くなることを
スピログラフを用いて説明した。
数理植物学、パターン生成、などと呼ばれる分野の話。