企画特別講演

特異点と特性類
— 具体例の果たす重要な役割

佐伯　修（九大数理）

2007年9月21日

1　具体例の重要性

＊理論の正当性を訴えるため

具体例がなければ general non-sense

＊予想を立てるため

＊理論の限界を調べるため

＊存在定理を証明するため

＊概念の理解のため

＊教育効果を高めるため

・・・

一般的事実・定理を示すためにも具体例は重要

⇑

本日の話題

具体例の具体例 $\Leftarrow$ 微分トポロジー・特異点論から

- Euler 標数
- Poincaré–Hopf の定理
- Hirzebruch の符号数定理
- 特異点の Thom 多項式
- 特異ファイバーの Thom 多項式

2 Euler 標数

X: 有限単体複体に分割可能な位相空間

K: 有限単体複体　s.t. 対応する多面体$|K|$がXと同相

α_j: Kのj次元単体の個数

定義 1　Xの**Euler 標数**

$$\chi(X) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \alpha_j \in \mathbb{Z}$$

$$(n = \dim K)$$

単体複体Kの選び方によらない ⇐ 特異ホモロジー理論

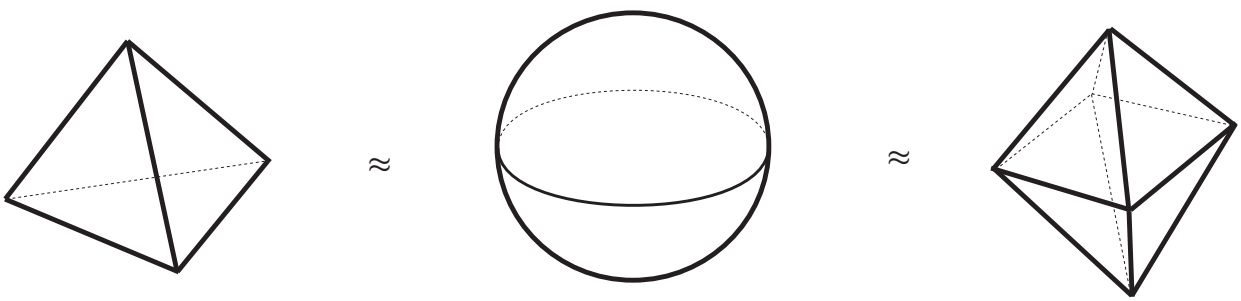
命題 2　2次元球面のEuler標数は2に等しい：

$$\chi(S^2) = 2$$

〔証明〕

S^2 と同相な多面体を具体的に構成

ただし，単体の個数が数えられるものが必要



S^2

$$\chi(S^2) = 4 - 6 + 4 = 6 - 12 + 8 = 2 \qquad \square$$

系 3 (Eulerの多面体定理)

凸多面体に対して，

$$(\text{頂点の個数}) - (\text{辺の本数}) + (\text{面の数}) = 2$$

が常に成り立つ．

3 Poincaré–Hopfの定理

V: 多様体 M 上のベクトル場

（風の流れのようなもの）

V の特異点：$\mathrm{V}(p) = 0$ なる点 $p \in M$

（無風状態の場所）

定義 4

$p \in M$: V の特異点，孤立していると仮定

p の 指数 $\mathrm{ind}_p(\mathrm{V}) \in \mathbb{Z}$ とは，風向き写像

$$\begin{array}{ccc} S_\varepsilon^{m-1} & \longrightarrow & S^{m-1} \\ q & \mapsto & \mathrm{V}(q)/||\mathrm{V}(q)|| \end{array}$$

の写像度のこと

（$m = \dim M$，点 p の近傍を $\mathbb{R}^m$ と同一視）

定理 5 (Poincaré–Hopf)

V：多様体 M 上のベクトル場

特異点はすべて孤立している

$$\Rightarrow \chi(M) = \sum_p \mathrm{ind}_p(\mathrm{V})$$

〔証明〕

(1) V を少し変えて，各特異点での風向き写像

が微分同相であるようにする ⇐ 横断性定理

その際，指数の総和は不変

上の性質を持つベクトル場は非退化であるという

(2) V_0, V_1：非退化ベクトル場

one parameter family $\{\mathrm{V}_t\}$ $(t \in [0,1])$ で結べる

$$W = \{(p,t) \in M \times [0,1] \mid p \text{ は } \mathrm{V}_t \text{ の特異点}\}$$

W は向き付けられた 1 次元多様体として良い

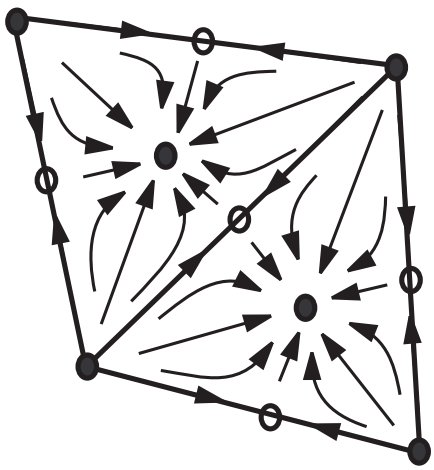
（特に，入る点と出る点の総数は同じ）

$\Rightarrow$ V_0, V_1 の指数の総和は等しい

(3) 非退化なベクトル場1つについて指数の総和を計算すれば良い．

非退化ベクトル場を M 上に具体的に構成．

ただし，**Euler** 標数との関連が明確なものが必要



M を単体分割し，上図のようなベクトル場を考える：

特異点 $\Longleftrightarrow$ 単体の重心

$$\text{指数} = (-1)^{\dim}$$

よって（指数の総和）$= \chi(M)$ □

注意：**Morse** 関数 $M \to \mathbb{R}$ の **gradient** ベクトル場を用いる方法もある

系 6 2次元球面上には無風状態の所が必ずある．

4　Hirzebruchの符号数公式

M: 向き付けられた$4k$次元閉多様体

Mの交叉形式 (対称双1次形式)

$$H^{2k}(M;\mathbb{R}) \times H^{2k}(M;\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\xi, \eta) \quad \mapsto \quad \langle \xi \smile \eta, [M] \rangle$$

Mの符号数

$$\sigma(M) = \#(\text{正の固有値}) - \#(\text{負の固有値})$$

Mのトポロジー (コホモロジー環) を反映する重要な量

定理 7 (Hirzebruch)

$\{L_k(p_1, p_2, \ldots, p_k)\}$:

$$\frac{\sqrt{t}}{\tanh\sqrt{t}} = 1+\frac{1}{3}t-\frac{1}{45}t^2+\cdots+\frac{(-1)^{k-1}2^{2k}B_k}{(2k)!}t^k+\cdots$$

に付随した“多項式の乗法的列”

（p_i: Pontrjagin類，B_i: Bernoulli数）

$$\Longrightarrow \quad \sigma(M^{4k}) = L_k(p_1, p_2, \ldots, p_k)[M^{4k}]$$

符号数$\sigma(M^{4k})$は，多様体M^{4k}の特性類の有理数係数多項式で書ける

$$\begin{aligned}
\sigma(M^4) &= \frac{1}{3}p_1[M^4], \\
\sigma(M^8) &= \frac{1}{45}(7p_2 - p_1^2)[M^8], \\
\sigma(M^{12}) &= \frac{1}{945}(62p_3 - 13p_2p_1 + 2p_1^3)[M^{12}], \\
&\cdots
\end{aligned}$$

〔Hirzebruchの符号数定理の証明〕

定義 8 M_0, M_1: 向き付けられた同次元閉多様体

M_0, M_1 が同境

$\Leftrightarrow \exists W$: 向き付けられたコンパクト多様体

s.t. $\partial W \cong (-M_0) \cup M_1$

閉多様体の同境類全体は可換環となる: Ω_* と書く

事実

(ア) 符号数は同境不変である

(イ) $\sigma(M \times N) = \sigma(M)\sigma(N)$

$\Rightarrow \sigma : \Omega_* \to \mathbb{Z}$ 環準同型

20世紀半ばの高次元トポロジーの成果

$\Omega_* \otimes \mathbb{Q}$: $\mathbb{Q}$ 上の多項式代数

生成元として $\mathbb{C}P^2, \mathbb{C}P^4, \mathbb{C}P^6, \ldots$ を持つ

$\Downarrow$

生成元に対してだけ符号数公式を確かめれば良い！

複素射影空間に対しては容易 □

重要な役割を果たす具体例の例 ⇐ 多数あり！

- 曲面から $\mathbb{R}^3$ へのはめ込みの3重点公式 (Banchoff)

  $\Rightarrow$ 3重点が1つの射影平面のはめ込み（Boyの曲面）を利用

- 閉曲面の写像類群のコホモロジー環の構造の研究（森田，Miller）

  $\Rightarrow$ 特性類が非自明な曲面束を構成

- 種数2のLefschetz束に対する符号数定理（松本）

  $\Rightarrow$ 具体的なLefschetz束を構成

5　特異点のThom多項式

$f : M \to N$　多様体間の可微分写像

Σ：“特異点型”

$$\Sigma(f) = \{p \in M \mid f \text{は点} p \text{を} \Sigma \text{型特異点に持つ}\}$$

Σが適当な条件を満たし，fが十分にジェネリック

$\Rightarrow$ 閉包 $\overline{\Sigma(f)}$ はMのホモロジー類を表す

$[\Sigma(f)]^* \in H^*(M)$：そのPoincaré双対

定理 9 (1950年代)

$[\Sigma(f)]^*$: $f^*TN - TM$の特性類の多項式で書ける．

その多項式は特定の写像fによらずに普遍的に定まる．

この多項式をΣのThom多項式と呼ぶ．

問 1　具体的な Σ について，Thom 多項式を計算せよ．

難しい！

主な手法：特異点解消とコホモロジーの Gysin 準同型．

1990 年代になっても具体的に計算されたものはほとんど数えるほどしかなかった．

Rimányi（2000 年頃）の単純なアイデア

Thom 多項式：特性類の多項式

係数さえ計算すれば良い

$\Uparrow$

具体例について計算すれば連立方程式が得られる

$\Uparrow$

具体例の構成

Rimányi–Szűcsの構成法

$f : (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$　Σの“代表元”

$\mathrm{Sym}(f) \subset \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^m, 0) \times \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^n, 0)$

　　fの symmetry group

G_Σ：$\mathrm{Sym}(f)$の極大コンパクト部分群

$\Rightarrow$ $\exists\, \bar{\xi}_\Sigma, \xi_\Sigma$：分類空間$BG_\Sigma$上のベクトル束

　　s.t. $\dim \bar{\xi}_\Sigma = m$, $\dim \xi_\Sigma = n$

　　$\exists \varphi_\Sigma : \bar{\xi}_\Sigma \to \xi_\Sigma$　各ファイバー上でf

　　s.t. $\Sigma(\varphi_\Sigma)$は$\bar{\xi}_\Sigma$の零切断に対応

φ_Σは，原点をΣ型特異点に持つ写像をずらっと並べたもの $\Rightarrow$ 普遍的写像とみなせる

Rimányi–Szűcsのこの普遍的写像は具体例とみなせる!

Rimányi：こうして“余次元8以下”の特異点の

　　Thom多項式をすべて決定

6　特異ファイバーのThom多項式

$f : M \to N$　多様体間の可微分写像，$y \in N$

定義 10　写像芽

$$f : (M, f^{-1}(y)) \to (N, y)$$

をファイバーと呼ぶ．

$f^{-1}(y)$ が特異点を含む場合は特異ファイバーとも呼ぶ．

特異点型だけでなく，特異点達が $f^{-1}(y)$ の中でどのようにつながっているか，そのトポロジーの情報まで込めたものがファイバー

$\mathcal{F}$: “ファイバーの型”

$$\mathcal{F}(f) = \{y \in N \mid f \text{ の } y \text{ 上のファイバーは} \mathcal{F} \text{ 型}\}$$

$\mathcal{F}$ が適当な条件を満たし，f が十分にジェネリック

$\Rightarrow$ 閉包 $\overline{\mathcal{F}(f)}$ は N のホモロジー類を表す

$[\mathcal{F}(f)]^* \in H^*(N)$: そのPoincaré双対

定理 11 **(Kazarian et al.)**

$[\mathcal{F}(f)]^*$: N の特性類や，$f^*TN - TM$ の特性類の単項式の Gysin 準同型 $f_!$ による像を用いた多項式で書ける．

その多項式は特定の写像 f によらずに普遍的に定まる．

この多項式も $\mathcal{F}$ の **Thom 多項式**と呼ぶ．

問 2 具体的な $\mathcal{F}$ について，Thom 多項式を計算せよ．

研究は始まったばかり！

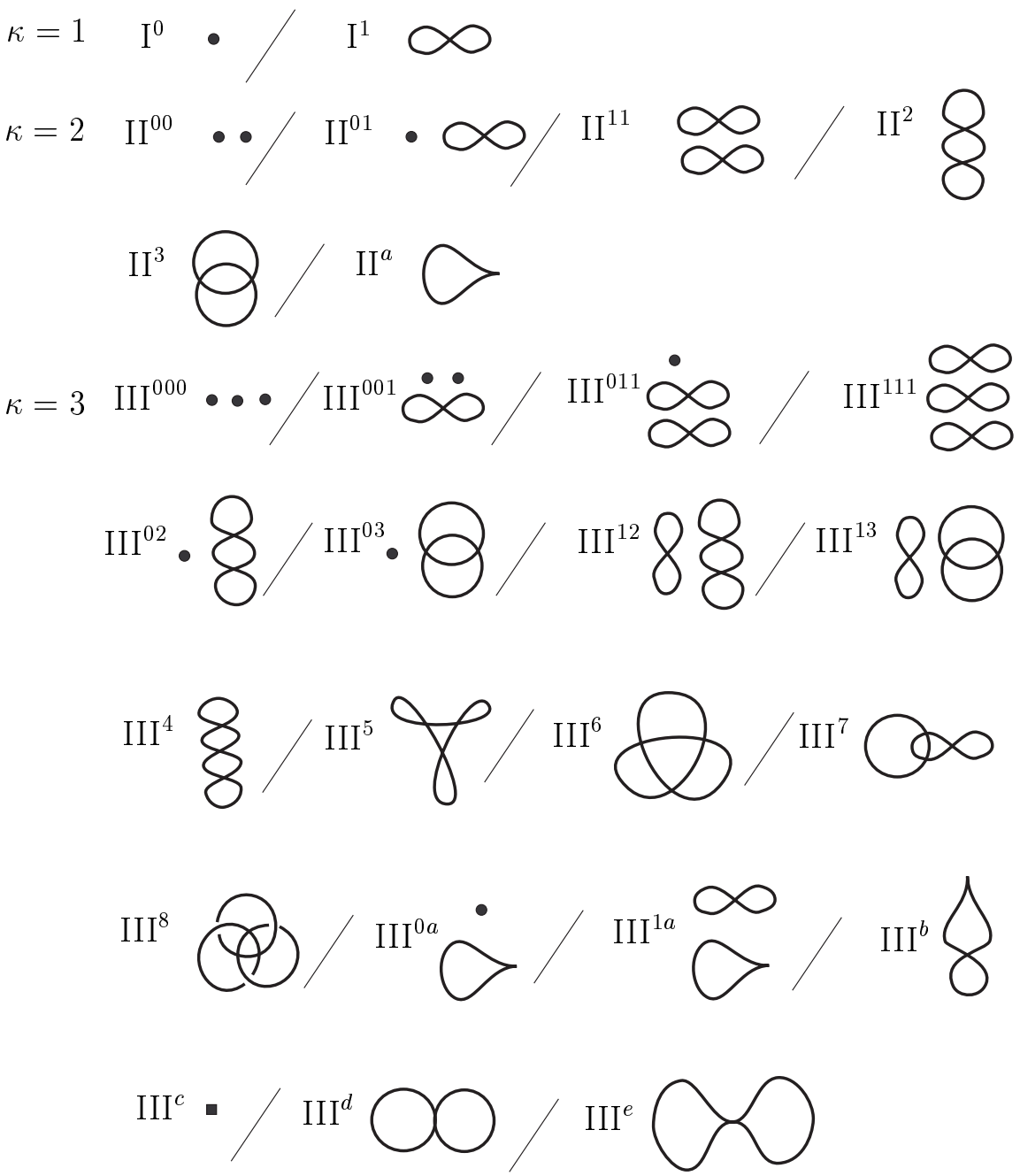
4次元多様体上の可微分写像の特異ファイバー

$f : M^4 \to \mathbb{R}^3$　ジェネリックな可微分写像

fの特異点

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto \begin{cases} (x_1, x_2, x_3^2 \pm x_4^2) & \text{折り目} \\ (x_1, x_2, x_3^3 + x_2 x_3 - x_4^2) & \text{カスプ} \\ (x_1, x_2, x_3^4 + x_1 x_3^2 + x_2 x_3 \pm x_4^2) & \text{燕の尾} \end{cases}$$

特異ファイバーの分類



κ：ファイバーの“余次元”

定理 12 (S.–山本卓宏)

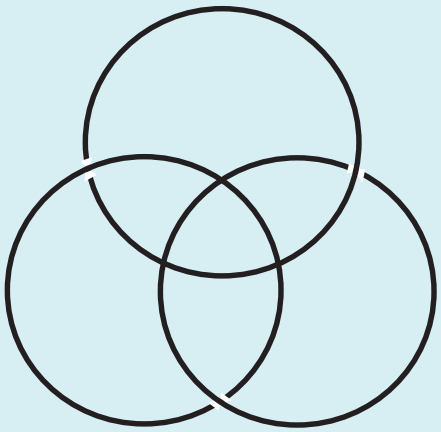
M：向き付けられた4次元閉多様体

$f : M \to \mathbb{R}^3$　ジェネリックな可微分写像

各III^8型特異ファイバーには符号$(= \pm 1)$が定義できる．

その符号和は，符号数$\sigma(M)$に一致する．

III^8型特異ファイバー



〔証明〕

(1) III^8 型特異ファイバーの符号和は

4次元多様体の同境不変量

$$\Uparrow$$

特異ファイバーの隣接関係

(c.f. Vassiliev 複体の考え方)

(2) Ω_4 : 向きづけられた4次元多様体の同境群

古典的結果

$$\Omega_4 \quad \xrightarrow{\cong} \quad \mathbb{Z}$$

$$M \quad \mapsto \quad \sigma(M)$$

あとは符号数が非自明な多様体上のジェネリックな写像の特異ファイバーがわかる具体例が一つあれば良い！

(3) 具体例の構成

Rimányiの方法　—　なかなかうまくゆかない．

特異ファイバーの自己同型群の極大コンパクト部分群：

多くの場合有限群 ↗

⇒ 分類空間の$\mathbb{Q}$係数のコホモロジーは消えてしまう．

つまり，1つの特異ファイバーにこだわっていては駄目．

一方，**Rimányi**の方法によらない，希望の特異ファイバーを持つ可微分写像の具体的構成は難しい．

つまり…

多様体M, N：given

⇒ 可微分写像$f : M \to N$は豊富にあり，その中で

ジェネリックなものはまたたくさんある

しかし，いざ具体的な写像を1つ与えて下さい，となるととたんに難しくなる！

小林 (1990 年代):

ジェネリックな写像 $\mathbb{C}P^2 \to \mathbb{R}^3$ を具体的に構成

しかし , 特異ファイバーの構造までは良くわからない

(小林氏にはわかっていたのかも知れないが ...)

そこで ...

特異ファイバー構造がわかる具体例を構成 $\Leftarrow$ 手作り !

アイデア

特異ファイバーの近傍をうまく貼り合わせる

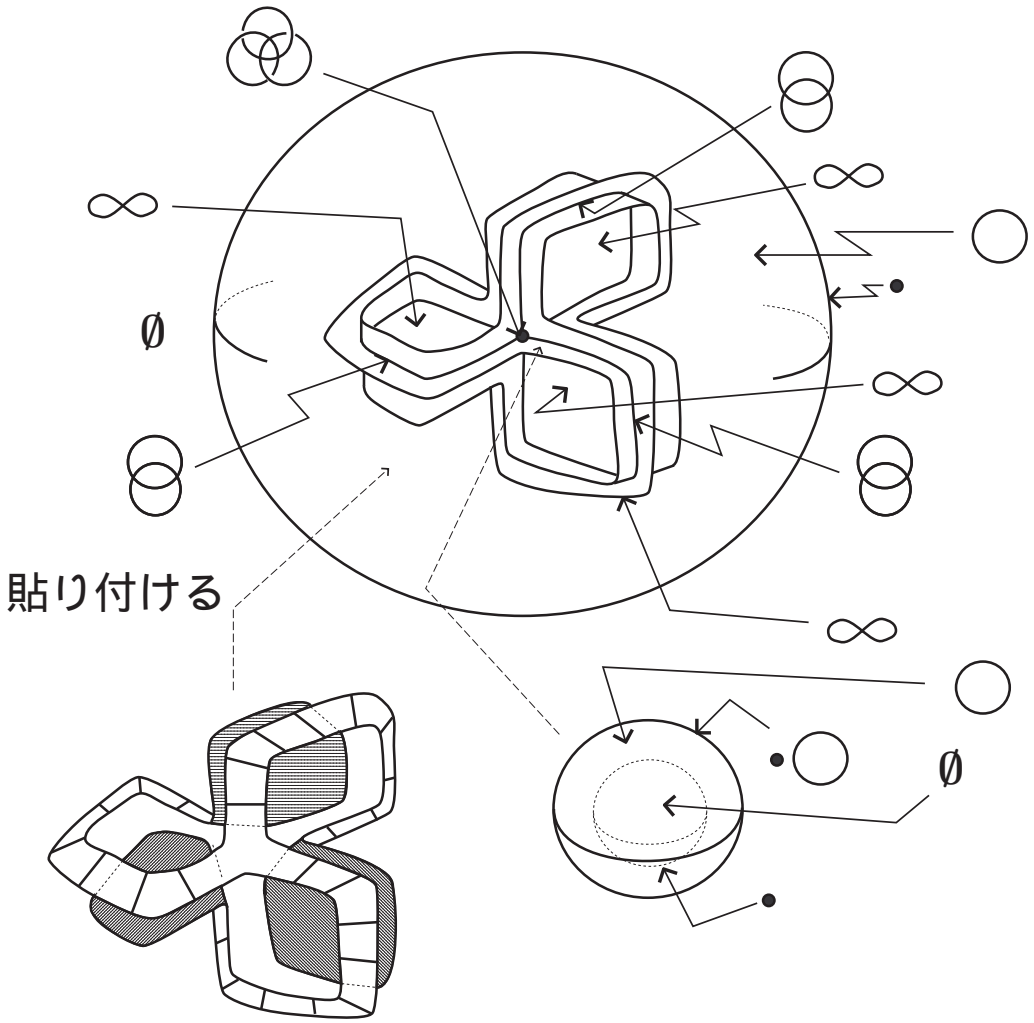
$\Rightarrow$ ある 4 次元閉多様体 M から $\mathbb{R}^3$ への写像を構成

$\Rightarrow$ その後で多様体 M を特定

4次元多様体から$\mathbb{R}^3$への写像の具体例

「私の写像」

特異ファイバーの説明図



(c.f. Boyの曲面 $\mathbb{R}P^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$)

上の写像の定義域4次元多様体は$\mathbb{C}P^2 \sharp 2\overline{\mathbb{C}P^2}$

($\Leftarrow$ 低次元トポロジーの手法を駆使してわかること)

「私の写像」: $\mathbf{III}^8$ 型特異ファイバーをちょうど1つ持つ

その符号は -1

$\sigma(\mathbb{C}P^2 \sharp 2\overline{\mathbb{C}P^2}) = -1$ □

系 13 $\mathcal{F}$: $\mathbf{III}^8$ 型特異ファイバー

$f : M^{n+1} \longrightarrow N^n$ ジェネリックな可微分写像

(oriented map)

$\Rightarrow [\mathcal{F}(f)]^* = -f_! p_1(f^*TN - TM)$

余談 ...

Hirzebruchの符号数定理の4次元の場合の“説明”

$f : M^4 \to \mathbb{R}^3$ ジェネリックな写像

$$3^8(f) = \{p \in M^4 \mid p\text{は特異点で，}$$

$$p\text{を通る特異ファイバーは}\mathrm{III}^8\text{型}\}$$

普遍的写像の議論

$$\Downarrow$$

$[3^8(f)]^* \in H^4(M^4;\mathbb{Z})$ は，p_1 のスカラー倍 αp_1

しかもスカラー α は普遍的なもの

先に構成した具体例「私の写像」$\Rightarrow \alpha = 1$ がわかる

$$\therefore \quad [3^8(f)]^* = p_1(M^4)$$

$\mathbf{1}$つの$\mathbf{III}^{8}$型ファイバーはちょうど$\mathbf{3}$つの特異点を持つ

$$\Downarrow$$

$[3^{8}(f)]$のf_{*}による像は，$[\mathbf{III}^{8}(f)]$の$\mathbf{3}$倍

$\mathbf{III}^{8}$特異ファイバー定理

$$\Downarrow$$

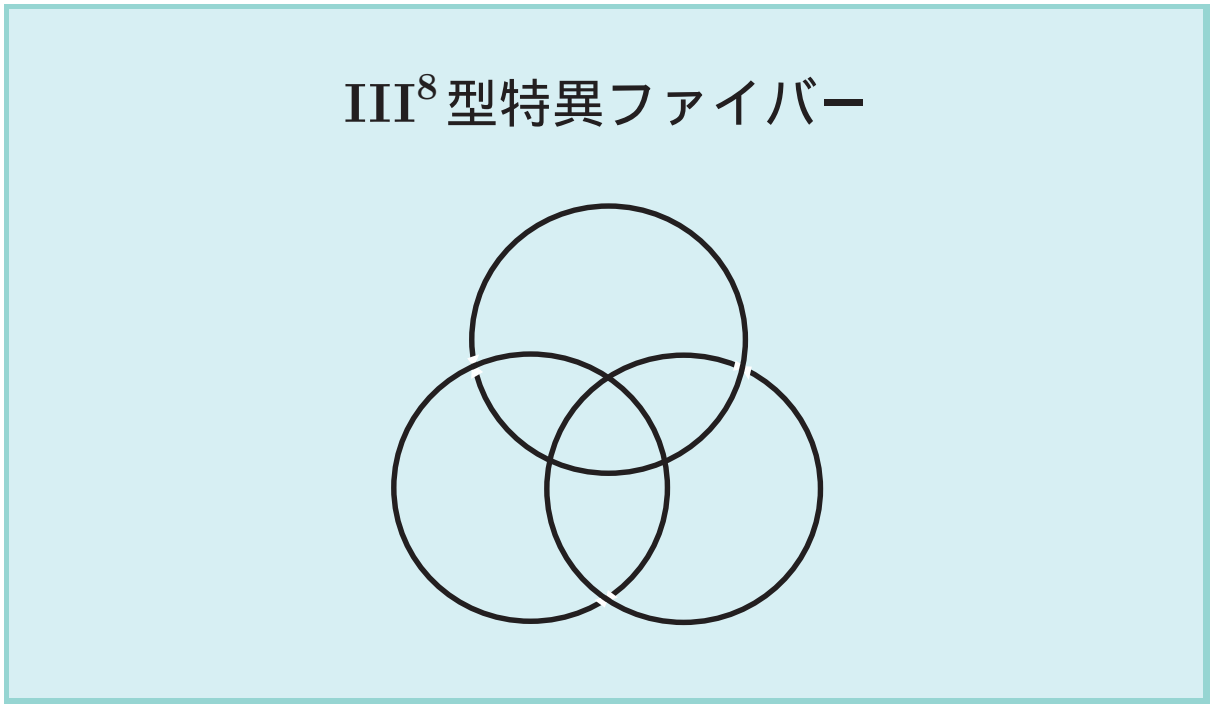
$[3^{8}(f)]$は$\sigma(M^{4})$の$\mathbf{3}$倍に一致

すなわち，$p_{1}[M^{4}] = 3\sigma(M^{4})$

4次元の場合に

$$\sigma(M^4) = \frac{1}{3}p_1[M^4]$$

と係数が $\frac{1}{3}$ になるのは，特異ファイバー III^8 に特異点が3つ含まれているから



こうした話をさらに発展させてゆくためには …

具体例をたくさん作る手法を整備する必要あり

ジェネリックな可微分写像はたくさんあるはずなのに，実際に具体例を構成しようとすると難しいのは昔も今も変わらない．

今後の研究に期待したい．

稠密の　海からはねた　一滴も
のぞいてみれば　宇宙が見える

稠密の　霧雨の粒　一つでも
調べてみれば　神住めりけり