

ワークショップ「最適化理論の産業・諸科学への応用」

共催：九州大学マス・フォア・インダストリ研究所，京都大学数理解析研究所
協力：文部科学省「平成 23 年度数学・数理科学と諸科学・産業との連携研究ワークショップ」

日程：2011 年 10 月 13 日 (木) 9:55 ～ 14 日 (金) 16:00

会場：九州大学伊都キャンパス 数理学研究教育棟
<http://www.imi.kyushu-u.ac.jp/pages/map.html>

世話人：岩田覚 (京都大数理解析研究所)，白井朋之 (九州大マス・フォア・インダストリ研究所)

ホームページ：<http://imi.kyushu-u.ac.jp/~shirai/ws/opt2011/>

プログラム

10 月 13 日 (木) 大講義室 1

9:55 - 10:00 若山正人 (九大 IMI)
Opening Address

10:00 - 10:50 小島政和 (東工大情報理工)
半正定値計画問題への招待

11:00 - 11:50 小島政和 (東工大情報理工)
半正定値計画緩和による大域的最適化

13:10 - 14:00 藤澤克樹 (中央大理工, JST CREST)
ポストペタスケールシステムにおける超大規模グラフ最適化基盤

14:10 - 15:00 三好直人 (東工大情報理工)
半正定値計画を用いた拡散過程の数値計算

15:00 - 15:30 Coffee Break

15:30 - 16:20 武田朗子 (慶應大理工)
数理最適化の視点から機械学習へのアプローチ

16:30 - 17:20 田中利幸 (京大情報)
圧縮センシング：最適化の視点から

18:00 - 懇親会 (ビッグオレンジ, 伊都キャンパス内)

10月14日(金) 中セミナー室1

- 10:00 - 10:50 村松正和 (電通大情報)
多項式計画に対する半正定値緩和の不思議な性質
- 11:00 - 11:50 恐神貴行 ((株) 日本 IBM 東京基礎研)
半正定値計画を用いた確率モデルの解析
- 13:00 - 13:50 神山直之 (九大 IMI)
安定マッチングモデルに対するアルゴリズムの最近の進展
- 14:05 - 14:55 来嶋秀治 (九大情報)
確率と計算
- 15:10 - 16:00 室田一雄 (東大情報理工)
半正定値計画と対称性

10月13日(木)18:00より九大伊都キャンパス内のビッグオレンジレストランにて懇親会(立食)を行ないます。懇親会に参加予定の方は参加人数の把握のために、10月7日(金)までに以下のメールアドレス(白井)までご連絡下さい。(予算は3000円程度)

連絡先：白井朋之(九州大 IMI)
shirai@imi.kyushu-u.ac.jp

半正定値計画問題への招待

小島政和 (東京工業大学)

アブストラクト：半正定値計画問題の研究が盛んに研究され始めたのは15年程前である。線形計画問題に対する主双対内点法がこの問題に対して拡張されたことが大きく寄与している。それ以来、半正定値計画問題は多様な分野でさまざまな問題に応用されている。近年の数理最適化の発展の中核をなして来たといってよい。半正定値計画問題は連続最適化問題であるが、半正定値計画緩和を通して、組合わせ最適化にも大きな影響を与えて来た。この講演では半正定値計画問題にあまりなじみのない研究者および学生のために半正定値計画問題についての概説を行う。以下を予定している。1：LP(線形計画) から SDP(半正定値計画) へ。 2：SDP の位置づけ, 重要性, 応用。 3：等式標準形。 4：一般の SDP。 5. 簡単な例。 6：双対性。 7：数値解法。

半正定値計画緩和による大域的最適化

小島政和 (東京工業大学)

アブストラクト：凸性を満たす連続最適化問題では、局所最適解は大域最適解に一致し、局所的な改善を繰り返す反復法によって大域的最適解を（近似）計算出来る。一般に、凸性を満たさない非線形連続最適化問題では大域的最適解を（近似）計算するのは非常に難しい。半正定値計画緩和手法（Lasserre 2000 年）が対象とするのは（多変数の）多項式の目的関数と多項式の等式および不等式条件からなる多項式最適化問題である。条件には 0-1 変数条件 $x(x-1) = 0$ や総補性条件を含むことができる。この手法では、与えられた多項式最適化問題（最小化問題とする）を緩和する半正定値計画問題の列を生成する。各半正定値計画問題の最小値は元の多項式最適化問題の下界を与え、その最小解は元の多項式最適化問題の最小解の近似解の役割を果たす。この手法は理論的には非常に強力で、多項式の等式および不等式条件を満たす許容解の集合が有界を保証する条件の下で、生成される下界の列は多項式最適化問題の最小値に、また、半正定値計画問題の最小解の列は多項式最適化問題の最小解に収束する。この講演では、多項式最適化問題に対する半正定値計画緩和について概説し、数値計算例を報告する。

ポストペタスケールシステムにおける超大規模グラフ最適化基盤
Advanced Computing and Optimization Infrastructure
for Extremely Large-Scale Graphs on Post Peta-Scale
Supercomputers

中央大学理工学部

JST CREST

藤澤 克樹 (Fujisawa Katsuki)

概要: 大規模災害等は突発的に発生するため事前予測による防災計画だけでなく、動的なデータ収集等とスパコン上での高速計算によって速やかに避難、誘導計画を策定する必要がある。すでに我々のグループでは首都圏道路網や鉄道網を精密なグラフデータに変換して、超大規模なグラフ処理を用いた避難、誘導計画の策定を進めているが、非常に計算量やデータ量などの規模が大きく従来の手法では処理が困難である。ポストペタスケールスーパーコンピュータ(スパコン)における最重要カーネルのひとつでもある超大規模グラフ処理を実現するためには、理論的性能限界等からボトルネック箇所を特定、数値演算能力とメモリバンド等のトレードオフ関係を把握、計算量とデータ移動量の正確な推定、疎性やサイズなどのデータ特性と性能値の見極め、などが必要とされる。しかし、従来手法では、数千万規模の並列性を備え、ストレージの階層性が深化したポストペタスケールシステム上でのスケラブルな実行は困難であり、アルゴリズム、システムソフトウェアと同時並行的な解決が求められている。我々のCRESTではこれらの問題に対応した超大規模グラフ最適化システムを提案する。本システムは、大規模グラフデータに対するリアルタイムストリーミング処理、計算量とデータ移動量を考慮したグラフ最適化アルゴリズム、ストレージの階層性を考慮した大規模グラフデータストア、超大規模グラフのリアルタイム可視化など従来のスパコンでは実現されてこなかった新しい問題を解決する。これらのシステムはTSUBAME2.0のようなペタスケールスパコン上で構築と評価を行い、今後、出現が想定されるポストペタスケールスパコンのアーキテクチャ上での実行に適したソフトウェア基盤を構築し、エクサスケールスーパーコンピューティングへの方向性づくりに大いに貢献する。

半正定値計画を用いた拡散過程の数値計算

三好 直人 (東京工業大学)

アブストラクト：拡散過程がある有界領域から初めて出て行くまでの到達時刻のモーメントや裾確率を半正定値計画を用いて数値的に求める手法を紹介する。Lasserre & Prieto-Rumeau (2004) によって提案されたこの手法は、目的のモーメントを含むいくつかのモーメントが満たすべき条件を半正定値制約条件として与え、これらのモーメントを変数とする半正定値計画問題を最大化／最小化することによって、目的のモーメントの上界／下界を得るものである。講演内容は、Lasserre & Prieto-Rumeau (2004) の結果に鈴木健太郎氏、小島政和氏と共同で行った (些細な) 拡張の成果を加えたものであり、この手法の有効性を検証するために行った数値実験の結果も示す。

数理最適化の視点から機械学習へのア プローチ

武田朗子 (慶応大理工)

学習問題は、データからモデルを学習する際に、しばしば数理最適化問題として定式化され、数理最適化法を用いて解かれる。まず、2値分類問題に対する既存の学習モデルを紹介したい。それから、それらの学習モデルが、数理最適化の手法であるロバスト最適化法による定式化の枠組みに入ることを話したい。最後に、ロバスト最適化による判別モデルに対する解法の提案をし、数値実験結果を報告する。

圧縮センシング：最適化の視点から

田中利幸 (京都大学)

アブストラクト：

圧縮センシングは、少数の観測結果にもとづいて疎な表現を有するデータを推測するための汎用的なアプローチを与える数理的枠組みとして、近年大いに注目を集めている。数理の側面に注目しても、圧縮センシングはランダム行列、積分幾何、統計推論、最適化、ウェーブレットなどの幅広い分野にまたがる新たな話題を提示している。本講演では、圧縮センシングの基本的な問題設定から始めて、最適化の視点に重点を置いて圧縮センシングに関連する数理的な話題をいくつか紹介する。

多項式計画に対する半正定値緩和の不思議な性質

A Strange Property of Semidefinite Relaxation for Polynomial Optimization Problems

村松正和

電気通信大学大学院 情報理工学研究科 情報・通信工学専攻

多項式計画問題に対する半正定値緩和のアプローチに関して、近年多くの研究が進められている。このアプローチは、「半正定値計画問題は主双対内点法により効率よく最適解が求められる」ということが基礎となっている。

我々は、ごく単純な多項式計画問題に対して半正定値緩和を適用し、次のことが起きることを観察した。

1. それぞれの半正定値緩和問題に対し、主双対内点法は最適値を返す。
2. その最適値の列は、緩和次数が大きくなるに従い多項式計画問題の最適値に収束する。
3. それぞれの半正定値緩和問題の（本当の）最適値は、内点法が返す値と大きく異なる。

つまり、内点法は誤った値を最適値として返すのだが、その誤った値はある意味計算したい値となっている。発表では、このようなことが起きるメカニズムを明らかにし、同様の状況がかなり一般的な仮定のもとで起こりうることを示す。

半正定値計画を用いた確率モデルの解析

恐神貴行 (日本 IBM 東京基礎研)

We investigate the approach of using semidefinite programming (SDP) to analyze properties of stochastic models. In particular, we derive upper and lower bounds on the tail distribution of the waiting time in a transient GI/GI/1 queue, which has been largely intractable with existing approaches. Specifically, given a truncated sequence of the moments of the service time distribution and that of the interarrival time distribution, the optimal objective value of the SDP that we construct gives an upper bound or a lower bound of the tail distribution of the waiting time. Alternatively, such a bound can be obtained as a feasible objective value of the dual problem of the SDP. In general, the upper and lower bounds can be obtained numerically by solving the SDP numerically.

When only the first two moments of the service time distribution and those of the interarrival time are given, we derive the optimal solution of the SDP in a closed form, which in turn gives the upper and lower bounds on the tail distribution in closed forms. The closed form solution is constructed with the help of weak duality and complementary slackness conditions. Our closed-form bounds are simple enough and allow us to integrate it into bounds on the expected waiting time in closed form. We also simplify the obtained closed-form bounds to gain intuitive understanding of the nature of the transient waiting time and of the tightness of the bounds derived via SDP.

安定マッチングモデルに対するアルゴリズムの最近の進展

Recent Developments in Algorithms for Stable Matching Models

神山 直之

九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

安定マッチングモデルとは、1962年に Gale と Sharply によって提案された二種類のプレイヤー、例えば男性-女性や労働者-会社など、が存在するマーケットにおける均衡的な割り当てを求めるモデルであり、研修医の配属などにも実際に用いられるモデルである。この安定マッチングモデルの理論的研究としては、大きく分けてゲーム理論的アプローチとアルゴリズム的アプローチがある。ゲーム理論的アプローチにおいては、対戦略性などマッチング方式の望ましさを研究するが主であるのに対して、アルゴリズム的アプローチにおいては、効率的に安定な割り当てを求めるという問題に主眼が置かれる。さらに、アルゴリズム的アプローチは二つの方向に分けることができる。一つは、近似も含め効率的に解くことのできる自然なモデルを明らかにする方向であり、もう一つは効率的に解くことのできるモデルを統一的な抽象化モデルを用いて理解することである。本発表では、まずこれらのアルゴリズム的アプローチの歴史を俯瞰的に眺め、その後 Tamas Fleiner 氏と発表者の共同研究によって最近得られた、下限付き安定マッチングモデルに対するマトロイド的アプローチを紹介する。

確率と計算

来嶋 秀治

九州大学 大学院システム情報科学研究所 情報学部門

アルゴリズム理論において、確率はもはや欠くことのできない重要な道具である。乱択アルゴリズムは、本来決定的に定まる値を乱数を用いて計算する手法であるが、時に決定的アルゴリズムに比べ素朴なアルゴリズムを与え、また時に決定的アルゴリズムでは実現不可能な計算資源での計算を可能にする。本講演では、「乱択アルゴリズムが乱数に真に求める性質は何か？」という疑問を端緒とし、講演者が行う確率的アルゴリズムに関する研究の最近の成果を紹介する。

まず、乱択化による計算性能の向上に関する例として、ストリーミングデータ中の頻出アイテム検知に対して、講演者らが最近提案した素朴な乱択近似アルゴリズムについて述べる。数多くある既存の近似アルゴリズムでは $O(\log N)$ ビットの計算領域を必要とする問題であったが、提案手法は確率的数え上げ法を用いて $O(\log \log N)$ ビットの計算領域で同等の性能を実現する。ただし N はストリーミングデータの長さを表す。従って、提案手法は既存のアルゴリズムに比べ、メモリ溢れに関してロバストなアルゴリズムと言える。本研究は緒方正虎氏、山内由紀子氏、山下雅史氏との共同研究である。

また、マルコフ連鎖モンテカルロ法など、様々な場面で活躍するランダムウォークについて、その脱乱択化の可能性を秘める rotor-router モデルに関する最近の研究について述べる。rotor-router モデルは deterministic random walk と呼ばれ、ランダムウォークの動きを模倣し得る決定的過程である。Cooper, Spencer は 2006 年に (無限の) 整数格子点上で両者の“分布の誤差”が、次元のみに依存する定数で抑えられることを示し、rotor-router モデルがランダムウォークをよく模倣することを示した。近年講演者らが一般の有限グラフに対する上下界を与え、同様に rotor-router モデルがランダムウォークをよく模倣することを示した。この研究を通じ、最初の疑問の解決への糸口を探す。本研究は古賀健太郎氏、牧野和久氏との共同研究である。

半正定値計画と対称性

室田一雄 (東京大学)

アブストラクト：

半正定値計画は理論的にも実用的にも重要な数理計画問題であり，数理計画法の分野における，この20年間で最も中心的な進展と位置付けることができる。

本講演では，半正定値計画と対称性の関わりを解説する．ここで言う対称性とは，「対称行列」の意味の対称性ではなく，幾何学的あるいは組合せ的な理由による群論的な意味の対称性である．半正定値計画における対称性に関して，以下の話題を紹介する：

(1) 標準的な群表現論の枠組みの適用して，問題の対称性を記述できる．それによって，半正定値計画の最適解のもつ対称性を議論できる．内点法のアルゴリズムによって対称な最適解が生成される．[1]

(2) 標準的な群表現論の枠組みの適用により，問題の係数行列をブロック対角形に分解できる．この際，これにより，問題を効率的に解くことができる．ただし，群の構造に関する情報が必要である．[2]

(3) 行列*代数の理論的枠組みを半正定値計画に利用することができる．これにより「群」への陽なる言及を持ち出すことなく，問題の対称性に見合った最も細かい分解が定義できる．[3]

(4) 与えられた問題のデータ（係数となる対称行列）の数値的情報だけから，行列*代数の理論に基づく分解を求めるアルゴリズムを設計することができる．そこに必要な計算は，固有値計算とランクの計算という標準的な数値計算であり，群論的な手法と比べて，広い応用展開に適している．[4],[5],[6]

(5) 行列*代数の正則表現（代数的な同型性）に基づいて，与えられた問題を別の空間において等価に書きかえることができる．組合せ的な問題のように，対称性が高い場合には，これによって著しく計算効率を高めることができる．[7], [8]

参考文献

[1] Y. Kanno, M. Ohsaki, K. Murota, and N. Katoh: Group symmetry in interior-point methods for semidefinite program, Optimization and Engineering, Vol.2 (2001), 293-320.

[2] K. Gatermann and P.A. Parrilo: Symmetry groups, semidefinite programs, and sums of squares, Journal of Pure and Applied Algebra, Vol. 192 (2004), 95-128.

[3] M. Kojima, S. Kojima and S. Hara: Linear algebra for semidefinite programming, Research Report B-290, Tokyo Institute of Technology, October 1994; also in RIMS Kokyuroku 1004, Kyoto University, 1-23, 1997.

[4] K. Murota, Y. Kanno, M. Kojima, and S. Kojima: A numerical algorithm for block-diagonal decomposition of matrix *-algebras with application to semidefinite programming, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, Vol. 27 (2010), 125-160.

[5] T. Maehara and K. Murota: Algorithm for error-controlled simultaneous block-diagonalization of matrices, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, Vol. 32 (2011), 605-620.

[6] 前原貴憲, 室田一雄：代数的対称性を利用した半正定値計画法の前処理，第22回RAMPシンポジウム，名古屋大学，2010，111-123.

[7] E. de Klerk, J. Maharry, D.V. Pasechnik, B. Richter, and G. Salazar: Improved bounds for the crossing number of $K_{m,n}$ and K_n , SIAM Journal on Discrete Mathematics, Vol. 20 (2006), 189-202.

[8] E. de Klerk, D.V. Pasechnik, and A. Schrijver: Reduction of symmetric semidefinite programs using the regular *-representation, Mathematical Programming, Vol. 109 (2007), 613-624.