

トーリックイデアルの二次生成判定法の実装

鹿間 章宏

大阪大学大学院 情報科学研究科 M2

January 26, 2013

有限グラフのトーリックイデアル, グレブナー基底

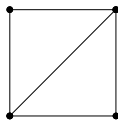
定義 1 (トーリックイデアル)

有限グラフ G から生起するトーリックイデアルとは, G の隣接行列 A の核 $\text{Ker}(A)$ で定義される, 多項式環の部分集合である.

定義 2 (グレブナー基底)

イデアル $I (\neq 0)$ について, I に属する多項式の有限集合 $\mathcal{G} = \{g_1, g_2, \dots, g_s\}$ が, $<$ に関する I のグレブナー基底であるとは, $\text{in}_<(I) = (\text{in}_<(g_1), \text{in}_<(g_2), \dots, \text{in}_<(g_s))$ となる時に言う.

例 3



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

この図では, トーリックイデアルの生成系とグレブナー基底はいずれも $\{x_1x_4 - x_2x_5\}$ となる.

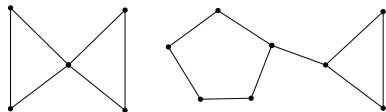
二次生成トーリックイデアルを持つグラフ

定理 4 (Ohsugi-Hibi (1999))

トーリックイデアルの生成系が二次式のみで構成できるのは、以下の 3 つの条件をすべて満たすときで、かつそのときに限る

- 長さ 6 以上の偶サイクル C について、「 C には偶弦が存在」または「 C には 3 本の奇弦が存在して、少なくとも 2 本は C の中で交差」を満たす.
- C_1 と C_2 が極小奇サイクルで、唯一つの共通頂点を持つとき、辺 $\{i, j\} \notin E(C_1) \cup E(C_2)$ で、 $i \in V(C_1)$ と $j \in V(C_2)$ を満たすものが存在する.
- C_1 と C_2 が極小奇サイクルで、共通の頂点を持たないとき、 C_1 と C_2 を結ぶ橋が少なくとも 2 本存在する.

例 5



この図はそれぞれ定理 4 の条件のうち下二つにあてはまらない例.

今回使った数学ソフトウェアの紹介

- NAUTY (B.D. McKay)
 n 頂点のグラフを隣接行列や接続リストの形で列挙する. 今回は, 連結なグラフに限った出力を使った.
- cypath (宇野毅明)
グラフに含まれるサイクルを全列挙したり, 特定の頂点から別の頂点へのパスを見つけることができる.
- Macaulay2 (D.R. Grayson, M.E. Stillman)
汎用の計算代数システム. 今回は, グレブナー基底計算に用いた.
- 4ti2 (4ti2 team)
隣接行列から, トーリックイデアルを計算できる.
- TiGERS (B. Huber)
隣接行列を入力とし, そのグラフから生起するトーリックイデアルのグレブナー基底を全列挙する.

Ruby における実装

頂点数が小さいグラフから順に、付随するトーリックイデアルが二次生成であるが二次のグレブナー基底 (GB) を持たないものを探索した。

定理 4 を用いた二次生成判定プログラム, TiGERS が出力したグレブナー基底の中に二次のものが含まれるかを判定するプログラムを Ruby で実装した。

Ruby は各ソフトウェア間の入出力の受け渡しも担う。

(頂点数)	→	NAUTY	→
(隣接リスト)	→	cypath	→
(サイクルリスト)	→	トーリックの二次判定	→
(二次生成グラフ)	→	TiGERS	→
(GB の全列挙)	→	GB の二次判定	→
(条件を満たすグラフ)			

頂点数	連結なグラフ	二次生成
3	2	2
4	6	6
5	21	20
6	112	95
7	853	568

7 頂点完全グラフでベンチマーク
トーリックの二次判定:1.89 sec
(CPU:Core i7 870 2.93GHz)
(メモリ:6.1GB)

実験結果

定理 6

7 頂点以下の有限連結グラフで,

性質「グラフから生起するトーリックイデアルが
二次生成だが二次グレブナー基底を持たない」

を持つものは, 以下の図の 15 種類であり, かつそれらに限る.

