多項式計画に対する半正定値緩和の不思議な性質

村松正和

電気通信大学情報理工学研究科

2011/10/14 at 九州大学

Outline

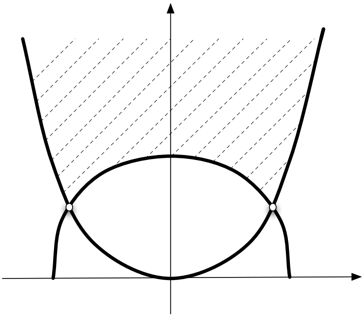
1. 主双対内点法の奇妙な振る舞い
2. 奇妙な振る舞いとその理由（制約なしの POP の場合）
3. 奇妙な振る舞いとその理由（制約のある POP の場合）

Outline

1. 主双対内点法の奇妙な振る舞い
2. 奇妙な振る舞いとその理由（制約なしの POP の場合）
3. 奇妙な振る舞いとその理由（制約のある POP の場合）

あるPOPの例

$$
\begin{cases}
\min & y \\
\text{s.t.} & x^4 + y^4 - 1 \geq 0 \\
& -x^2 + y \geq 0
\end{cases}
$$



最適値：$\sqrt{(\sqrt{5}-1)/2} = 0.78615\ldots$

SDP 緩和の数値実験

- 緩和次数 $r \leftrightarrow$ SDP 緩和問題 (昨日の話を思い出そう！)

SDP 緩和の数値実験

- 緩和次数 $r \leftrightarrow$ SDP 緩和問題 (昨日の話を思い出そう！)
- ζ_r: 緩和次数 r の SDP 緩和問題の最適値
  $\Rightarrow \zeta_r \leq$ POP の最適値 $= 0.78615\ldots$

SDP 緩和の数値実験

- 緩和次数 $r \leftrightarrow$ SDP 緩和問題 (昨日の話を思い出そう！)
- ζ_r: 緩和次数 r の SDP 緩和問題の最適値
  $\Rightarrow \zeta_r \leq$ POP の最適値 $= 0.78615...$
- $\bar{\zeta}_r$: 緩和次数 r の SDP 緩和問題に対し、主双対内点法 (SeDuMi) が (最適値として) 返した値

SDP 緩和の数値実験

- 緩和次数 $r \leftrightarrow$ SDP 緩和問題 (昨日の話を思い出そう！)
- ζ_r: 緩和次数 r の SDP 緩和問題の最適値
  $\Rightarrow \zeta_r \leq$ POP の最適値 $= 0.78615...$
- $\bar{\zeta}_r$: 緩和次数 r の SDP 緩和問題に対し、主双対内点法 (SeDuMi) が (最適値として) 返した値

r	2	3	4	5	6	7
$\bar{\zeta}_r$	0.0000	0.0000	0.0024	0.0761	0.6813	0.7862

SDP 緩和の数値実験

- 緩和次数 r $\leftrightarrow$ SDP 緩和問題 (昨日の話を思い出そう！)
- ζ_r: 緩和次数 r の SDP 緩和問題の最適値
  $\Rightarrow \zeta_r \leq$ POP の最適値 $= 0.78615\ldots$
- $\bar{\zeta}_r$: 緩和次数 r の SDP 緩和問題に対し、主双対内点法 (SeDuMi) が (最適値として) 返した値

r	2	3	4	5	6	7
$\bar{\zeta}_r$	0.0000	0.0000	0.0024	0.0761	0.6813	0.7862

- 緩和次数 $r = 7$ で最適値に到達

証明できる事実

$$\boxed{\text{定理： } \zeta_r = 0 \ (r \geq 2)}$$

NOTE: 許容領域がコンパクトでない
$\Rightarrow$ Lasserre の定理が成り立つための条件は整っていない

証明できる事実

$\boxed{\text{定理：} \zeta_r = 0 \ (r \geq 2)}$

NOTE: 許容領域がコンパクトでない
$\Rightarrow$ Lasserre の定理が成り立つための条件は整っていない

起こっていること

1. SDP ソルバーは SDP の最適値として 正しくない値 を返している
2. その「正しくない値」は POP の最適値 に収束している

知っておいてほしいこと

1. SDP ソルバーが SDP の最適値として正しくない値を返す
    - 数値的困難を理由に解けない場合も多い

知っておいてほしいこと

1. SDP ソルバーが SDP の最適値として正しくない値を返す
   - 数値的困難を理由に解けない場合も多い
   - POP の SDP 緩和に限らない.

知っておいてほしいこと

1. SDP ソルバーが SDP の最適値として正しくない値を返す
    - 数値的困難を理由に解けない場合も多い
    - POP の SDP 緩和に限らない.
    - 「内点許容解」が存在しない SDP はたちが悪い
      $\Rightarrow$ 内点許容解の回復 (Facial Reduction Algorithm)

知っておいてほしいこと

1. SDP ソルバーが SDP の最適値として正しくない値を返す
   - 数値的困難を理由に解けない場合も多い
   - POP の SDP 緩和に限らない.
   - 「内点許容解」が存在しない SDP はたちが悪い
     $\Rightarrow$ 内点許容解の回復 (Facial Reduction Algorithm)
   - SDPA-GMP の使用
     $\Rightarrow$ 任意精度の計算ができる
     $\Rightarrow$ 非常に遅い

知っておいてほしいこと

1. SDP ソルバーが SDP の最適値として正しくない値を返す
   - 数値的困難を理由に解けない場合も多い
   - POP の SDP 緩和に限らない.
   - 「内点許容解」が存在しない SDP はたちが悪い
     $\Rightarrow$ 内点許容解の回復 (Facial Reduction Algorithm)
   - SDPA-GMP の使用
     $\Rightarrow$ 任意精度の計算ができる
     $\Rightarrow$ 非常に遅い
2. POP の SDP 緩和の場合、SDP ソルバーが返す正しくない値は、計算したい値である
   - スーパーラッキー？

知っておいてほしいこと

1. SDP ソルバーが SDP の最適値として正しくない値を返す
   - 数値的困難を理由に解けない場合も多い
   - POP の SDP 緩和に限らない.
   - 「内点許容解」が存在しない SDP はたちが悪い
     $\Rightarrow$ 内点許容解の回復 (Facial Reduction Algorithm)
   - SDPA-GMP の使用
     $\Rightarrow$ 任意精度の計算ができる
     $\Rightarrow$ 非常に遅い
2. POP の SDP 緩和の場合、SDP ソルバーが返す正しくない値は、計算したい値である
   - スーパーラッキー？
   - **必然性あり** $\Rightarrow$ 今回のお話

(寄り道)SDP の双対定理

$$
\begin{aligned}
\theta_P &= \inf \{\, C \bullet X \mid A_i \bullet X = b_i (i = 1, \ldots, m),\ X \succeq O \,\} \\
\theta_D &= \sup \left\{ \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \;\middle|\; S = C - \sum_{i=1}^{m} y_i A_i,\ S \succeq O \right\}
\end{aligned}
$$

弱双対定理: $\theta_P \geq \theta_D$

(寄り道)SDP の双対定理

$$
\begin{aligned}
\theta_P &= \inf\{\, C \bullet X \mid A_i \bullet X = b_i (i = 1, \ldots, m),\ X \succeq O \,\} \\
\theta_D &= \sup\left\{ \sum_{i=1}^m b_i y_i \,\middle|\, S = C - \sum_{i=1}^m y_i A_i,\ S \succeq O \right\}
\end{aligned}
$$

弱双対定理: $\theta_P \geq \theta_D$

双対定理 1: もし θ_P に $\bar{X} \succ O$ なる許容解が存在すれば、$\theta_P = \theta_D$ である。このとき、もし $\theta_D > -\infty$ ならば θ_D には最適解が存在する。

(寄り道)SDP の双対定理

$$\theta_P = \inf \{ C \bullet X \mid A_i \bullet X = b_i (i = 1, \ldots, m),\ X \succeq O \}$$
$$\theta_D = \sup \left\{ \sum_{i=1}^m b_i y_i \,\middle|\, S = C - \sum_{i=1}^m y_i A_i,\ S \succeq O \right\}$$

弱双対定理: $\theta_P \geq \theta_D$

双対定理 1: もし θ_P に $\bar{X} \succ O$ なる許容解が存在すれば、$\theta_P = \theta_D$ である。このとき、もし $\theta_D > -\infty$ ならば θ_D には最適解が存在する。

双対定理 2: もし θ_D に $\bar{S} \succ O$ なる許容解が存在すれば、$\theta_P = \theta_D$ である。このとき、もし $\theta_P < \infty$ ならば θ_P には最適解が存在する。

(寄り道)SDP の双対定理

$$\theta_P = \inf \{ C \bullet X \mid A_i \bullet X = b_i (i = 1, \ldots, m),\ X \succeq O \}$$

$$\theta_D = \sup \left\{ \sum_{i=1}^m b_i y_i \;\middle|\; S = C - \sum_{i=1}^m y_i A_i,\ S \succeq O \right\}$$

弱双対定理: $\theta_P \geq \theta_D$

双対定理 1: もし θ_P に $\bar{X} \succ O$ なる許容解が存在すれば、$\theta_P = \theta_D$ である。このとき、もし $\theta_D > -\infty$ ならば θ_D には最適解が存在する。

双対定理 2: もし θ_D に $\bar{S} \succ O$ なる許容解が存在すれば、$\theta_P = \theta_D$ である。このとき、もし $\theta_P < \infty$ ならば θ_P には最適解が存在する。

NOTE: 上記は SDP より一般的な**錐線形計画** の枠組みで成立する

内点許容解の無い例

$$\theta_P = \inf \{ C \bullet X \mid A_1 \bullet X = b_1,\ X \succeq O \}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ b_1 = 2$$

$$\Downarrow X = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix}$$

$$\theta_P = \inf \{ x_2 \mid x_1 x_2 \geq 1,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \}$$

内点許容解の無い例

$$\theta_P = \inf \{ C \bullet X \mid A_1 \bullet X = b_1, \ X \succeq O \}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ b_1 = 2$$

$$\Downarrow X = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix}$$

$$\theta_P = \inf \{ x_2 \mid x_1 x_2 \geq 1, \ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \}$$

- 内点許容解が存在 $(x_1 x_2 > 1)$
- $\theta_P = 0$ だが最適解は存在しない

例の双対問題

$$\theta_D = \sup\{\, b_1 y \mid S = C - yA_1,\ S \succeq O \,\}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ b_1 = 2$$

$$\Downarrow S = \begin{pmatrix} 0 & -y \\ -y & 1 \end{pmatrix}$$

$$\theta_D = \sup\{\, 2y \mid y = 0 \,\} = 0 = \theta_P$$

- θ_D には最適解が存在
- θ_D には内点許容解がない
- C の $(2,2)$ 成分が少しでも正であれば、最適解は存在 (寄り道終)

Outline

非負多項式と SOS

非負多項式：

$$f(x) \geq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n)$$

SOS(Sum Of Squares)：

$$f(x) = \sum_{i=1}^{q} g_i(x)^2 \quad (g_i(x) \text{ は多項式})$$

非負多項式と SOS

非負多項式：

$$f(x) \geq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n)$$

SOS(Sum Of Squares)：

$$f(x) = \sum_{i=1}^{q} g_i(x)^2 \quad (g_i(x) \text{ は多項式})$$

- SOS は非負多項式である

非負多項式と SOS

非負多項式：

$$f(x) \geq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n)$$

SOS(Sum Of Squares)：

$$f(x) = \sum_{i=1}^{q} g_i(x)^2 \quad (g_i(x) \text{ は多項式})$$

- SOS は非負多項式である
- 非負多項式は SOS とは限らない
  例：Motzkin Polynomial：$x^4y^2 + x^2y^4 - 3x^2y^2 + 1$

SOS と半正定値行列の関係

$$2r \text{ 次多項式 } f(x) \text{ が SOS}$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists G \succeq O, \text{ such that } f(x) = u_r(x)^T G u_r(x)$$

$u_r(x)$: x の r 次以下の単項式を全て並べた縦ベクトル
例：$x \in \mathbb{R}^2$, $r = 2$ の場合

$$u_2(x) = (1, x_1, x_2, x_1^2, x_1 x_2, x_2^2)^T$$

制約なし多項式計画の SOS 緩和

$$
\begin{aligned}
& \inf \{ f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n \} \\
= \quad & \sup \{ \zeta \mid f(x) \geq \zeta \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n) \} \\
= \quad & \sup \{ \zeta \mid f - \zeta \text{ が非負多項式} \}
\end{aligned}
$$

制約なし多項式計画の SOS 緩和

$$\begin{aligned} & \inf \{ f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n \} \\ = \; & \sup \{ \zeta \mid f(x) \geq \zeta \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n) \} \\ = \; & \sup \{ \zeta \mid f - \zeta \text{ が非負多項式} \} \\ \geq \; & \sup \{ \zeta \mid f - \zeta \text{ が SOS} \} \end{aligned}$$

SOS 緩和

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{max}\color{red}{\text{IMI}}\text{ze} & \zeta \\ \text{subject to} & u_r(x)^T G u_r(x) = f(x) - \zeta \quad \ldots \quad (*) \\ & G \succeq O \end{array} \right.$$

- (*) を「両辺の単項式にかかる係数が全て等しい」と読む
  $\Rightarrow$ G の成分に関する等式制約

Motzkin 多項式に対する SOS 緩和

$$f(x,y) = x^4y^2 + x^2y^4 - 3x^2y^2 + 1$$

- $\min f(x,y) = 0$
- SOS 緩和問題は許容解が無い
  (Motzkin 多項式は SOS ではない非負多項式)

Motzkin 多項式に対する SOS 緩和

$$f(x,y) = x^4y^2 + x^2y^4 - 3x^2y^2 + 1$$

- $\min f(x,y) = 0$
- SOS 緩和問題は許容解が無い
  (Motzkin 多項式は SOS ではない非負多項式)

数値計算 (SparsePOP 2.97 + SeDuMi 1.3)

r	3	4	5	6	7	8
$\bar{\zeta}_r$	-1867	-42.74	-4.071	-0.471	1.820e−08	1.256e−08

- どの問題も許容解が存在すると判定
- $r = 7$ でほぼゼロが得られる

定理 (by Lasserre)

$f(x)$ を n 変数非負多項式とするとき、
任意の $\epsilon > 0$ に対しある r が存在して

$$f_{\epsilon,r}(x) = f(x) + \epsilon \sum_{k=0}^{r} \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^{2k}}{k!}$$

が SOS となる

定理 (by Lasserre)

$f(x)$ を n 変数非負多項式とするとき、
任意の $\epsilon > 0$ に対しある r が存在して

$$f_{\epsilon,r}(x) = f(x) + \epsilon \sum_{k=0}^{r} \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^{2k}}{k!}$$

が SOS となる
NOTE: f と $f_{\epsilon,r}$ において、同じ単項式に対する係数の差は ϵ 以下

SOS緩和がうまくいく仕組み

- 多項式の係数の差 $\Leftrightarrow$ SOS 緩和問題における等式制約の差
- Motzkin 多項式に対する SOS 緩和問題において、等式制約に少しの誤差を許せば、許容解が存在するようになる。(SOS 緩和問題は weakly infeasible)
- この誤差はいくら小さくても良い
$\Rightarrow$ 有限桁の計算により、自然に導入されてしまう
$\Rightarrow$ ただし、小さいとそれだけ緩和次数を上げる必要あり

ここまでのまとめ

- Motzkin 多項式に対する SOS 緩和問題は、
  1. 許容解を持たないはず
  2. SDP ソルバーは許容解を持つと判定
  3. SDP ソルバーの返す値は Motzkin 多項式の最小値に収束
- 非負多項式を少し「ずらす」と SOS になるため、このような現象が起こる
  1. 「ずれる量」はいくら小さくても良い
     $\Rightarrow$ 有限桁計算により自然に混入
  2. 「ずれる量」が小さいと SOS になるための緩和次数を大きくとる必要あり

Outline

1. 主双対内点法の奇妙な振る舞い
2. 奇妙な振る舞いとその理由（制約なしの POP の場合）
3. 奇妙な振る舞いとその理由（制約のある POP の場合）

制約のある POP の SDP 緩和

$$\text{min. } f_0(x) \text{ s.t. } x \in K$$

where

$$K = \{\, x \mid f_i(x) \geq 0 \ (i = 1, \dots, m) \,\}$$

制約のある POP の SDP 緩和

$$\min.\ f_0(x) \text{ s.t. } x \in K$$

where

$$K = \{\, x \mid f_i(x) \geq 0 \ (i = 1, \ldots, m) \,\}$$

(制約なしの場合の)SOS 緩和の拡張

$$f_0(x) - \zeta = \sigma_0(x) + \sum_{i=1}^{m} f_i(x)\sigma_i(x)$$

- $\sigma_i(x)$: SOS. ($\sigma_i(x)$ の次数はそれぞれの項における最大次数が緩和次数 r に対して $2r$ か $2r-1$ となるようにとる)
- 制約なし $\Leftrightarrow$ 第 1 項のみ

制約のある POP の SDP 緩和

$$\min.\ f_0(x)\ \text{s.t.}\ x \in K$$

where

$$K = \{\, x \mid f_i(x) \geq 0\ (i = 1, \dots, m) \,\}$$

(制約なしの場合の)SOS 緩和の拡張

$$f_0(x) - \zeta = \sigma_0(x) + \sum_{i=1}^{m} f_i(x)\sigma_i(x)$$

- $\sigma_i(x)$: SOS. ($\sigma_i(x)$ の次数はそれぞれの項における最大次数が緩和次数 r に対して $2r$ か $2r-1$ となるようにとる)
- 制約なし $\Leftrightarrow$ 第 1 項のみ
- もし等式が成り立てば、$f_0(x) - \zeta \geq 0$ for all $x \in K$.

制約のある POP の SDP 緩和

$$\min.\ f_0(x) \text{ s.t. } x \in K$$

where

$$K = \{ x \mid f_i(x) \geq 0 \ (i = 1, \ldots, m) \}$$

(制約なしの場合の)SOS 緩和の拡張

$$f_0(x) - \zeta = \sigma_0(x) + \sum_{i=1}^{m} f_i(x)\sigma_i(x)$$

- $\sigma_i(x)$: SOS. ($\sigma_i(x)$ の次数はそれぞれの項における最大次数が緩和次数 r に対して $2r$ か $2r-1$ となるようにとる)
- 制約なし $\Leftrightarrow$ 第 1 項のみ
- もし等式が成り立てば、$f_0(x) - \zeta \geq 0$ for all $x \in K$.
- それぞれの SOS は半正定値行列としてモデル化

$$\sigma_i(x) = u_{r_i}(x)^T G_i u_{r_i}(x) \quad (i = 0, \ldots, m)$$

Lasserre の SDP 緩和

$$\text{min. } f_0(x) \text{ s.t. } x \in K$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & \zeta \\ \text{s.t.} & f_0(x) - \zeta \\ & = u_{r_0}(x)^T G_0 u_{r_0}(x) + \sum_{i=1}^m f_i(x) u_{r_i}(x)^T G_i u_{r_i}(x) \\ & G_i \succeq O \ (i = 0, \dots, m) \end{array}$$

- Lasserre の SDP 緩和の最適値は $r_0 \to \infty$ で POP の最適値へ収束
- 必要な仮定：K がコンパクト＋もう一つ

Lasserre の SDP 緩和

$$\text{min. } f_0(x) \text{ s.t. } x \in K$$

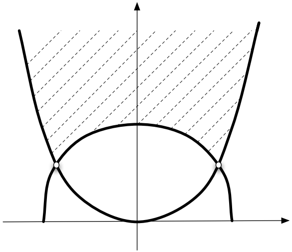
$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & \zeta \\ \text{s.t.} & f_0(x) - \zeta \\ & \quad = u_{r_0}(x)^T G_0 u_{r_0}(x) + \sum_{i=1}^m f_i(x) u_{r_i}(x)^T G_i u_{r_i}(x) \\ & G_i \succeq O \ (i = 0, \ldots, m) \end{array}$$

- Lasserre の SDP 緩和の最適値は $r_0 \to \infty$ で POP の最適値へ収束
- 必要な仮定：K がコンパクト＋もう一つ
  NOTE: 最初の問題は K がコンパクトでない

POPの例(再掲)

$$\left\{\begin{array}{ll} \min & x_2 \\ \text{s.t.} & x_1^4 + x_2^4 - 1 \geq 0 \\ & -x_1^2 + x_2 \geq 0 \end{array}\right.$$

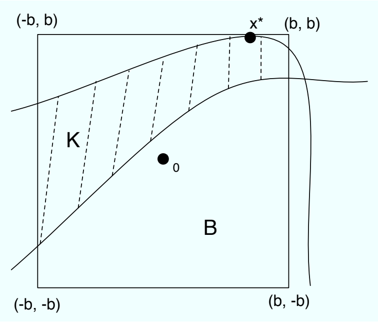


- Lasserre の定理の仮定を満たさない
- SDP の最適値は POP の最適値に収束しているように見える
- 本当の SDP の最適値は 0

摂動定理の記述に必要な仮定

- K は非空（コンパクト性は仮定しない）
- 最適解 x^* が存在

$$
\begin{aligned}
b &= \max\left(1, \max\{\,|x_j^*|\,|\,j = 1, \ldots, n\,\}\right) \\
B &= [-b, b]^n \\
\bar{K} &= K \cap B \\
R_i &= \max\{\,|f_i(x)|\,|\,x \in B\,\}
\end{aligned}
$$



摂動定理

- 仮定：$f(x) - \zeta > 0$ for every $x \in \bar{K}$
  ($\Leftrightarrow \zeta$ は POP の最適値の下界)
- 結論：任意の $\epsilon > 0$ に対し次を満たす正整数 $\hat{r}$ と $\tilde{r}$ が存在：
  「$r \geq \hat{r}$ なる任意の r に対し、

$$f(x) - \zeta + \epsilon\Theta_r(x/b) + \psi_{\tilde{r}}(x)$$

  が SOS」ただし、

$$\begin{aligned} \Theta_r(x) &= 1 + \sum_{j=1}^{n} x_j^{2r} \\ \psi_r(x) &= -\sum_{i=1}^{m} f_i(x) \left(1 - \frac{f_i(x)}{R_i}\right)^{2r} \end{aligned}$$

摂動定理と SDP 緩和の関係

$$f(x) - \zeta + \epsilon\Theta_r(x/b) + \psi_{\tilde{r}}(x) = \sigma_0(x)$$

$$\psi_r(x) = -\sum_{i=1}^{m} f_i(x)\left(1 - \frac{f_i(x)}{R_i}\right)^{2r}$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) - \zeta + \epsilon\Theta_r(x/b) = \sigma_0(x) + \sum_{i=1}^{m} f_i(x)\left(1 - \frac{f_i(x)}{R_i}\right)^{2r}$$

摂動定理と SDP 緩和の関係

$$f(x) - \zeta + \epsilon\Theta_r(x/b) + \psi_{\tilde{r}}(x) = \sigma_0(x)$$

$$\psi_r(x) = -\sum_{i=1}^{m} f_i(x)\left(1 - \frac{f_i(x)}{R_i}\right)^{2r}$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) - \zeta + \epsilon\Theta_r(x/b) = \sigma_0(x) + \sum_{i=1}^{m} f_i(x)\left(1 - \frac{f_i(x)}{R_i}\right)^{2r}$$

cf. Lasserre の SDP 緩和

$$f(x) - \zeta = \sigma_0(x) + \sum_{i=1}^{m} f_i(x)\sigma_i(x)$$

摂動定理の意味すること

- SOS 緩和問題に少しの誤差を許せば、許容解が存在
  (NOTE: $\Theta_r(x)$ の係数の最大値は 1)
- この誤差はいくら小さくても良い
  $\Rightarrow$ 有限桁の計算により、自然に誤差が導入される
  $\Rightarrow$ ただし、誤差が小さいと緩和次数を大きくする必要有り
- 以上のことが一般的な場合に言えていることが面白い

まとめ

POP の SOS 緩和においては、

- SDP ソルバーが最適値でない値を返すことがある。
- その値は POP の最適値へ「収束」する
- この差は、有限桁計算により誤差が混入することで起こる
  $\Rightarrow$ 誤差のおかげで最適値が計算できる
- 上記の現象を説明するのは
  1. 制約なしの場合：Lasserre の定理
  2. 制約有りの場合：今回の摂動定理