

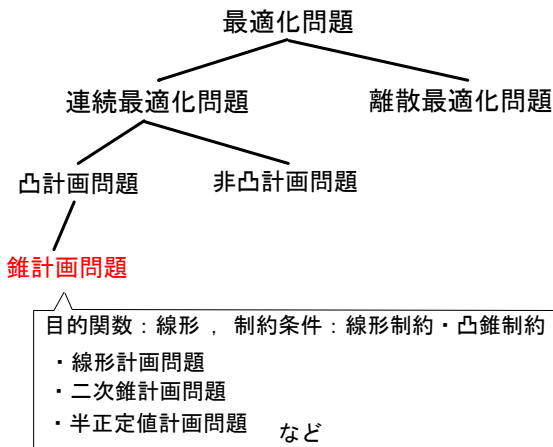
# 非負半正定値錐上の最適化問題とその周辺

松川恭明，吉瀬章子

筑波大学システム情報工学研究科，  
筑波大学システム情報系

最適化ワークショップ: 広がっていく最適化 @九州大学 2/18-19, 2013

# 錐計画問題の位置づけ



集合  $\mathcal{K}$  が

$$\forall x \in \mathcal{K}, \forall \alpha \geq 0, \alpha x \in \mathcal{K}$$

をみたすとき,  $\mathcal{K}$  を錐とよぶ.

## Proper Cone

錐  $\mathcal{K}$  が

- 閉凸
- 内部が非空
- $x, -x \in \mathcal{K} \implies x = 0$

を満たすとき, 錐  $\mathcal{K}$  を proper cone とよぶ.

proper cone 上での最適化問題を扱う.

# 錐計画問題

集合  $\mathcal{K}$  が

$$\forall x \in \mathcal{K}, \forall \alpha \geq 0, \alpha x \in \mathcal{K}$$

をみたすとき,  $\mathcal{K}$  を錐 (cone) とよぶ.

- proper cone (= 閉凸, 非空, 直線を含まない 錐)  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$
- $\mathbb{R}^n$  上の内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
- 線形写像  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
- ベクトル  $b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$

を用いて, 錐最適化問題は以下に与えられる.

## 錐計画問題 (主問題)

$$\begin{array}{|l} \min & \langle c, x \rangle \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \in \mathcal{K} \end{array}$$

# 双対錐と双対問題

錐  $\mathcal{K}$  の双対錐  $\mathcal{K}^*$  を以下で与える.

$$\mathcal{K}^* := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall y \in \mathcal{K}, \langle x, y \rangle \geq 0\}$$

ここで,  $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$  上の内積を用いた関係式

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$$

を満たす  $A$  の随伴写像  $A^*$  を用いて,  
錐計画問題の主問題と, その双対問題は以下に与えられる.

## 錐計画問題 (主問題, 双対問題)

$$\begin{array}{ll} \min & \langle c, x \rangle \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \in \mathcal{K} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \max & \langle b, y \rangle \\ \text{s.t.} & A^*y + s = c \\ & s \in \mathcal{K}^* \end{array}$$

# 錐計画問題の具体例 1: 線形計画問題

非負象限  $\mathbb{R}_n^+$  を次に与える.

$$\mathbb{R}_n^+ := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0\}$$

- $\mathbb{R}_n^+$  は proper cone
- $\mathbb{R}_n^+$  は自己双対性  $(\mathbb{R}_n^+)^* = \mathbb{R}_n^+$  を持つ

## 線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \in \mathbb{R}_n^+ \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y + s = c \\ & s \in \mathbb{R}_n^+ \end{array}$$

## 錐計画問題の具体例 2: 半正定値計画問題

半正定値錐  $S_n^+$  を次に与える.

$$S_n^+ := \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid X = X^T, \forall d \in \mathbb{R}^n, d^T X d \geq 0\}$$

- $S_n^+$  は proper cone
- $S_n^+$  は自己双対性  $(S_n^+)^* = S_n^+$  を持つ

### 半正定値計画問題

$$\begin{array}{ll} \min & \text{Tr}(CX) \\ \text{s.t.} & \text{Tr}(A_i X) = b_i \quad (i = 1, \dots, m) \\ & X \in S_n^+ \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^m y_i A_i + S = C \\ & S \in S_n^+ \end{array}$$

## 錐計画問題の具体例 2: 半正定値計画問題

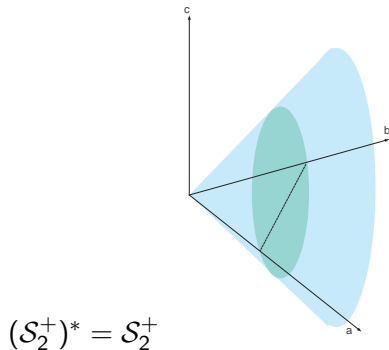
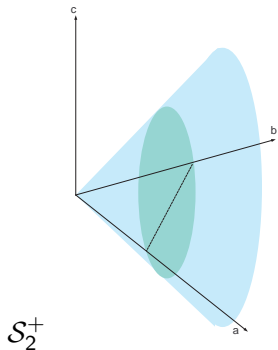
- 主双対内点法を用いて効率良く  $\epsilon$  最適解を求めることができる
- 半正定値緩和としての応用例
  - Goemans and Williamson(1994) の 最大カット問題に対する .878 近似



# 半正定値錐 $\mathcal{S}_2^+$

$X \in \mathcal{S}^+ \iff X$  のすべての主小行列式が非負

$$\mathcal{S}_2^+ = \left\{ \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \mid a \geq 0, b \geq 0, ab - c^2 \geq 0 \right\}$$



# 注目をあびる非対称錐

組合せ最適化問題と錐最適化問題の関連を考える上で、半正定値錐と関連が深いいくつかの錐が注目をあびている。

- 共正値錐 (copositive cone)
- 完全正値錐 (completely positive cone)
- 非負半正定値錐 (doubly nonnegative cone)

## 共正值錐 $\mathcal{C}$ , 完全正值錐 $\mathcal{C}^*$

$$\mathcal{S}_n^+ := \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid X = X^T, \forall d \in \mathbb{R}^n, d^T X d \geq 0\}$$

### 共正值錐 $\mathcal{C}$ , 完全正值錐 $\mathcal{C}^*$ の定義

共正值錐  $\mathcal{C}_n := \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid X = X^T, \forall d \in \mathbb{R}_n^+, d^T X d \geq 0\}$

完全正值錐  $\mathcal{C}_n^* := \text{con}\{xx^T \mid x \in \mathbb{R}_n^+\}$

ここで,  $\text{con}S$  は  $S$  の凸包を表す

### 共正值錐 $\mathcal{C}$ , 完全正值錐 $\mathcal{C}^*$ の性質

- $\mathcal{C}_n, \mathcal{C}_n^*$  は proper cone
- $\mathcal{C}_n^* \subseteq \mathcal{S}_n^+ \subseteq \mathcal{C}_n$
- 共正值錐  $\mathcal{C}$ , 完全正值錐  $\mathcal{C}^*$  は互いに, 他方に対する双対錐

# 非負半正定値錐 (Doubly nonnegative cone)

$n$  次非負対称行列  $\mathcal{N}_n := \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \forall i, j, x_{ij} \geq 0\}$

## 非負半正定値錐の定義

$$\mathcal{D}_n := \mathcal{S}_n^+ \cap \mathcal{N}_n$$

## 非負半正定値錐 $\mathcal{D}_n$ の性質

- $\mathcal{D}_n$  は proper cone
- $\mathcal{C}_n^* \subseteq \mathcal{D}_n \subseteq \mathcal{S}_n^+$
- $n \leq 4 \implies \mathcal{C}_n^* = \mathcal{D}_n$  [Berman and Monderer 2003]
- $X \in \mathcal{D}_n$  であるかの判定が容易
- $\mathcal{D}_n = \mathcal{S}_n^+ \cap \mathcal{N}_n$  は半正定値表現が可能

$$X \in \mathcal{D}_n \iff \begin{bmatrix} X & O \\ O & \text{Diag}(\text{vec}(X)) \end{bmatrix} \in \mathcal{S}_+^{n+n^2}$$

# 非負半正定値錐 $\mathcal{D}$ に対する双対錐

## $\mathcal{D}_n$ の双対錐

$$\mathcal{D}_n^* = \mathcal{S}_n^+ + \mathcal{N}_n$$

$\mathcal{C}_n^* \subseteq \mathcal{D}_n \subseteq \mathcal{S}_n^+$  より,

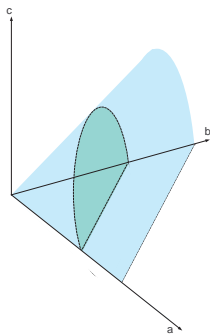
## 錐の包含関係

$$\mathcal{C}_n^* \subseteq \mathcal{D}_n \subseteq \mathcal{S}_n^+ \subseteq \mathcal{D}_n^* \subseteq \mathcal{C}_n$$

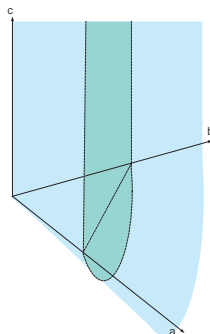
# 小さい次元での錐

If  $n \leq 4$

$$\mathcal{C}_n^* = \mathcal{D}_n \subseteq \mathcal{S}_n^+ \subseteq \mathcal{D}_n^* = \mathcal{C}_n$$



$$\mathcal{C}_2^* = \mathcal{D}_2 = \mathcal{S}_2^+ \cap \mathcal{N}_2$$



$$\mathcal{S}_2^+ + \mathcal{N}_2 = \mathcal{D}_2^* = \mathcal{C}_2$$

## 半正定値緩和の例

A simple case:  $Q$  is an  $n \times n$  matrix,  $e = (1, 1, \dots, 1)^T$ ,  $E = ee^T$

$$\begin{aligned} \text{(QP)} \quad & \min \quad x^T Q x \\ & \text{s.t.} \quad e^T x = 1 \\ & \quad \quad x \geq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iff & \min \quad \langle Q, xx^T \rangle \\ & \text{s.t.} \quad \langle E, xx^T \rangle = 1 \\ & \quad \quad x \geq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iff & \min \quad \langle Q, X \rangle \\ & \text{s.t.} \quad \langle E, X \rangle = 1 \\ & \quad \quad X = xx^T, \quad x \geq 0, \end{aligned}$$

(SDP relax)

$$\begin{aligned} \implies & \min \quad \langle Q, X \rangle \\ & \text{s.t.} \quad \langle E, X \rangle = 1 \\ & \quad \quad X \in \mathcal{S}_+^n \end{aligned}$$

## $C^*$ と一般的な 0-1 混合整数二次計画問題との関係

A simple case:  $Q$  is an  $n \times n$  matrix,  $e = (1, 1, \dots, 1)^T$ ,  $E = ee^T$

$$\begin{aligned} \text{(QP)} \quad & \min \quad x^T Q x \\ & \text{s.t.} \quad e^T x = 1 \\ & \quad \quad x \geq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iff & \min \quad \langle Q, xx^T \rangle \\ & \text{s.t.} \quad \langle E, xx^T \rangle = 1 \\ & \quad \quad x \geq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iff & \min \quad \langle Q, X \rangle \\ & \text{s.t.} \quad \langle E, X \rangle = 1 \\ & \quad \quad X = xx^T, \quad x \geq 0, \end{aligned}$$

(CP relax)

$$\begin{aligned} \implies & \min \quad \langle Q, X \rangle \\ & \text{s.t.} \quad \langle E, X \rangle = 1 \\ & \quad \quad X \in C_n^* := \text{con}\{xx^T \mid x \in \mathbb{R}_+^n\} \end{aligned}$$



# $C^*$ と一般的な 0-1 混合整数二次計画問題との関係

$Q$  is an  $n \times n$  matrix,  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $B \subseteq \{1, \dots, n\}$  and  $M = \{1, \dots, m\}$

$$(QP) \left\{ \begin{array}{l} \min \quad x^T Q x + 2c^T x \\ \text{s.t.} \quad a_i^T x = b_i \quad \forall i \in M \\ x \geq 0 \\ x_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in B \end{array} \right. (R) \left\{ \begin{array}{l} \min \quad \langle Q, X \rangle + 2c^T x \\ \text{s.t.} \quad a_i^T x = b_i \quad \forall i \in M \\ a_i^T X a_i = b_i^2 \quad \forall i \in M \\ x_j = X_{jj} \quad \forall j \in B \\ \begin{pmatrix} 1 & x^T \\ x & X \end{pmatrix} \in C_{1+n}^* \end{array} \right.$$

## Theorem [Burer 2009]

- $(QP)$  の許容解集合の凸包 =  $(R)$  の許容解集合
- $(QP)$  の最適値 =  $(R)$  の最適値

# 共正值錐 $\mathcal{C}$ , 完全正值錐 $\mathcal{C}^*$ の判定

$\mathcal{C}, \mathcal{C}^*$  上の最適化問題の難しさ

## 判定の困難性

- $X \in \mathcal{C}_n$  であるか否かの判定は co-NP 完全 [Murty and Kabadi 1987]
- $X \in \mathcal{C}_n^*$  であるか否かの判定は NP 困難 [Dickinson and Gijben 2011]

$\mathcal{C}$  に対しては, 錐の近似による解法 [Bundfuss and Dür 2009]  
( $\mathcal{C}$  を近似した錐上での最適化問題 (LP) を繰り返し解く)

$\mathcal{C}_n^*$  の近似  $\rightarrow$  非負半正定値錐

# 非負半正定値緩和

- general QP  
↓ 最小凸緩和 (最適値は一致)
- $C_n^*$  上の最適化問題  
↓ 解くことができる凸計画問題への緩和
- $\mathcal{D}_n$  上の最適化問題

半正定値行列表現が可能という性質を利用して、**非負半正定値緩和**の効果を確認した。

- 二次割当問題 (QAP) に対する非負半正定値緩和  
[Povh and Rendl 2005]
- 非負半正定値緩和問題を半正定値計画問題として表現
- 使用ソルバ: SeDuMi , SDPA online solver

## 非負半正定値緩和:実験結果

- 非負半正定値緩和は最適値に対し **95%** 以上の精度の値を得た。  
(半正定値緩和はおよそ 80% から 95% の精度)
- ある種類のインスタンスにおいては,  
緩和解からほぼ最適解 (の凸結合) が抽出できる.

nug5 の最適解  $X^*$  と緩和問題の解から抽出を行った近似解  $\tilde{X}$  の比較

$$X^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{X} = \begin{bmatrix} 0 & .499 & .499 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .999 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .999 \\ .999 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .499 & .499 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## 非負半正定値緩和:実験結果

- 非負半正定値緩和により強力な下界値を得ることができた
- いくつかの問題では, 緩和解からほぼ最適解を抽出可能であった
- 一方で, 莫大な計算時間が必要である  
 $n = 12 \rightarrow 25$  分,  $n = 15 \rightarrow 6$  時間.  
非負半正定値計画問題を半正定値計画問題へ変換しているため.

$$X \in \mathcal{D}_n \iff \begin{bmatrix} X & O \\ O & \text{Diag}(\text{vec}(X)) \end{bmatrix} \in \mathcal{S}_+^{n+n^2}$$

非負半正定値計画問題を **直接** 解くことは可能か?

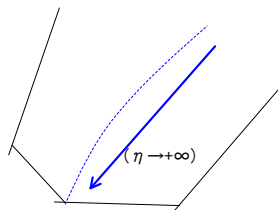
# 障壁関数と内点法

$f$  を錐  $\mathcal{K}$  に対する障壁関数とする

障壁関数によって重みつけた問題

$$\begin{array}{|l} \min & f_\eta(x) := \eta \langle c, x \rangle + f(x) \\ \text{s.t.} & Ax = b \end{array}$$

この問題を最小化する点  $z(\eta)$  の集合  $\{z(\eta) \mid \eta > 0\}$  を中心パスとよぶ  
各  $f_\eta$  を小さくする点列を生成.  $\eta$  を大きくしていき, 中心パスを追跡



# 自己整合障壁関数:記号の導入

自己整合性を定義するために,いくつかの記号を導入する.

- $D_f$ : 関数  $f$  の定義域
- $g(x)$ :  $f$  の  $x$  における勾配
- $H(x)$ :  $f$  の  $x$  におけるヘシアン

本発表では,  $f$  は以下の性質 1 を満たすとする.

## 性質 1

$f$  の定義域  $D_f$  が開凸集合 かつ  $f \in \mathcal{C}^2$  かつ

$\forall x \in D_f, H(x)$  が正定値行列

$H(x)$  を用いた内積と, それより導かれるノルムを定義する.

$$\langle u, v \rangle_x := \langle u, H(x)v \rangle, \quad \|u\|_x := \sqrt{\langle u, u \rangle_x}$$

ノルム  $\|\cdot\|_x$  を用いて, 開球  $B$  を定義する.

$$B_x(x, 1) := \{y \mid \|y - x\|_x < 1\}$$



# 自己整合関数

$$\langle u, v \rangle_x := \langle u, H(x)v \rangle, \quad \|u\|_x := \sqrt{\langle u, u \rangle_x}$$

## 自己整合関数の定義 [Renegar 2001]

性質 1 を満たす  $f$  が以下の二つの条件を満たすとき,  $f$  を自己整合関数であるという.

- $x \in D_f$  ならば

$$B_x(x, 1) := \{y \mid \|y - x\|_x < 1\} \subseteq D_f$$

- $y \in B_x(x, 1)$  ならば

$$1 - \|y - x\|_x \leq \frac{\|v\|_y}{\|v\|_x} \leq \frac{1}{1 - \|y - x\|_x} \quad \text{for all } v \neq 0$$

# 自己積分関数の性質

$f$  が自己積分関数である場合、例えば  $f$  は以下を満たす。

## 二次近似との誤差の上界 [Rengear 2001]

$f$  が自己積分関数 かつ  $x \in D_f$  かつ  $y \in B_x(x, 1)$  ならば

$$|f(y) - q_x(y)| \leq \frac{\|y - x\|_x^3}{3(1 - \|y - x\|_x)}$$

ここで、 $q_x(y)$  は  $f(y)$  を  $x$  において二次近似した値で、以下で与えられる。

$$q_x(y) := f(x) + \langle g(x), (y - x) \rangle + \frac{1}{2} \langle (y - x), H(x)(y - x) \rangle$$

$f$  が自己積分関数である場合には、この他にも、Newton 法を動かす際に都合のよい性質がいくつか成立する。

# 自己整合障壁関数

続いて, 自己整合関数の複雑度を定義する.

そのために,  $f$  の  $x$  における Newton 方向を  $n(x)$  を用いる.

$$n(x) := -H(x)^{-1}g(x).$$

## Definition (自己整合障壁関数)

自己整合関数  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  について,  $f$  の複雑度  $\vartheta_f$  を以下に定義する.

$$\vartheta_f := \sup_{x \in D_f} \|n(x)\|_x^2.$$

自己整合関数  $f$  が  $\vartheta_f < +\infty$  を満たすとき,  $f$  を自己整合障壁関数とよぶ.

# 錐内部上で定義される自己整合障壁関数

	$C_n^*$	$\mathcal{D}_n$	$S_n^+$	$\mathcal{D}_n^*$	$C_n$
自己整合障壁関数	???	○	○	???	???

- $\text{int } S_n^+$  上の自己整合障壁関数は  $-\log \det X$
- $\text{int } \mathbb{R}_n^+$  上の自己整合障壁関数は  $-\sum_{j=1}^n \log x_j$

$\text{int } \mathcal{D}_n$  上の自己整合障壁関数は

$$f(X) := -\log \det X - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \log x_{ij}$$

が知られている。

以降では,  $\mathcal{D}_n$  に限らず,  
錐の内部での自己整合障壁関数が明らかな場合の  
錐最適化問題に対する障壁関数法について説明する。

# 対象とする問題

閉凸錐  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  について,

- $\text{int}\mathcal{K}$  上の自己整合障壁関数  $f$  が既知
- $\mathcal{K}$  は対称錐でなくともよい

## 対象とする問題

$$(P) \quad \begin{array}{l|l} \min & \langle c, x \rangle \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \in \mathcal{K} \end{array}$$

ここで,

- 許容内点が得られていなくともよい
- $\mathcal{K}$  の双対錐  $\mathcal{K}^*$  が陽に与えられていない, もしくは,  
要素が双対錐  $\mathcal{K}^*$  に含まれるかの判定が容易でなくともよい

とする.

## 対象とする問題

$$\begin{array}{ll} \min & \langle c, x \rangle \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \in \mathcal{K} \end{array}$$

ここで,

- 許容内点が得られていなくともよい
- $\mathcal{K}$  の双対錐  $\mathcal{K}^*$  が陽に与えられていない, もしくは, 要素が双対錐  $\mathcal{K}^*$  に含まれるかの判定が容易でなくともよいとする.

## 先行研究

Renegar(2001): 許容内点が既知

Nesterov(2006): 許容内点が既知,  $\text{int}\mathcal{K}^*$  上の障壁関数が利用可能

Skajaa(2011): 要素が双対錐  $\mathcal{K}^*$  に含まれるかの判定が容易

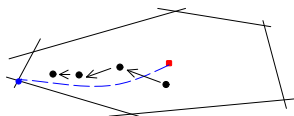
非許容な初期内点から, 許容性の改善, 中心パスの追跡の両方を行う.

- 二段階アルゴリズム (フェイズIアルゴリズム+主内点法)
- 非許容型主障壁関数法

# 二段階アルゴリズム

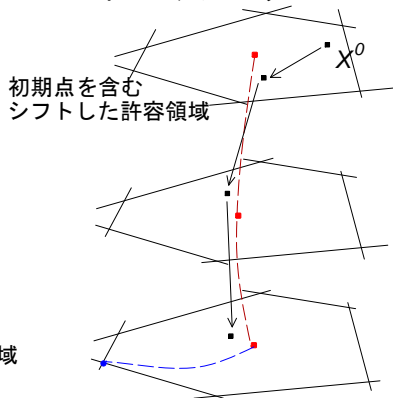
フェイズIでは,  $f_\eta(x) := \eta \langle c, x \rangle + f(x)$  について,  $\eta = 0$  とする.

主内点法



元問題の許容領域

フェイズIアルゴリズム





## 二段階アルゴリズム

### Definition (中心化ステップ と 許容化ステップ)

- **中心化ステップ** : 点の更新に Newton 方向  $\bar{n}(x)$  を用いる.  
 $\bar{n}(x)$  は以下の方程式系の唯一の解

$$H(x)\bar{n}(x) + g(x) = A^*y, \quad A\bar{n}(x) = 0$$

- **許容化ステップ** : 点の更新に シフトした Newton 方向  $\bar{n}^r(x)$  を用いる.  
 $\bar{n}^r(x)$  は以下の方程式系の唯一の解

$$H(x)\bar{n}^r(x) + g(x) = A^*y, \quad A\bar{n}^r(x) = -r \quad (r := Ax - b)$$

$$A(x + \alpha\bar{n}^r(x)) - b = (Ax - b) + \alpha A\bar{n}^r(x) = (1 - \alpha)r.$$

## 二種類の探索方向の使い分け

- $r_0 := Ax^0 - b$  (初期残差ベクトル)
- $S_\gamma := \{x \in \text{int}K \mid Ax - b = \gamma r_0\}$  (シフトした許容領域の内部)

$S_\gamma$  上で,  $f$  を最小化する点が存在するとき,  
その点を解析的中心  $z(\gamma)$  とよぶ.

解析的中心  $z(\gamma)$  が存在するとき,  $\bar{n}(z(\gamma)) = 0$  を満たす.

### 解析的中心の近傍

以下で  $S_\gamma$  での解析的中心の近傍を定義する.

$$\{x \in S_\gamma \mid \|\bar{n}(x)\|_x := \langle \bar{n}(x), H(x)\bar{n}(x) \rangle \leq 1\}$$

## 二種類の探索方向の使い分け

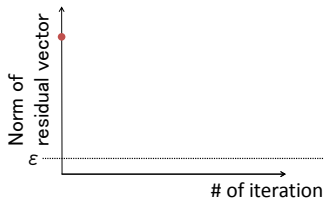
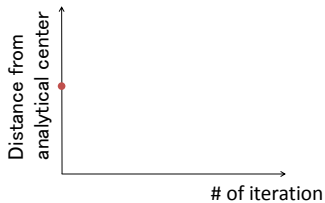
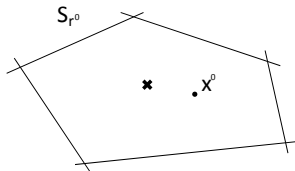
現在の点  $x$  が  $S_\gamma$  での解析的中心の近傍内である場合,  
 $\bar{n}^r(x)$  によって点の更新を行う. (  $\rightarrow$  許容性を改善する)

そうでない場合,  
 $\bar{n}(x)$  によって点の更新を行う. (  $\rightarrow$  解析的中心へ近づける)

これらの操作を繰り返すことで,  
解析的中心のパスを許容性を改善する方向へ追跡

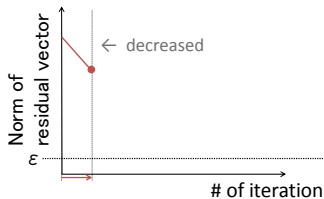
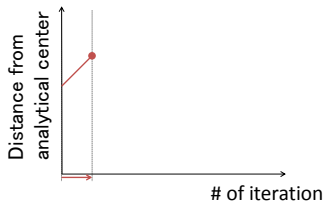
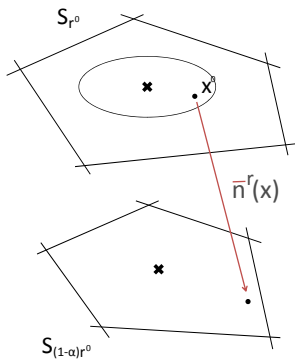
# フェイズIアルゴリズムの概略 (1/4)

初期点  $x^0 \in \text{int}K$  を選ぶ.



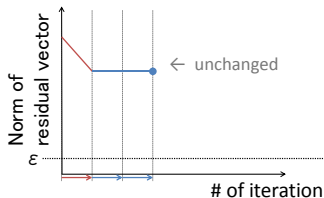
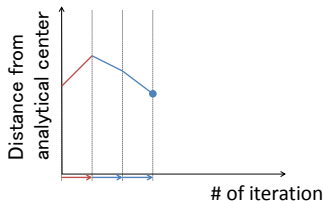
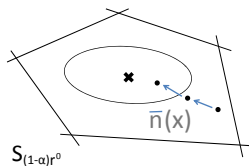
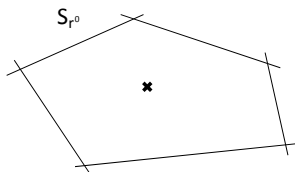
## フェイズIアルゴリズムの概略 : 許容性ステップ (2/4)

$\| \bar{n}(x) \|_x < 1$  ( $x$  が  $S_r$  での解析的中心の近傍内) であるならば,  
 $x \leftarrow x + \alpha \bar{n}^r(x)$  と現在の点を更新する.



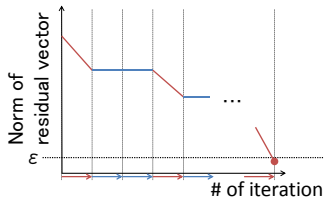
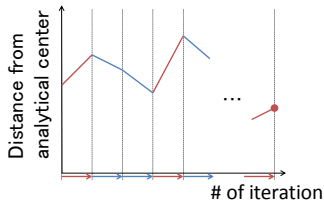
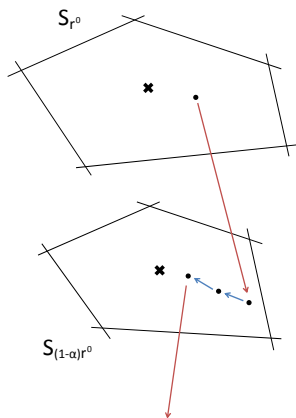
# フェイズIアルゴリズムの概略 : 中心化ステップ (3/4)

$\| \bar{n}(x) \|_x \geq 1$  ( $x$  が  $S_r$  での解析的中心の近傍に属していない) ならば,  $x \leftarrow x + \alpha \bar{n}(x)$  と現在の点を更新する.



# フェイズIアルゴリズムの概略 (4/4)

これらの更新を繰り返し、 $\|r\| \leq \varepsilon$  ならば  $\varepsilon$  許容解が得られたとしてアルゴリズムを停止させる。



## 主障壁関数フェイズ | アルゴリズム

- step 0 初期点  $x^0 \in \text{int}K$  と精度パラメータ  $\varepsilon > 0$  の設定
- step 1  $\| \bar{n}(x) \|_x < 1$  かつ  $\| r \| \leq \varepsilon$  である場合, 停止.
- step 2 (許容性ステップ)  $\| \bar{n}(x) \|_x < 1$  かつ  $\| r \| > \varepsilon$  である場合  
許容性ステップへ進む. その後, step 1 へ戻る.
- step 3 (中心化ステップ)  $\| \bar{n}(x) \|_x \geq 1$  である場合,  
 $\| \bar{n}(x) \|_x \geq 1$  となるまで 中心化ステップへ進む.  
その後, step 1 へ戻る.



# アルゴリズムの計算量導出のための仮定

- $r_0 := Ax^0 - b$  (初期残差ベクトル)
- $S_\gamma := \{x \in \text{int}K \mid Ax - b = \gamma r_0\}$  (シフトした許容領域の内部)

仮定 1(シフトした許容領域の内部に関する仮定)

$S_1$  が有界である.

# 主障壁関数フェイズ | アルゴリズムの計算量

- $\delta$ : 元問題の許容性に関するパラメータ
- $\vartheta_f$ : 自己整合障壁関数  $f$  の複雑度の値
- $\Delta := f(x^0) - \inf\{f(x) \mid x \in \cup_{\gamma \in [0,1]} S_{\gamma r_0}\} \geq 0$   
(元問題の有界性に関するパラメータ)

## フェイズ | アルゴリズムの計算量

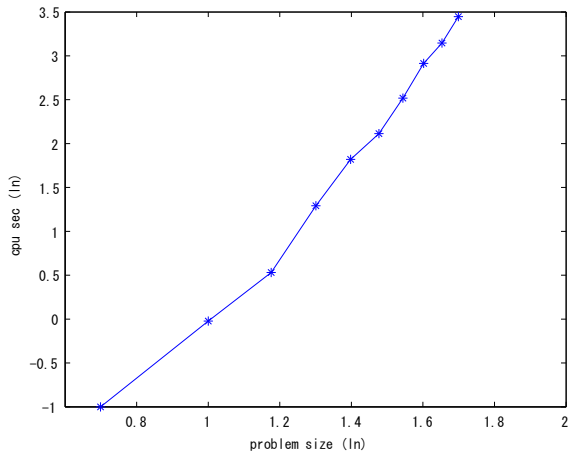
仮定 1 に加え、元問題が許容であるという仮定よりも弱い仮定の下で、提案アルゴリズムは

$$\mathcal{O}\left(\Delta(1+\delta)\log\frac{1}{\epsilon} + (1+\vartheta_f)\left(\left(1+\delta\right)\log\frac{1}{\epsilon}\right)^2\right)$$

回の反復の後  $\epsilon$  許容解を出力し停止する.

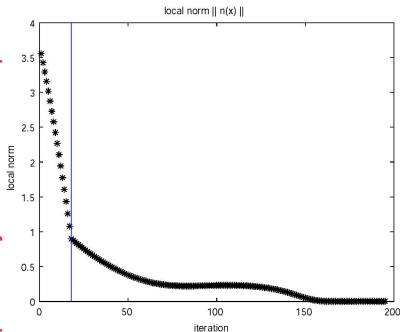
- Instances:
  - DNN optimization problems
  - with randomly generated  $A$  and  $b$
  - where  $\{x \in \mathcal{D}_n \mid Ax = b\} \neq \emptyset$
  - $n = 5 \dots 50$
- Computing environments:
  - Implemented in MATLAB 2009a
  - Memory: 10GB
  - CPU: Intel Core i7 3.33GHz

$$\log_{10}(\text{CPU time}) / \log_{10}(\text{size } n)$$



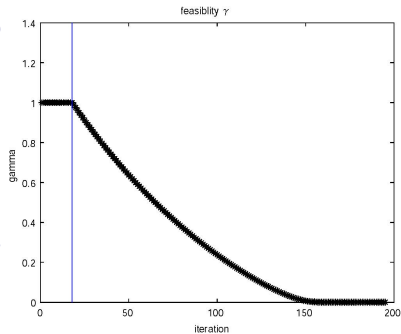
# 主障壁関数フェイズIアルゴリズムの数値実験:

proximity to the central path



number of iteration

proximity to the feasible region

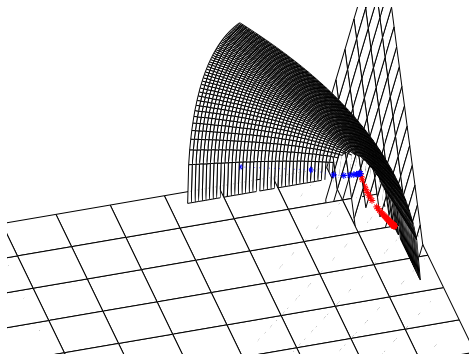


number of iteration

# 二段階主障壁関数法の数値実験

## 例題

$$\begin{cases} \min & \left\langle \begin{bmatrix} -1/2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, x \right\rangle \\ \text{s.t.} & \left\langle \begin{bmatrix} 2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}, x \right\rangle = 5 \\ & x \in \mathcal{D}_2 \end{cases}$$



## まとめ

- 非負半正定値錐とその周辺の錐の性質や, それらの錐上での最適化問題について紹介した
- 非負半正定値錐上の最適化問題に適用可能な, 非許容型主障壁関数法について紹介した

## 今後の課題

- 非負半正定値緩和が有効な問題と有効でない問題の違い
- 要素が錐に含まれるかどうかの判定
- 非対称錐上の最適化問題に適用可能な, 非許容型主双対内点法