

回路シミュレーションにおける 微分代数方程式の最適モデリング

最適化ワークショップ：広がっていく最適化

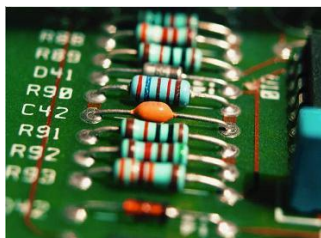
中央大学 高松 瑞代

岩田 覚 教授(東京大学)および

Caren Tischendorf 教授(Humboldt University of Berlin)
との共同研究

2013年2月19日@九州大学 IMI

回路の最適モデリング



回路

③対象の変更

→
モデリング
(数式で記述)

微分代数方程式

(**D**ifferential-**A**lgebraic **E**qns)

①解法の工夫 ②式の変形

- 近年発展してきた理論
- 多くの動的システムを記述
- **指数**が大きいと数値計算が困難

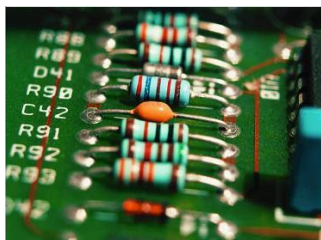
計算精度の向上のために

- ① 高精度な数値解法の利用
- ② DAEの指数減少法の利用
- ③ 指数を減らすため 回路に素子を追加

本研究・・・**モデリング**に着目

最小指数のDAEを求めるアルゴリズムの構築

回路の最適モデリング



回路

→
モデリング
(数式で記述)

微分代数方程式
(**D**ifferential-**A**lgebraic **E**qns)

- 近年発展してきた理論
- 多くの動的システムを記述
- **指数**が大きいと数値計算が困難

特徴

- **組合せ最適化**の視点
- **マトロイド理論**の応用

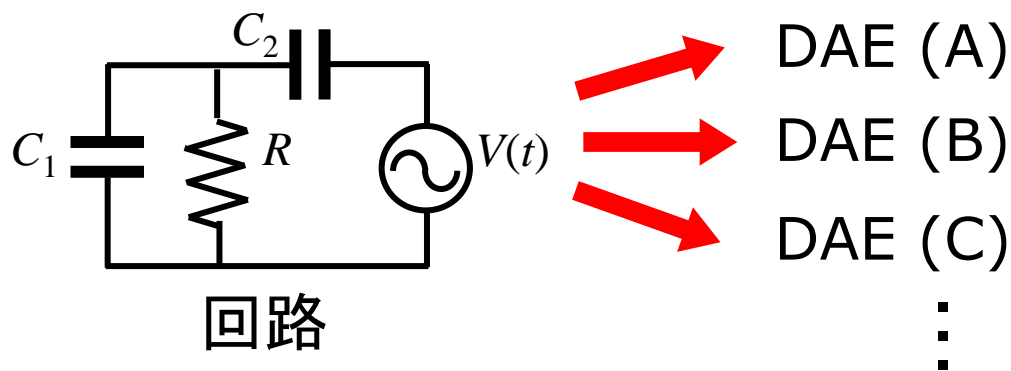


大規模回路に適用可能な
アルゴリズムの導出

本研究・・・**モデリング**に着目

最小指数のDAEを求めるアルゴリズムの構築

数式表現は一意に定まらない



A

$$Ri_R + v_{C_2} = -V(t)$$

$$-i_R + (C_1 + C_2) \frac{dv_{C_2}}{dt} = -C_1 \frac{dV(t)}{dt}$$

C

$$i_V - C_2 \frac{du_1}{dt} + C_2 \frac{du_2}{dt} = 0$$

$$(C_1 + C_2) \frac{du_1}{dt} + \frac{1}{R} u_1 - C_2 \frac{du_2}{dt} = 0$$

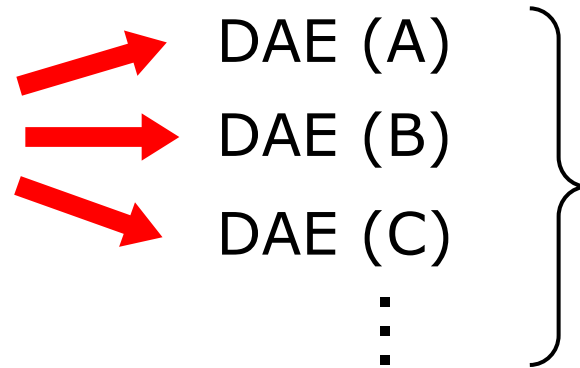
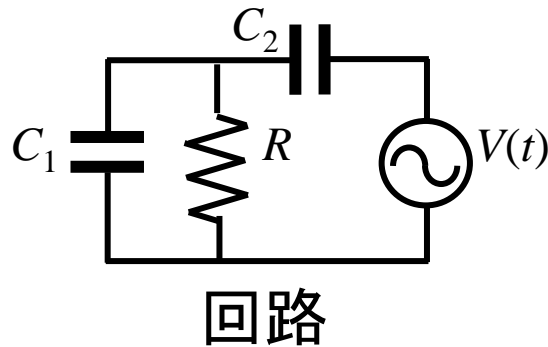
$$u_2 = V(t)$$

B

$$(C_1 + C_2) \frac{dv_{C_2}}{dt} + \frac{1}{R} v_{C_2} = -C_1 \frac{dV(t)}{dt} - \frac{1}{R} V(t)$$

$(u_1, u_2: \text{節点電位})$

最適モデリングの関連研究



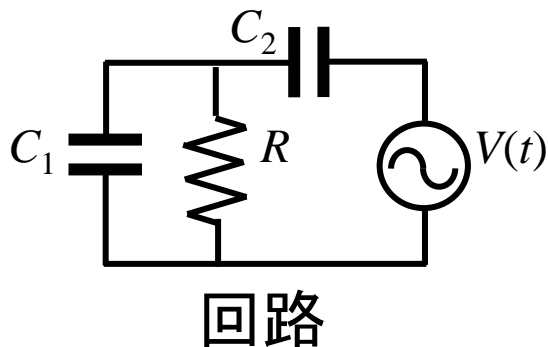
“最適な”
数式表現を選ぶ

最適性の基準

- **変数の個数が最小** — 最小基本方程式 [甘利 62]
[岸・梶谷 68], [大附・石崎・渡部 68], [伊理 68]
- **もっとも細かい分解** — 組合せ論的正準形 [室田・伊理・中村 87]
- **数値誤差が最小** — **本研究**
目標: **回路シミュレーションの精度向上**

本研究：微分代数方程式の最適モデリング

(Differential-Algebraic Eqns)



- DAE (A)
- DAE (B)
- DAE (C)
- ⋮

数値的難しさの指標

最小指数の
DAEを選ぶ

A 指数1

$$Ri_R + v_{C_2} = -V(t)$$

$$-i_R + (C_1 + C_2) \frac{dv_{C_2}}{dt} = -C_1 \frac{dV(t)}{dt}$$

C 指数2

$$i_V - C_2 \frac{du_1}{dt} + C_2 \frac{du_2}{dt} = 0$$

$$(C_1 + C_2) \frac{du_1}{dt} + \frac{1}{R} u_1 - C_2 \frac{du_2}{dt} = 0$$

$$u_2 = V(t)$$

(u_1, u_2 : 節点電位)

B 指数0

$$(C_1 + C_2) \frac{dv_{C_2}}{dt} + \frac{1}{R} v_{C_2} = -C_1 \frac{dV(t)}{dt} - \frac{1}{R} V(t)$$

最適

発表の流れ

1. イントロダクション

<分野横断的な研究>

組合せ最適化

実用的な問題に応用

- ・最適化の視点
- ・マトロイド構造

数値解析

微分代数方程式: $f(x(t), x'(t), t) = 0$
(Differential-Algebraic Equations)

回路シミュレーション

混合解析におけるDAEの指数最小化

発表の流れ

1. イントロダクション
2. 微分代数方程式
3. 回路シミュレーションの歴史
4. 本研究の成果

<分野横断的な研究>

数値解析

微分代数方程式: $f(x(t), x'(t), t) = 0$
(Differential-Algebraic Equations)



回路シミュレーション

混合解析におけるDAEの指数最小化

微分代数方程式 (DAE)

- Differential-Algebraic Equations: $f(t, \mathbf{x}, \frac{d\mathbf{x}}{dt}) = 0$
 - 微分演算子を含む方程式系
 - 電気回路などの動的システムを記述

□ DAEの例

- 常微分方程式 **指数0**

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = f_1(x_1, x_2, t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = f_2(x_1, x_2, t)$$

- 代数方程式 **指数1** ...

$$x_1(t) + 2x_2(t) = f_1(t)$$

$$x_1(t) - x_2(t) = f_2(t)$$

- 指数: 常微分方程式からの“遠さ”を表す

➡ **大きい**ほど数値計算は**困難**

DAEと指数

指数が**大きく**なるほど数値計算が**困難**になる

- 高階微分の出現
- 初期値選択の難しさ

DAEと指数 : 高階微分の出現

指数が**大きく**なるほど数値計算が**困難**になる

- 高階微分の出現
- 初期値選択の難しさ

指数: m

$$x_1 + \frac{dx_2}{dt} = f_1(t)$$

$$x_2 + \frac{dx_3}{dt} = f_2(t)$$

⋮

$$x_{m-1} + \frac{dx_m}{dt} = f_{m-1}(t)$$

$$x_m = f_m(t)$$

→ $x_1 = f_1(t) - f_2^{(1)}(t) + \cdots + \underline{(-1)^{m-1} f_m^{(m-1)}(t)}$

DAEと指数 : 隠れた制約式の存在

指数が**大きく**なるほど数値計算が**困難**になる

■ 高階微分の出現

● 初期値選択の難しさ

□ 常微分方程式 (指数 0)

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(t)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = f_3(t)$$

初期値の制約式: なし

□ 代数方程式 (指数 1)

$$x_1 + x_2 = f_1(t)$$

$$x_2 = f_2(t)$$

$$x_2 + x_3 = f_3(t)$$

初期値の制約式

$$x_1 + x_2 = f_1(0)$$

$$x_2 = f_2(0)$$

$$x_2 + x_3 = f_3(0)$$

DAEと指数 : 隠れた制約式の存在

指数が**大きく**なるほど数値計算が**困難**になる

■ 高階微分の出現

● 初期値選択の難しさ

□ 常微分方程式 (指数 0)

□ 代数方程式 (指数 1)

初期値の制約式: なし

初期値の制約式: 与えられた式

□ 指数 2 のDAE 与えられた式と「**隠れた制約式**」

✗ 初期値の候補

$$\textcircled{1} \quad x_1 + \frac{dx_2}{dt} = 0$$

$$\textcircled{2} \quad -x_1 + \frac{dx_3}{dt} + x_3 = 0$$

$$\textcircled{3} \quad x_2 - x_3 = f(t)$$

$$x_1(0) = 0, x_2(0) = f(0), x_3(0) = 0,$$

$$\frac{dx_1(0)}{dt} = 0, \frac{dx_2(0)}{dt} = 0, \frac{dx_3(0)}{dt} = 0$$

隠れた制約式: $-2x_1 + x_3 = \frac{df(t)}{dt}$

(③の微分 - ① + ②)

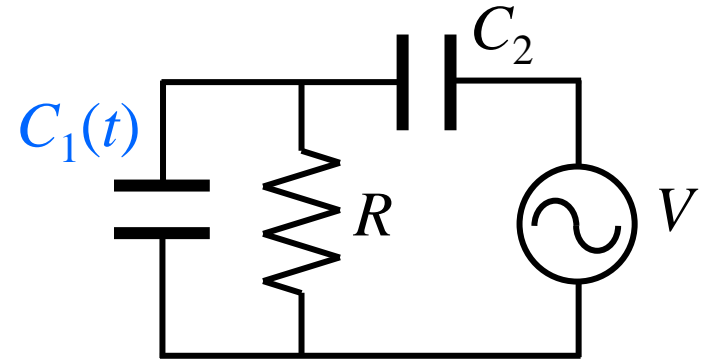
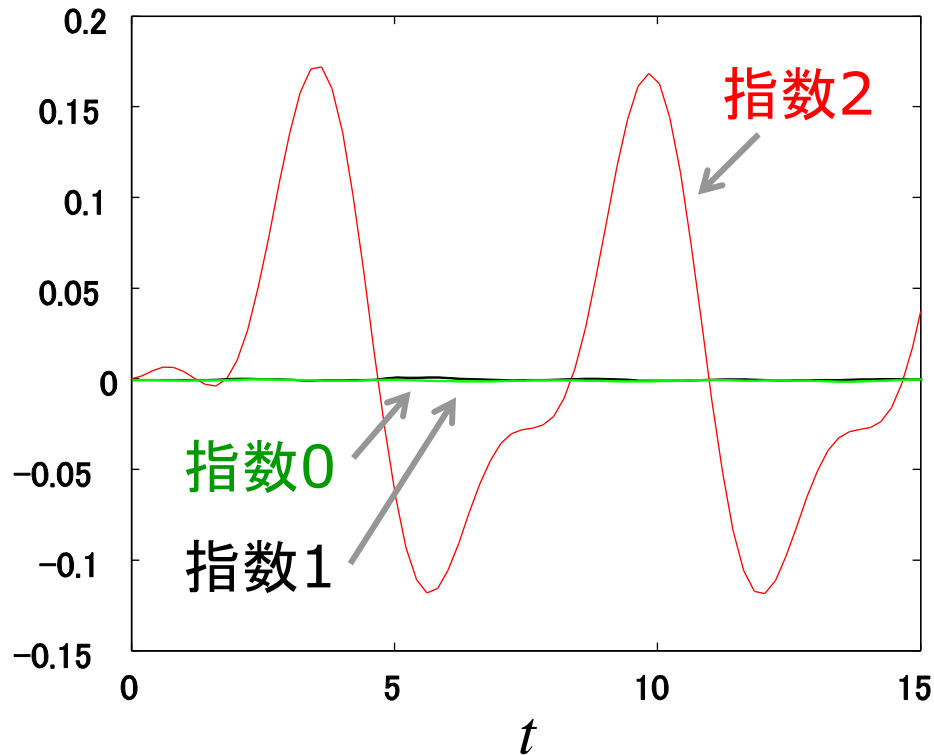
DAEのソルバー (Matlab)

	指数	Matlabのソルバー
常微分方程式	0	ode45, ode23, ode113, ode23s, ode23tb
常微分方程式 + 代数方程式	1	ode15s, ode23t, ode15i
難しさの壁		
	2	
隠れた制約式が存在	3	RADAU5 [Hairer and Wanner 91]
初期値選択が困難	4	指数減少法を適用
	⋮	[Gear 88] [Mattsson and Söderlind 93] [Kunkel and Mehrmann 04]

指数が1以下 → ソルバーの選択肢が増える

数値実験: 指数 2 のDAEは誤差が大きい

C_2 の電圧の誤差



線形時変回路

[Higuera, März, Tischendorf 03]

DAEソルバー
 指数2: RADAU5
 指数0/1: ode15s

目標: 回路を記述する**最小指数**のDAEを求める

発表の流れ

1. イントロダクション
2. 微分代数方程式
 - ✓ 指数の定義
3. 回路シミュレーションの歴史
4. 本研究の成果

様々な指数

- 非線形 時変 DAE $f(t, x, \frac{dx}{dt}) = 0$
 - 微分指数: 常微分方程式への変換に必要な微分の最小回数 [Brenan, Campbell, Petzold 89]
 - 摂動指数: 摂動したときの解の感度を計る尺度 [Hairer, Lubich, Roche 89]
 - 順良指数 (tractability index): 行列で記述できる! [März 92]

必ずしも指数は一致しない

- 定数係数線形 DAE $U \frac{dx(t)}{dt} + Vx(t) = h(t)$ では すべて一致
 - 冪零指数 (Kronecker指数) U, V: 定数行列

回路に現れる非線形時変DAE

$$A \frac{d\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)}{dt} + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = 0$$

Q が射影子 $\Leftrightarrow Q^2 = Q$

定義(順良指数; tractability index) [März 01]

- 指数 0 : H_0 が正則
- 指数 1以下: $\ker H_0$ への射影子 $Q_0(\mathbf{x}, t)$ が存在して $H_1(\mathbf{x}, t)$ が正則
- 指数 2以下: $\ker H_i$ への射影子 $Q_i(\mathbf{x}, t)$ ($i=0, 1$)が存在して
 $H_1(\mathbf{x}, t) + B(\mathbf{x}, t)(I - Q_0(\mathbf{x}, t))Q_1(\mathbf{x}, t)$ が正則

$$H_0(\mathbf{x}, t) = A \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}}, B(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}}, H_1(\mathbf{x}, t) = H_0(\mathbf{x}, t) + B(\mathbf{x}, t)Q_0(\mathbf{x}, t)$$

指数0 \leftrightarrow 常微分方程式

指数1以下 \leftrightarrow $Q_0(\mathbf{x}, t)$ を使うと $\left\{ \begin{array}{l} (I - Q_0)x \text{の常微分方程式} \\ Q_0x \text{の代数方程式} \end{array} \right.$ に分解可能

指数2以下 \leftrightarrow $Q_0(\mathbf{x}, t), Q_1(\mathbf{x}, t)$ を使って同様に分解可能

順良指数の理解(イメージ)

□ 冪零指数の一般化

定数係数線形 DAE $U \frac{dx(t)}{dt} + Vx(t) = h(t)$
 (U, V: 定数行列)

ラプラス変換 ↓

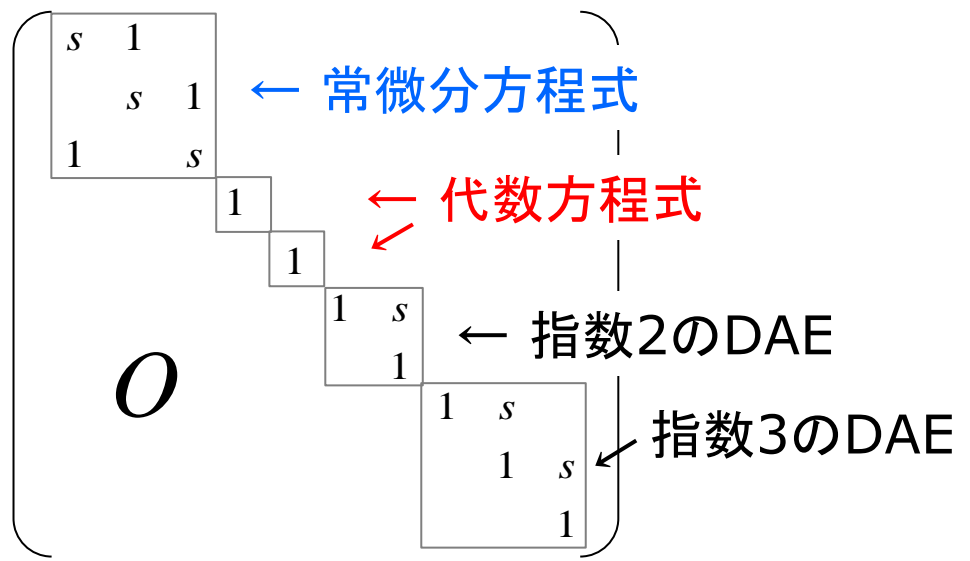
係数行列: $sU + V$

正則変換 ↓

Kronecker標準形

↓

冪零指数 (Kronecker指数)



指数0 ↔ 常微分方程式

指数1以下 ↔ $Q_0(x,t)$ を使うと $\left\{ \begin{array}{l} (I - Q_0)x \text{ の常微分方程式} \\ Q_0x \text{ の代数方程式} \end{array} \right.$ に分解可能

指数2以下 ↔ $Q_0(x,t), Q_1(x,t)$ を使って同様に分解可能

発表の流れ

1. イントロダクション
2. 微分代数方程式
3. 回路シミュレーションの歴史
4. 本研究の成果

歴史的背景

変数の個数**一定**

回路解析法	指定するもの
タブロー解析	なし
修正節点解析	なし
カットセット解析	全域木 T
閉路解析	全域木 T
混合解析 (1939年にKronが提案)	分割 (E_y, E_z) 基準木 T

- 自由度が大きい
- 変数の個数は**変化**

最適モデリングの基準

- 1960年代～[式のサイズを減らしたい] **変数の個数**
 混合解析における最小基本方程式 [甘利 62]
 [岸・梶谷 68], [大附・石崎・渡部 68], [伊理 68]
 → マトロイド理論の応用 [伊理・富澤 75]
- 1970年代～[自動的に式を立てたい] **式の自動生成**
 修正節点解析が主流になる (SPICEに導入)

- 1960年代～[式のサイズを減らしたい] 変数の個数
混合解析における最小基本方程式 [甘利 62]
[岸・梶谷 68], [大附・石崎・渡部 68], [伊理 68]
→ マトロイド理論の応用 [伊理・富澤 75]
- 1970年代～[自動的に式を立てたい] 式の自動生成
修正節点解析が主流になる (SPICEに導入)
- 1980年代～ DAEの研究が盛んになる [数値誤差を減らしたい]

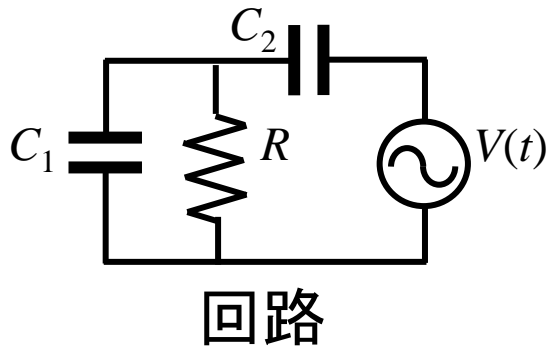
- 1960年代～[式のサイズを減らしたい] 変数の個数
混合解析における最小基本方程式 [甘利 62]
[岸・梶谷 68], [大附・石崎・渡部 68], [伊理 68]
→ マトロイド理論の応用 [伊理・富澤 75]
- 1970年代～[自動的に式を立てたい] 式の自動生成
修正節点解析が主流になる (SPICEに導入)

■ 1980年代～ DAEの研究が盛んになる [数値誤差を減らしたい]

- 1999年以降 修正節点解析から導出されるDAEの解析
[Tischendorf 99], [Estévez, Tischendorf 00],
[Estévez 02], [Encinas, Rianza 08], ...
- 2010年以降 混合解析から導出されるDAEの解析
[岩田, 高松 10], [高松, 岩田 10],
[岩田, 高松, Tischendorf 12], [高松 12+]

本発表: 修正節点解析 vs. 混合解析

回路シミュレーションにおける 数学モデル



DAE (A)
 DAE (B)
 DAE (C)
 ⋮

} 混合解析
 — 修正節点解析

A 指数1

$$Ri_R + v_{C_2} = -V(t)$$

$$-i_R + (C_1 + C_2) \frac{dv_{C_2}}{dt} = -C_1 \frac{dV(t)}{dt}$$

C 指数2

$$i_V - C_2 \frac{du_1}{dt} + C_2 \frac{du_2}{dt} = 0$$

$$(C_1 + C_2) \frac{du_1}{dt} + \frac{1}{R} u_1 - C_2 \frac{du_2}{dt} = 0$$

$$u_2 = V(t)$$

B 指数0

$$(C_1 + C_2) \frac{dv_{C_2}}{dt} + \frac{1}{R} v_{C_2} = -C_1 \frac{dV(t)}{dt} - \frac{1}{R} V(t)$$

- 修正節点解析と混合解析はどちらが優れているか
- 混合解析における指数最小化法の構築

発表の流れ

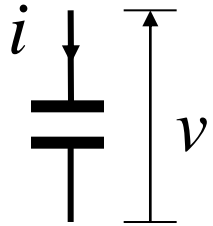
1. イントロダクション
2. 微分代数方程式
3. 回路シミュレーションの歴史
4. 混合解析に関する成果

非線形時変回路

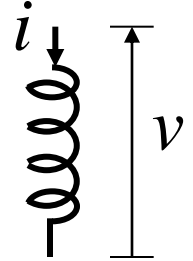
素子特性の式

非線形時変RLC回路

- キャパシタ C

$$i = \frac{d}{dt} q(v, t)$$


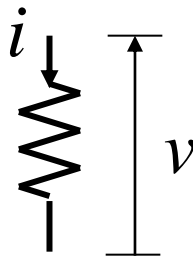
- インダクタ L

$$v = \frac{d}{dt} \phi(i, t)$$


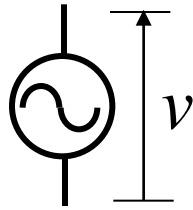
- 抵抗 G/R

$$i = g(v, t)$$

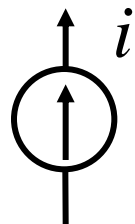
または

$$v = r(i, t)$$


- 独立電圧源 V

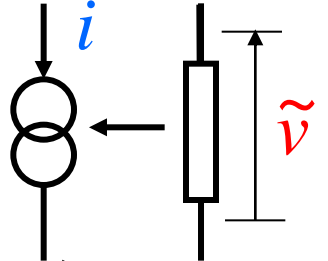
$$v = u_S(t)$$


- 独立電流源 J

$$i = j_S(t)$$


- 従属電源

例) $i = u_V(\tilde{v}, t)$



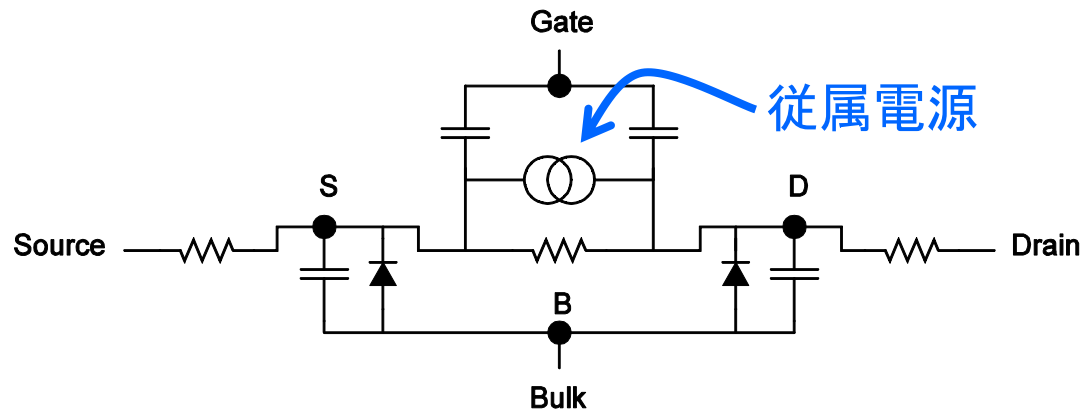
電圧制御電圧源
 電流制御電圧源
 電圧制御電流源

電圧制御電流源

素子特

MOSFETモデル

(Metal-Oxide-Semiconductor Field-Effect Transistor)

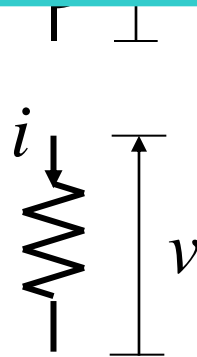


- 抵抗 G/R

$$i = g(v, t)$$

または

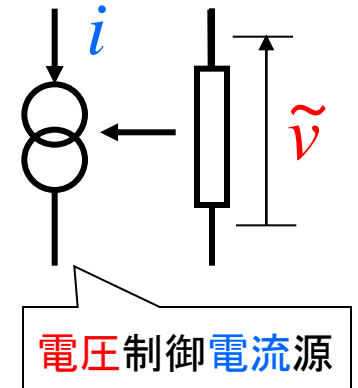
$$v = r(i, t)$$



- 従属電源

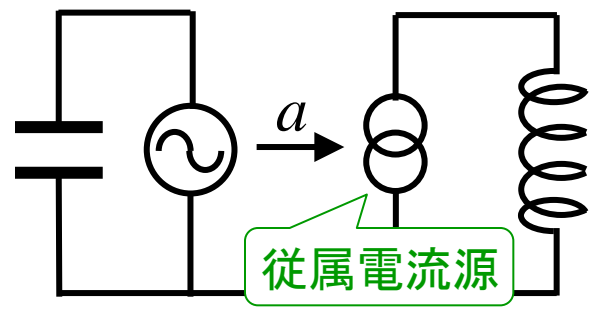
例) $i = u_V(\tilde{v}, t)$

電圧制御電圧源
電流制御電圧源
電圧制御電流源



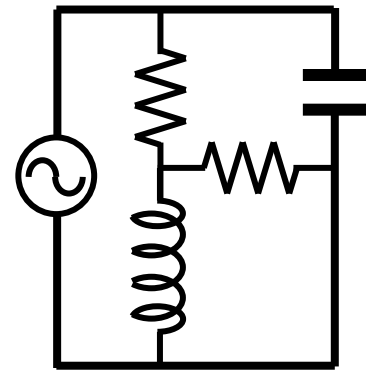
(混合解析の最小指数) < (MNAの指数) の例

MNA: 指数3
混合解析: 指数2

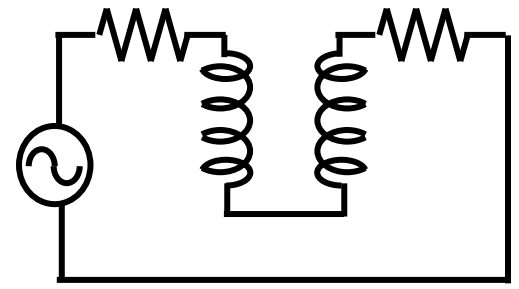


[Günther and Rentrop 96]

MNA: 指数2
混合解析: 指数1



MNA: 指数2
混合解析: 指数0/1

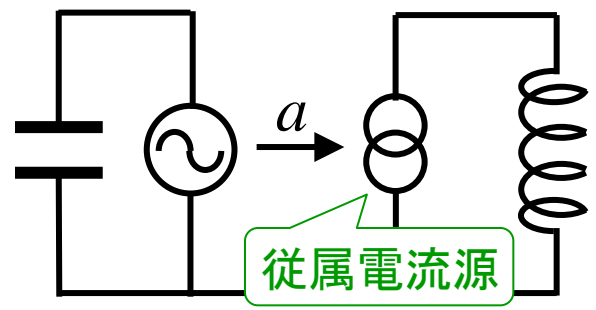


RLC回路

修正節点解析: Modified Nodal Analysis

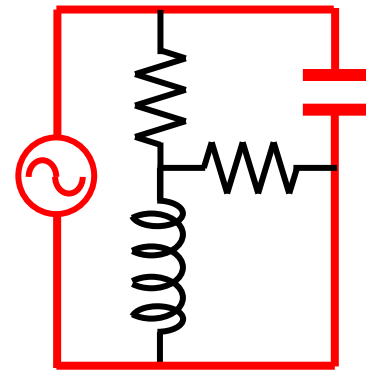
(混合解析の最小指数) < (MNAの指数) の例

MNA: 指数3
混合解析: 指数2

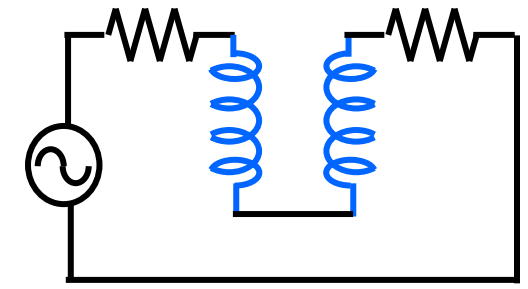


[Günther and Rentrop 96]

MNA: 指数2
混合解析: 指数1



MNA: 指数2
混合解析: 指数0/1



RLC回路

非線形時変RLC回路にMNAを適用 [Estévez, Tischendorf 00]

指数が2 ⇔ C-Vループ または L-Jカットセットが存在

指数が0 ⇔ Vが存在せず Cの全域木が存在

指数が1 ⇔ 指数が0/2以外

修正節点解析 vs. 混合解析

□ (混合解析の最小指数) \leq (MNAの指数) が成立

[岩田, 高松, Tischendorf 12]

非線形時変RLC回路にMNAを適用 [Estévez, Tischendorf 00]

指数が2 \Leftrightarrow C-Vループ または
L-Jカットセットが存在

指数が0 \Leftrightarrow Vが存在せず
Cの全域木が存在

指数が1 \Leftrightarrow 指数が0/2以外

修正節点解析 vs. 混合解析

□ (混合解析の最小指数) \leq (MNAの指数) が成立

[岩田, 高松, Tischendorf 12]

従属電源あり

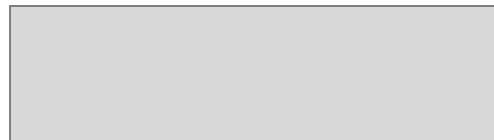
混合解析

~~非線形時変RLC回路にMNAを適用~~

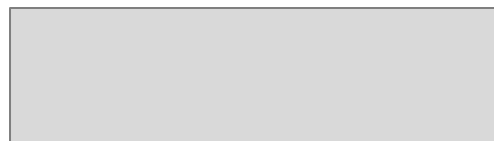
[岩田, 高松, Tischendorf 12]

[高松 12+]

指数が2 \Leftrightarrow



指数が0 \Leftrightarrow



指数が1 \Leftrightarrow



発表の流れ

1. イントロダクション
2. 微分代数方程式
3. 歴史的背景
4. 混合解析に関する成果
 - ✓ 混合解析
 - ✓ 定理の内容

混合解析

□ 素子の分割 (E_y, E_z)

□ 正規基準木 T



混合方程式

変数 $E_y \cap T$ の電圧
 $E_z \cap \bar{T}$ の電流

□ 素子の分割

■ 独立電圧源 V , 独立電流源 J

■ E_y : キャパシタ C , 従属電流源 S_I , 一部の抵抗 (G)

$$\boxed{i} = \frac{d}{dt} q(v, t) \quad \boxed{i} = j_I(i', u') \quad \boxed{i} = g(v, t)$$

■ E_z : インダクタ L , 従属電圧源 S_U , 残りの抵抗 (R)

$$\boxed{v} = \frac{d}{dt} \phi(i, t) \quad \boxed{v} = u_V(i', u') \quad \boxed{v} = r(i, t)$$

□ 正規基準木 T

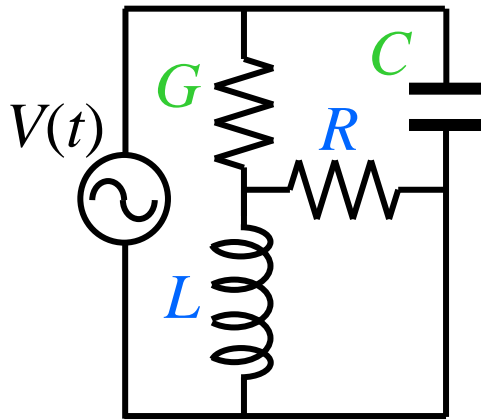
V の枝をすべて含み, C, S_I, G, R, S_U, L の順に枝を優先的に含む全域木

混合解析

- 素子の分割 (E_y, E_z)
- 正規基準木 T

→ 混合方程式

変数 $E_y \cap T$ の電圧
 $E_z \cap \bar{T}$ の電流



変数 v_G, i_L, i_R

混合方程式

【例】 $(E_y, E_z) = (\{C, G\}, \{L, R\})$

$T = \{V, G\}$

→

$$g(v_G) = i_R + i_L$$

$$r(i_R) = v_s(t) + v_G$$

$$\frac{d}{dt} \phi(i_L) = v_s(t) + v_G$$

非線形時変回路: 指数の構造的特徴づけ

\tilde{G} : V と C を縮約・ L と J を除去したグラフ

【仮定】 抵抗: 強受動性・相反性
キャパシタ・インダクタ: 強受動性

与えられた分割 (E_y, E_z) と正規基準木 T に対して

定理1

指数が1以下



\tilde{G} において

- S_U が閉路を含まず
従属電圧源
- S_I がカットセットを含まない
従属電流源

分割と基準木に依存しない

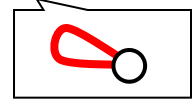
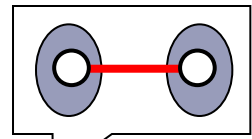
定理2

指数が0

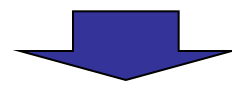


\tilde{G} において

- $S_U \cup R$ がコループからなり
 E_z の抵抗
- $S_I \cup G$ がループからなる
 E_y の抵抗



分割のみに依存



指数0の分割を求めるアルゴリズム

非線形時変RLC回路：指数は1以下

定理1

指数が1以下



\tilde{G} において

- S_U が閉路を含まず
従属電圧源
- S_I がカットセットを含まない
従属電流源

【仮定】 抵抗：強受動性・相反性
キャパシタ・インダクタ：強受動性

(証明) $S_U = \phi, S_I = \phi$

系3

非線形時変RLC回路：

(混合方程式の指数) ≤ 1

非線形時変RLC回路：混合解析の優位性

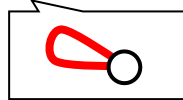
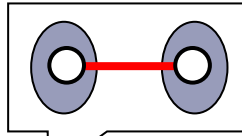
定理2

指数が0



\tilde{G} において

- $S_U \cup R$ がコループからなり
 E_z の抵抗
- $S_I \cup G$ がループからなる
 E_y の抵抗



【仮定】 抵抗：強受動性・相反性
キャパシタ・インダクタ：強受動性

(証明)

「MNAが指数0 \Rightarrow 混合解析も指数0」を示す

MNAが指数0 \Leftrightarrow

Vが存在せず
Cの全域木が存在

[Estévez, Tischendorf 00]

\tilde{G} :

系4

非線形時変RLC回路：

(混合解析の最小指数) \leq (修正節点解析の指数)

➡ 数値計算の観点：混合解析は修正節点解析より優位

発表の流れ

1. イントロダクション
2. 微分代数方程式
3. 回路シミュレーションの歴史
4. 混合解析に関する成果
 - ✓ 混合解析
 - ✓ 定理の内容
 - ✓ **定理1の証明の概略**
 - ・・・線形代数＋グラフ理論
(組合せ的行列理論)

[岩田, 高松, Tischendorf 12]

従属電源あり

定理1: 指数1以下の必要十分条件

定理2: 指数0の必要十分条件

RLC回路

系3: 常に指数1以下

系4: 混合解析はMNAよりよい

混合方程式

定義
$$\left(H(x,t) = A \frac{\partial \mathbf{h}(x,t)}{\partial x}, B(x,t) = \frac{\partial \mathbf{b}(x,t)}{\partial x} \right)$$

指数 1 以下: $H+BQ$ が正則となる $\ker H$ への射影子 $Q(x,t)$ が存在

電流則の係数行列の一部

キャパシタとインダクタの素子特性の式

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -A_{LL}^T & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & Acc & 0 \end{pmatrix}}_A \frac{d}{dt} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \phi^\tau(\cdot) \\ \phi^\lambda(\cdot) \\ \mathbf{q}^\tau(\cdot) \\ \mathbf{q}^\lambda(\cdot) \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{h}(x,t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} -A_{VL}^T \mathbf{v}_s(t) - A_{CL}^T \mathbf{v}_C^\tau - A_{IL}^T \mathbf{v}_I^\tau - A_{GL}^T \mathbf{v}_G^\tau - A_{RL}^T \mathbf{r}^\tau - A_{UL}^T \mathbf{u}_V^\tau \\ -A_{VU}^T \mathbf{v}_s(t) - A_{CU}^T \mathbf{v}_C^\tau - A_{IU}^T \mathbf{v}_I^\tau - A_{GU}^T \mathbf{v}_G^\tau - A_{RU}^T \mathbf{r}^\tau - A_{UU}^T \mathbf{v}_U^\tau + \mathbf{u}_V^\lambda \\ -A_{VR}^T \mathbf{v}_s(t) - A_{CR}^T \mathbf{v}_C^\tau - A_{IR}^T \mathbf{v}_I^\tau - A_{GR}^T \mathbf{v}_G^\tau - A_{RR}^T \mathbf{r}^\tau + \mathbf{r}^\lambda \\ \mathbf{g}^\tau + A_{GG} \mathbf{g}^\lambda + A_{GR} \mathbf{i}_R^\lambda + A_{GU} \mathbf{i}_U^\lambda + A_{GL} \mathbf{i}_L^\lambda + A_{GJ} \mathbf{j}_s(t) \\ \mathbf{j}_I^\tau + A_{II} \mathbf{j}_I^\lambda + A_{IG} \mathbf{g}^\lambda + A_{IR} \mathbf{i}_R^\lambda + A_{IU} \mathbf{i}_U^\lambda + A_{IL} \mathbf{i}_L^\lambda + A_{IJ} \mathbf{j}_s(t) \\ A_{CI} \mathbf{j}_I^\lambda + A_{CG} \mathbf{g}^\lambda + A_{CR} \mathbf{i}_R^\lambda + A_{CU} \mathbf{i}_U^\lambda + A_{CL} \mathbf{i}_L^\lambda + A_{CJ} \mathbf{j}_s(t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}(x,t)} = 0$$

特殊な形の非線形時変 DAE
$$A \frac{d\mathbf{h}(x,t)}{dt} + \mathbf{b}(x,t) = 0$$

指数1以下の証明の概略

$$Q(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

定義 $\left(H(\mathbf{x}, t) = A \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}}, B(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \right)$

指数 1 以下: $H+BQ$ が正則となる $\ker H$ への射影子 $Q(\mathbf{x}, t)$ が存在

$H + BQ$ が正則となる条件

電流則の係数行列の一部

$$\begin{array}{c} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} \mathbf{0} & & -A_{GU}^T & -A_{IU}^T \\ & & -A_{GR}^T & -A_{IR}^T \\ \hline A_{GU} & A_{GR} & & \\ A_{IU} & A_{IR} & & \mathbf{0} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{cc|cc} -A_{RU}^T & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ & I & & \\ \hline \mathbf{0} & & I & A_{GG} \\ & & \mathbf{0} & A_{IG} \end{array} \right) \begin{array}{c} \boxed{\text{コンダクタンス}} \\ \boxed{\text{行列}} \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} A_{RU} & A_{RR} & & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & -I & & \\ \mathbf{0} & & -I & \mathbf{0} \\ & & -A_{GG}^T & -A_{IG}^T \end{array} \right) \\ N(\text{歪対称行列}) \qquad \tilde{A} \qquad -\tilde{A}^T \end{array}$$

証明: 歪対称行列に着目

$$Q(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

定義 $\left(H(\mathbf{x}, t) = A \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}}, B(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \right)$

指数 1 以下: $H + BQ$ が正則となる $\ker H$ への射影子 $Q(\mathbf{x}, t)$ が存在

$H + BQ$ が正則となる条件

→ $N - \tilde{A}$ コンダクタンス
行列 $(-\tilde{A}^T)$ (N : 歪対称行列)

→ $\left(\begin{array}{c|c} \text{逆行列} & -\tilde{A}^T \\ \hline \tilde{A} & N \end{array} \right)$

Schur complement

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & W - ZX^{-1}Y \end{pmatrix}$$

証明: 歪対称行列に着目

$$Q(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

定義 $\left(H(x, t) = A \frac{\partial \mathbf{h}(x, t)}{\partial \mathbf{x}}, B(x, t) = \frac{\partial \mathbf{b}(x, t)}{\partial \mathbf{x}} \right)$

指数 1 以下: $H + BQ$ が正則となる $\ker H$ への射影子 $Q(x, t)$ が存在

$H + BQ$ が正則となる条件

歪対称行列の性質を利用

→ $N - \tilde{A}$ コンダクタンス
行列 $(-\tilde{A}^T)$ (N : 歪対称行列)

→ $\left(\begin{array}{c|c} \text{逆行列} & -\tilde{A}^T \\ \hline \tilde{A} & N \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -\tilde{A}^T \\ \hline \tilde{A} & N \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c|c} \text{逆行列} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$

歪対称行列 行フルランク

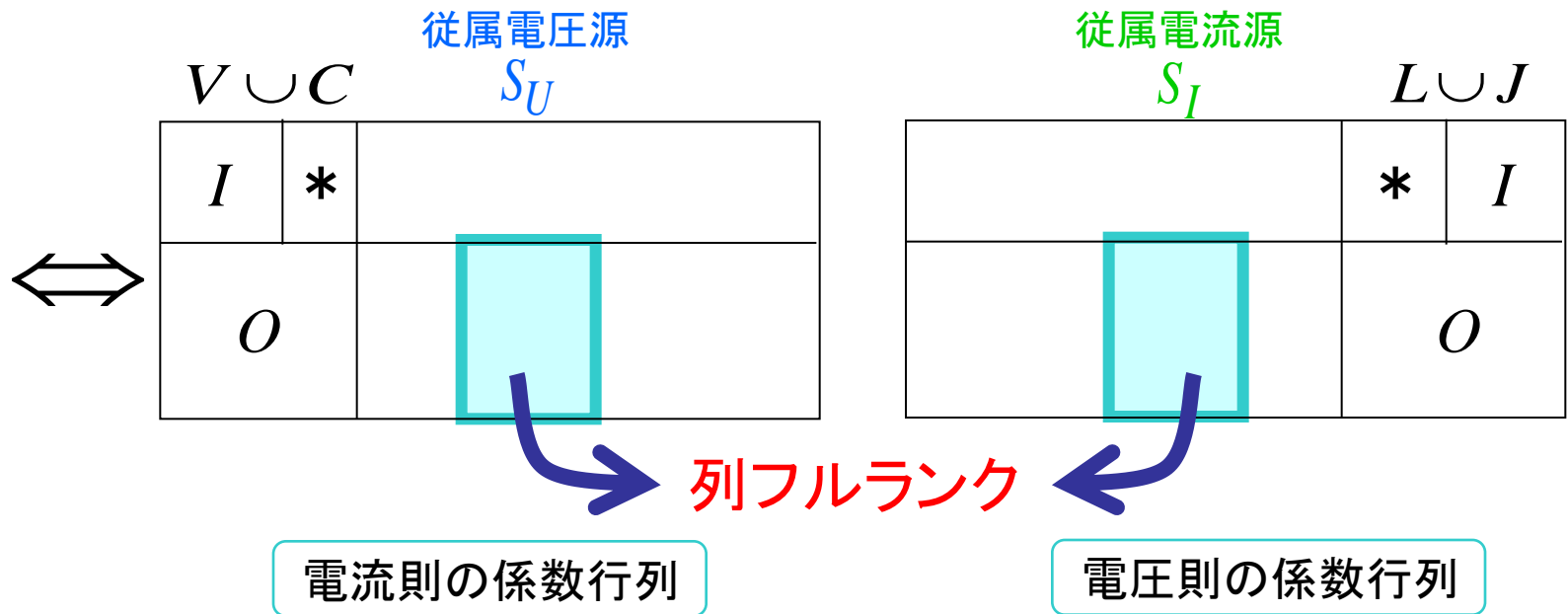
仮定: 正定値対称

指数1以下の特徴付け

対象: **非線形 時変**回路

【仮定】キャパシタンス行列, インダクタンス行列が正定値
コンダクタンス行列が正定値対称

- 分割 (E_y, E_z) と優先基準木 T に対して指数が**1以下**



⇔ V と C を縮約・ L と J を除去したグラフにおいて
 S_U が閉路を含まず, S_I がカットセットを含まない
 従属電圧源 従属電流源

発表の流れ

1. イントロダクション
2. 微分代数方程式
3. 回路シミュレーションの歴史
4. 混合解析に関する成果
 - ✓ 混合解析
 - ✓ 定理の内容
 - ✓ 定理1の証明の概略
 - ・・・線形代数＋グラフ理論
(組合せ的行列理論)
 - ✓ 指数2以下の特徴づけ [高松 12+]

[岩田, 高松, Tischendorf 12]

従属電源あり

定理1: 指数1以下の必要十分条件

定理2: 指数0の必要十分条件

RLC回路

系3: 常に指数1以下

系4: 混合解析はMNAよりよい

指数2以下の特徴づけ

与えられた分割 (E_y, E_z) と優先基準木 T に対して

[岩田, 高松, Tischendorf 12] (再掲)

□ 指数 $\leq 1 \Leftrightarrow$ グラフが CVU閉路 も LJIカットセット も含まない

独立電圧源(V), 従属電圧源(U),
キャパシタ(C)からなる閉路
ただし, 少なくとも1個のUを含む

独立電流源(J), 従属電流源(I),
インダクタ(L)からなるカットセット
ただし, 少なくとも1個のIを含む

[高松 12+]

□ 指数 $\leq 2 \Leftrightarrow$ グラフが VU閉路 も JICットセット も含まない

VとUからなる閉路

JIからなるカットセット

一般的な回路で満たされる条件

➡ 多くの場合, 指数は2以下

指数2以下の特徴づけ

与えられた分割 (E_y, E_z) と優先基準木 T に対して

[岩田, 高松, Tischendorf 12] (再掲)

□ 指数 $\leq 1 \Leftrightarrow$ グラフが CVU閉路 も LJIカットセット も含まない

独立電圧源(V), 従属電圧源(U),
キャパシタ(C)からなる閉路
ただし, 少なくとも1個のUを含む

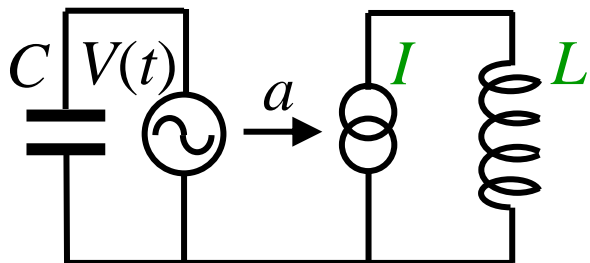
独立電流源(J), 従属電流源(I),
インダクタ(L)からなるカットセット
ただし, 少なくとも1個のIを含む

[高松 12+]

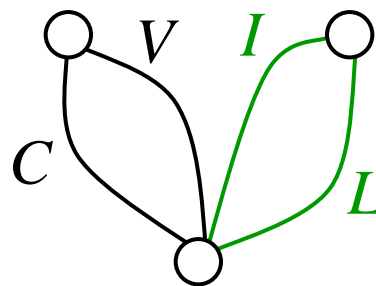
□ 指数 $\leq 2 \Leftrightarrow$ グラフが VU閉路 も JIKットセット も含まない

VとUからなる閉路

JIからなるカットセット



グラフへ



LJIカットセット

↓
指数2

混合方程式

$$H_0(\mathbf{x}, t) = A \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}}, B(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}}$$

電流則の係数行列の一部

キャパシタとインダクタの素子特性の式

$$\begin{pmatrix} 0 & -A_{LL}^T & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & A_{CC} & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 0 \\ \phi^\tau(\cdot) \\ \phi^\lambda(\cdot) \\ \mathbf{q}^\tau(\cdot) \\ \mathbf{q}^\lambda(\cdot) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -A_{VL}^T \mathbf{v}_s(t) - A_{CL}^T \mathbf{v}_C^\tau - A_{IL}^T \mathbf{v}_I^\tau - A_{GL}^T \mathbf{v}_G^\tau - A_{RL}^T \mathbf{r}^\tau - A_{UL}^T \mathbf{u}_V^\tau \\ -A_{VU}^T \mathbf{v}_s(t) - A_{CU}^T \mathbf{v}_C^\tau - A_{IU}^T \mathbf{v}_I^\tau - A_{GU}^T \mathbf{v}_G^\tau - A_{RU}^T \mathbf{r}^\tau - A_{UU}^T \mathbf{v}_U^\tau + \mathbf{u}_V^\lambda \\ -A_{VR}^T \mathbf{v}_s(t) - A_{CR}^T \mathbf{v}_C^\tau - A_{IR}^T \mathbf{v}_I^\tau - A_{GR}^T \mathbf{v}_G^\tau - A_{RR}^T \mathbf{r}^\tau + \mathbf{r}^\lambda \\ \mathbf{g}^\tau + A_{GG} \mathbf{g}^\lambda + A_{GR} \mathbf{i}_R^\lambda + A_{GU} \mathbf{i}_U^\lambda + A_{GL} \mathbf{i}_L^\lambda + A_{GJ} \mathbf{j}_s(t) \\ \mathbf{j}_I^\tau + A_{II} \mathbf{j}_I^\lambda + A_{IG} \mathbf{g}^\lambda + A_{IR} \mathbf{i}_R^\lambda + A_{IU} \mathbf{i}_U^\lambda + A_{IL} \mathbf{i}_L^\lambda + A_{IJ} \mathbf{j}_s(t) \\ A_{CI} \mathbf{j}_I^\lambda + A_{CG} \mathbf{g}^\lambda + A_{CR} \mathbf{i}_R^\lambda + A_{CU} \mathbf{i}_U^\lambda + A_{CL} \mathbf{i}_L^\lambda + A_{CJ} \mathbf{j}_s(t) \end{pmatrix} = 0$$

A

$\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$

$\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$

特殊な形の非線形時変 DAE $A \frac{d}{dt} \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = 0$

順良指数が2以下の定義

$\text{Ker } H_i$ への射影子 $Q_i(\mathbf{x}, t)$ ($i=0,1$) が存在して

$H_1(\mathbf{x}, t) + B(\mathbf{x}, t)(I - Q_0(\mathbf{x}, t))Q_1(\mathbf{x}, t)$ が正則

ただし, $H_1(\mathbf{x}, t) = H_0(\mathbf{x}, t) + B(\mathbf{x}, t)Q_0(\mathbf{x}, t)$

$H_1(\mathbf{x}, t) + B(\mathbf{x}, t)(I - Q_0(\mathbf{x}, t))Q_1(\mathbf{x}, t)$ の計算

$$\begin{aligned}
 & A_0 && A_i: \text{定数行列} \\
 & + A_1 (\text{抵抗のヤコビ行列}) A_1^T \\
 & + A_1 (\text{抵抗のヤコビ行列}) (\text{キャパシタ, インダクタ, 射影子}) \\
 & + (\text{キャパシタ, インダクタ, 射影子}) \\
 & + A_2 (\text{従属電源のヤコビ行列}) (\text{キャパシタ, インダクタ, 射影子})
 \end{aligned}$$

証明の概略

全体が正則 \Leftrightarrow 指数 ≤ 2

\Downarrow \Uparrow
従属電源のヤコビ行列の成分が独立パラメータ

が正則 \Leftrightarrow グラフが **VU閉路** も **JIカットセット** も含まない

まとめ

非線形 時変 回路

【仮定】 抵抗: 強受動性・相反性
 キャパシタ・インダクタ: 強受動性

[岩田, 高松, Tischendorf 12]
 [高松 12+]

- ✓ 混合解析における指数 0/1/2 の回路構造による特徴づけ
- ✓ 修正節点解析に対する優位性の証明

線形 時不変 回路 ← 付値マトロイド理論を利用

- ✓ 指数最小化法 [岩田, 高松 10]
- ✓ 修正節点解析に対する優位性の証明 [高松, 岩田 10]

- 「最適化の視点」を回路や数値解析の分野の問題に**広げた**
- 線形回路から始めて非線形回路まで**広げた**

広がっていく最適化