半正定値計画を用いた拡散過程の数値計算

Numerical Computational Method for Diffusion Processes Using Semidefinite Programming

三好 直人
miyoshi@is.titech.ac.jp

東京工業大学

(鈴木健太郎氏，小島政和氏との共同研究)

最適化理論研究会＠九大伊都，2011 年 10 月

はじめに

$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}(t))_{t\geq 0}$, $\boldsymbol{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \ldots, X_d(t))$:
状態空間 $E \subset \mathbb{R}^d$ 上の拡散過程

E_0 ($\subset E$): E の連結かつ空でない真部分集合

τ: 初期値 $x_0 \in E_0$ から ${E_0}^c$ ($= E \setminus E_0$) への初到達時刻

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : \boldsymbol{X}(t) \in {E_0}^c\}, \quad \boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{x}_0 \in E_0$$

目的

モーメント $\mathrm{E}\tau^k$, $k = 1, 2, \ldots$, や裾確率 $\mathrm{P}(\tau > a)$, $a \geq 0$, を数値的に求める ➩ 半正定値計画 (SDP) の適用

適当な制約条件のもとで $\mathrm{E}\tau^k$ や $\mathrm{P}(\tau > a)$ に対応する変数を最大化/最小化 ➩ 上界/下界 (Lasserre & Prieto-Rumeau, 2004)

はじめに
1 次元拡散過程
- 変数となるモーメントと線形制約式
- モーメント行列と局所化モーメント行列
- $E\tau$ を計算する SDP

d 次元拡散過程
- モーメントが満たす線形制約式
- モーメント行列と局所化モーメント行列
- $E\tau$ を計算する SDP

$P(\tau > a)$ の計算 $(d = 1)$
- 2 次元確率過程 $\overline{X}(t) = (t, X(t))$
- モーメントが満たす線形制約式
- $P(\tau > a)$ を計算する SDP

数値実験
- Ornstein-Uhlenbeck 過程
- Bessel 過程
- 幾何 Brown 運動

まとめ
参考文献

はじめに
1 次元拡散過程
- 変数となるモーメントと線形制約式
- モーメント行列と局所化モーメント行列
- $E\tau$ を計算する SDP

d 次元拡散過程
- モーメントが満たす線形制約式
- モーメント行列と局所化モーメント行列
- $E\tau$ を計算する SDP

$P(\tau > a)$ の計算 $(d = 1)$
- 2 次元確率過程 $\overline{X}(t) = (t, X(t))$
- モーメントが満たす線形制約式
- $P(\tau > a)$ を計算する SDP

数値実験
- Ornstein-Uhlenbeck 過程
- Bessel 過程
- 幾何 Brown 運動

まとめ
参考文献

1 次元拡散過程 $\boldsymbol{X} = (X(t))_{t \geq 0}$

$\boldsymbol{X} = (X(t))_{t \geq 0}$: 状態空間 $E = \mathbb{R}$ (または $\mathbb{R}_{>0}$) 上の拡散過程

A: $\boldsymbol{X}$ の生成作用素; $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \in E$, 適当な $f\colon E \to \mathbb{R}$ に対して

$$Af(x) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathrm{E}[f(X(t+h)) \mid X(t) = x] - f(x)}{h}$$

$\mathcal{D}(A)$: A の定義域 (上の極限が存在する関数 f の集合)

A は 2 階微分作用素

$$Af(x) = \mu(x) \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} + \frac{\sigma(x)^2}{2} \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}, \quad f \in \mathcal{D}(A)$$

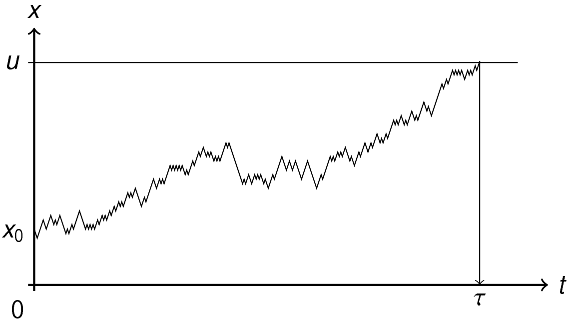
μ (ドリフト係数), σ (拡散係数) は E 上の実数値関数

初到達時刻

$E_0 = E \cap (-\infty, u],\ \ u \in E$

τ: $X(0) = x_0 \in E_0$ から u への初到達時刻

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : X(t) > u\}, \quad X(0) = x_0 \in E_0$$



目的: SDP を用いて期待値 Eτ の値を計算する

(ある測度のモーメントを変数とする SDP を定式化)

準備: 基本方程式

ν_0: 時刻 τ までの E_0 $(= E \cap (-\infty, u])$ 内での期待占有測度

$$\nu_0(B) = \mathrm{E} \int_0^\tau \mathbf{1}_B(X(t))\,\mathrm{d}t, \quad B \in \mathcal{B}(E_0)$$

$f \in \mathcal{D}(A)$, $X(0) = x_0 \in E_0$ に対して

$$f(u) - f(x_0) - \int_{E_0} Af(x)\,\nu_0(\mathrm{d}x) = 0 \qquad \text{(基本方程式)}$$

1. 以下は (平均 0 の) マルチンゲール

$$f(X(t)) - f(X(0)) - \int_0^t Af(X(s))\,\mathrm{d}s, \quad t \geq 0$$

2. $X(0) = x_0$, $t = \tau$ を代入，期待値をとる (任意停止定理)

$$f(u) - f(x_0) - \mathrm{E}\int_0^\tau Af(X(s))\,\mathrm{d}s = 0$$

3. 左辺第 3 項を ν_0 を用いて表す

▸ 線形制約式

変数となるモーメントと線形制約式

m_i: ν_0 の i 次モーメント, $i = 0, 1, 2, \ldots$

$$m_i = \int_{E_0} x^i \, \nu_0(\mathrm{d}x) = \mathrm{E} \int_0^\tau X(t)^i \, \mathrm{d}t$$

⇨ $m_0 = \mathrm{E}\tau$

生成作用素 $A = \mu(x) \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \dfrac{\sigma(x)^2}{2} \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ の μ, σ^2 が多項式

⇨ $r = 1, 2, \ldots$ に対して，モーメント $m_{\ell(r)}$ が存在すれば

$$\sum_{i=0}^{\ell(r)} c_i(r) \, m_i = u^r - {x_0}^r \qquad (\ell(r),\, c_i(r) \text{ は定数})$$

1. $f(x) = x^r$, $r = 1, 2, \ldots$ ⇨ $Ax = \mu(x)$,
$$Ax^r = r \, \mu(x) \, x^{r-1} + \frac{r\,(r-1)}{2} \sigma(x)^2 \, x^{r-2}, \quad r = 2, 3, \ldots$$
2. $Ax^r = \sum_{i=0}^{\ell(r)} c_i(r) \, x^i$, $\quad r = 1, 2, \ldots$ ⇨ 基本方程式に代入

モーメント行列

$\boldsymbol{m} = (m_0, m_1, m_2, \ldots, m_{2k}) \in \mathbb{R}^{2k+1}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

$(k+1) \times (k+1)$ ハンケル行列 $M_k(\boldsymbol{m})$

$$M_k(\boldsymbol{m}) = \begin{pmatrix} m_0 & m_1 & m_2 & \cdots & m_k \\ m_1 & m_2 & m_3 & \cdots & m_{k+1} \\ m_2 & m_3 & m_4 & \cdots & m_{k+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_k & m_{k+1} & m_{k+2} & \cdots & m_{2k} \end{pmatrix}$$

$M_k(\boldsymbol{m})$ が (ある有限測度 ν の) k 次のモーメント行列
$\Leftrightarrow$ m_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, 2k$, が ν の (有限な) i 次モーメント

補題

モーメント行列 $M_k(\boldsymbol{m})$ は半正定値; $M_k(\boldsymbol{m}) \geq 0$

半正定値性は必要条件 (半正定値 $\Rightarrow$ モーメント行列とは限らない)

局所化モーメント行列

g: $\mathbb{R}$ 上の実多項式

m_i: ある有限測度 ν の i 次モーメント

$\boldsymbol{gm} = ((\boldsymbol{gm})_0, (\boldsymbol{gm})_1, \dots, (\boldsymbol{gm})_{2k}), \ k = 0, 1, 2, \dots$

$$(\boldsymbol{gm})_i = \int x^i \, g(x) \, \nu(\mathrm{d}x) \ \left(g(x) = \sum_j g_j \, x^j \Rightarrow (\boldsymbol{gm})_i = \sum_j g_j \, m_{i+j} \right)$$

局所化モーメント行列 $M_k(\boldsymbol{gm})$: $\boldsymbol{gm}$ がつくるハンケル行列

例: $g(x) = -x^2 + 3x - 2 \Rightarrow$

$$M_1(\boldsymbol{gm}) = \begin{pmatrix} -m_2 + 3m_1 - 2m_0 & -m_3 + 3m_2 - 2m_1 \\ -m_3 + 3m_2 - 2m_1 & -m_4 + 3m_3 - 2m_2 \end{pmatrix}$$

測度 ν のサポート $\subseteq \{x \in \mathbb{R} : g(x) \geq 0\}$

$\Rightarrow$ $M_k(\boldsymbol{gm})$ は (存在すれば) 半正定値; $M_k(g\,\boldsymbol{m}) \succeq 0$

半正定値性は必要条件

定式化: Eτ を計算する SDP

$E = \mathbb{R}$, $E_0 = (-\infty, u] = \{x \in \mathbb{R} : u - x \geq 0\}$

適当な $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{array}{ll}
\text{Max/Min} & m_0 \; (= \mathrm{E}\tau) \\
\text{Subject to} & \displaystyle\sum_{i=0}^{\ell(r)} c_i(r)\, m_i = u^r - {x_0}^r, \quad r \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ s.t. } \ell(r) \vee r \leq 2\,k \\
& M_k(\boldsymbol{m}) \succeq 0 \\
& M_{k-1}(g\boldsymbol{m}) \succeq 0 \quad (g(x) = u - x)
\end{array}$$

- $\ell(r)$, $c_i(r)$, $i = 0, 1, \ldots, \ell(r)$, は拡散過程の種類によって異なる
- $E = \mathbb{R}_{>0}$, $E_0 = (0, u]$ のときは $g(x) = x\,(u - x)$ と置き換える
- k の値が大きいほど (モーメントが存在すれば) 精度は良い (問題の規模は大きくなる)

はじめに
1 次元拡散過程
変数となるモーメントと線形制約式
モーメント行列と局所化モーメント行列
Eτ を計算する SDP
d 次元拡散過程
モーメントが満たす線形制約式
モーメント行列と局所化モーメント行列
Eτ を計算する SDP
P$(\tau > a)$ の計算 ($d = 1$)
2 次元確率過程 $\overline{X}(t) = (t, X(t))$
モーメントが満たす線形制約式
P$(\tau > a)$ を計算する SDP
数値実験
Ornstein-Uhlenbeck 過程
Bessel 過程
幾何 Brown 運動
まとめ
参考文献

基本方程式

$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}(t))_{t\geq 0}$, $\boldsymbol{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \ldots, X_d(t))$:
状態空間 $E = \mathbb{R}^d$ (または $\mathbb{R}^d_{>0}$) 上の拡散過程

E_0 ($\subset E$): E の連結かつ空でない真部分集合

τ: ${E_0}^c$ ($= E \setminus E_0$) への初到達時刻

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : \boldsymbol{X}(t) \in {E_0}^c\}, \quad \boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{x}_0 \in E_0$$

${E_0}^c$ への到達位置も確率変数

ν_1: ${E_0}^c$ に達したときの到達位置の確率分布

$$\nu_1(C) = \mathrm{P}(\boldsymbol{X}(\tau) \in C), \quad C \in \mathcal{B}(\partial E_0) \quad (\partial E_0\text{: } E_0 \text{ の境界})$$

基本方程式

$f \in \mathcal{D}(A)$, $\boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{x}_0 \in E_0$ に対して

$$\int_{\partial E_0} f(\boldsymbol{x})\,\nu_1(\mathrm{d}\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) - \int_{E_0} Af(\boldsymbol{x})\,\nu_0(\mathrm{d}\boldsymbol{x}) = 0$$

変数となるモーメントと線形制約式

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0}$ に対して

$$\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} = {x_1}^{\alpha_1} {x_2}^{\alpha_2} \cdots {x_d}^{\alpha_d}$$

m_α: ν_0 についての $\boldsymbol{\alpha}$ 次モーメント ($\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0}$)

$$m_\alpha = \int_{E_0} \boldsymbol{x}^\alpha \, \nu_0(\mathrm{d}\boldsymbol{x}) = \mathrm{E} \int_0^\tau \boldsymbol{X}(t)^\alpha \, \mathrm{d}t$$

b_α: ν_1 についての $\boldsymbol{\alpha}$ 次モーメント ($\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0}$)

$$b_\alpha = \int_{\partial E_0} \boldsymbol{x}^\alpha \, \nu_1(\mathrm{d}\boldsymbol{x}) = \mathrm{E}\boldsymbol{X}(\tau)^\alpha$$

線形制約式: $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^\alpha$

$$b_\alpha - \sum_{\beta=\mathbf{0}}^{\ell(\alpha)} c_\beta(\alpha) \, m_\beta = {\boldsymbol{x}_0}^\alpha, \quad \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0}$$

モーメント行列

$u_k(\boldsymbol{x})$: d 変数, 次数 k の実多項式空間の基底ベクトル

$$u_k(\boldsymbol{x}) = (1, x_1, \ldots, x_d, {x_1}^2, x_1 x_2, \ldots, {x_1}^k, {x_1}^{k-1} x_2, \ldots, {x_d}^k)$$

$$\boldsymbol{m} = (m_\alpha : \alpha \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0},\ |\alpha| \leq 2k) \quad (|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_d)$$

モーメント行列 $M_k(\boldsymbol{m}) = \int u_k(\boldsymbol{x})^\top u_k(\boldsymbol{x})\, \nu_0(\mathrm{d}\boldsymbol{x})$

例: $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ ➪ $u_1(\boldsymbol{x}) = (1, x_1, x_2)$ ➪

$$u_1(\boldsymbol{x})^\top u_1(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ x_1 & {x_1}^2 & x_1 x_2 \\ x_2 & x_1 x_2 & {x_2}^2 \end{pmatrix} ➪ M_1(\boldsymbol{m}) = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{10} & m_{01} \\ m_{10} & m_{20} & m_{11} \\ m_{01} & m_{11} & m_{02} \end{pmatrix}$$

- $\left.\begin{array}{l} [M_k(\boldsymbol{m})]_{1,j} = m_\alpha \\ [M_k(\boldsymbol{m})]_{i,1} = m_\beta \end{array}\right\} \Rightarrow [M_k(\boldsymbol{m})]_{i,j} = m_{\alpha+\beta}$
- $d \geq 2$ のときはハンケル行列にならない

局所化モーメント行列

基本的には 1 次元の場合と同じ

1. $g(\boldsymbol{x}) = \sum_{\beta} g_\beta \boldsymbol{x}^\beta, \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ ➪ $(g\boldsymbol{m})_\alpha = \sum_{\beta} g_\beta m_{\alpha+\beta}, \ \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0}$
2. $[M_k(\boldsymbol{m})]_{i,j} = m_{\alpha(i,j)}$

➪ 局所化モーメント行列 $[M_k(g\boldsymbol{m})]_{i,j} = \sum_{\beta} g_\beta m_{\alpha(i,j)+\beta}$

例: $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ ➪ $M_1(\boldsymbol{m}) = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{10} & m_{01} \\ m_{10} & m_{20} & m_{11} \\ m_{01} & m_{11} & m_{02} \end{pmatrix}$

$g(\boldsymbol{x}) = 1 - {x_1}^2 - {x_2}^2$ ➪

$$M_1(g\boldsymbol{m}) = \begin{pmatrix} m_{00} - m_{20} - m_{02} & m_{10} - m_{30} - m_{12} & m_{01} - m_{21} - m_{03} \\ m_{10} - m_{30} - m_{12} & m_{20} - m_{40} - m_{22} & m_{11} - m_{31} - m_{13} \\ m_{01} - m_{21} - m_{02} & m_{11} - m_{31} - m_{13} & m_{02} - m_{22} - m_{04} \end{pmatrix}$$

定式化: Eτ を計算する SDP (d 次元の場合)

- $E = \mathbb{R}^d$ または $\mathbb{R}^d_{>0}$
- $E_0 = \{\boldsymbol{x} \in E : g_i(\boldsymbol{x}) \geq 0, i = 1, 2, \ldots, n\}$
- $\partial E_0 = \{\boldsymbol{x} \in E : h_j(\boldsymbol{x}) \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n'\}$

適当な $k \in \mathbb{N}$ に対して

Max/Min $\quad m_{\mathbf{0}}$ ($=$ Eτ)

Subject to $\quad b_\alpha - \sum_{\beta=\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\ell}(\alpha)} c_\beta(\alpha)\, m_\beta = {\boldsymbol{x}_0}^\alpha,\ \ \alpha \geq \mathbf{0}$ s.t. $|\alpha| \vee |\boldsymbol{\ell}(\alpha)| \leq 2\,k$

$M_k(\boldsymbol{m}) \succeq 0, \quad M_k(\boldsymbol{b}) \succeq 0$

$M_{\lfloor k-\beta_i/2 \rfloor}(g_i\boldsymbol{m}) \succeq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$ (β_i: g_i の最高次数)

$M_{\lfloor k-\gamma_j/2 \rfloor}(h_j\boldsymbol{b}) \succeq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n'$ (γ_j: h_j の最高次数)

はじめに
1 次元拡散過程
変数となるモーメントと線形制約式
モーメント行列と局所化モーメント行列
$\mathrm{E}\tau$ を計算する SDP
d 次元拡散過程
モーメントが満たす線形制約式
モーメント行列と局所化モーメント行列
$\mathrm{E}\tau$ を計算する SDP
$\mathrm{P}(\tau > a)$ の計算 ($d = 1$)
2 次元確率過程 $\overline{X}(t) = (t, X(t))$
モーメントが満たす線形制約式
$\mathrm{P}(\tau > a)$ を計算する SDP
数値実験
Ornstein-Uhlenbeck 過程
Bessel 過程
幾何 Brown 運動
まとめ
参考文献

2 次元確率過程 $\overline{X}(t) = (t, X(t))$

$\boldsymbol{X} = (X(t))_{t\geq 0}$: 1 次元拡散過程

τ: $X(0) = x_0 < u$ から u への初到達時刻

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : X(t) > u\}, \quad X(0) = x_0 < u$$

$$\tau_a = \min(\tau, a) \Rightarrow \mathrm{P}(\tau > a) = \mathrm{P}(X(\tau_a) < u)$$

2 次元確率過程 $\overline{\boldsymbol{X}} = ((t, X(t)))_{t\geq 0}$

状態空間: $E = \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}$ または $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{>0}$

生成作用素 $\overline{A} = \partial/\partial t + A$:

適当な f: $E \to \mathbb{R}$ に対して

$$\overline{A} f(t,x) = \frac{\partial f(t,x)}{\partial t} + \mu(x)\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} + \frac{\sigma(x)^2}{2}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}$$

基本方程式

$E_0 = [0, a] \times (-\infty, u]$ (または $[0, a] \times (0, u]$)
ν_0: $\tau_a = \min(\tau, a)$ までの E_0 内での期待占有測度

$$\nu_0(B) = \mathrm{E} \int_0^{\tau_a} \mathbf{1}_B(t, X(t))\, \mathrm{d}t, \quad B \in \mathcal{B}(E_0)$$

到達位置の分布を分割 $\partial E_0 = [0, a] \times \{0, u\} \cup \{a\} \times (-\infty, u]$

$$\nu_1^{(\mathrm{top})}(C) = \mathrm{P}(\overline{X}(\tau_a) \in C \times \{u\}), = \mathrm{P}(\tau \in C \cap [0, a])$$
$$\nu_1^{(\mathrm{rig})}(C) = \mathrm{P}(\overline{X}(\tau_a) \in \{a\} \times C) = \mathrm{P}(\tau > a, X(a) \in C \cap (-\infty, u])$$

基本方程式

$$\int_{\partial E_0^{(\mathrm{top})}} f(t, u)\, \nu_1^{(\mathrm{top})}(\mathrm{d}t) + \int_{\partial E_0^{(\mathrm{rig})}} f(a, x)\, \nu_1^{(\mathrm{rig})}(\mathrm{d}x)$$
$$- f(0, x_0) - \int_{E_0} \overline{A} f(t, x)\, \nu_0(\mathrm{d}t \times \mathrm{d}x) = 0$$

変数となるモーメントと線形制約

$m_{i,j}$: ν_0 についての (i,j) 次モーメント $(i,j=0,1,2,\ldots)$

$$m_{i,j} = \int_{E_0} t^i\, x^j\, \nu_0(\mathrm{d}t \times \mathrm{d}x)$$

$b_i^{(\mathrm{top})}$, $b_i^{(\mathrm{rig})}$: $\nu_1^{(\mathrm{top})}$, $\nu_1^{(\mathrm{rig})}$ についての i 次モーメント $(i=0,1,\ldots)$

$$b_i^{(\mathrm{top})} = \int_{\partial E_0^{(\mathrm{top})}} t^i\, \nu_1^{(\mathrm{top})}(\mathrm{d}t), \quad b_i^{(\mathrm{rig})} = \int_{\partial E_0^{(\mathrm{rig})}} x^i\, \nu_1^{(\mathrm{rig})}(\mathrm{d}x)$$

⇨ $\mathrm{P}(\tau > a) = \mathrm{P}(\tau_a = a) = b_0^{(\mathrm{rig})}$ $\quad (\mathrm{E}\tau^k = k\, m_{k-1,0})$

線形制約式: $f(t,x) = t^r\, x^s$

$$u^s\, b_r^{(\mathrm{top})} + a^r\, b_s^{(\mathrm{rig})} - \sum_{i,j} c_{i,j}(r,s)\, m_{i,j} = x_0^s\, \delta_{r,0}$$

$$\delta_{r,0} = \begin{cases} 1 & (r=0) \\ 0 & (r \neq 0) \end{cases}$$

定式化: $\mathrm{P}(\tau > a)$ を計算する SDP

- $E = \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}$
- $E_0 = [0, a] \times (-\infty, u]$

適当な $k \in \mathbb{N}$ に対して

Max/Min $\quad b_0^{(\mathrm{rig})} \ (= \mathrm{P}(\tau > a))$

Subject to
$$u^s\, b_r^{(\mathrm{top})} + a^r\, b_s^{(\mathrm{rig})} - \sum_{i,j} c_{i,j}(r,s)\, m_{i,j} = x_0^s\, \delta_{r,0}$$
$$0 \leq r + s \leq 2\,k$$
$$M_k(\boldsymbol{m}) \succeq 0, \quad M_{k-1}(g_i \boldsymbol{m}) \succeq 0, \quad i = 1, 2$$
$$M_k(\boldsymbol{b}^{(\mathrm{top})}) \succeq 0, \quad M_{k-1}(g_1 \boldsymbol{b}^{(\mathrm{top})}) \succeq 0$$
$$M_k(\boldsymbol{b}^{(\mathrm{rig})}) \succeq 0, \quad M_{k-1}(g_2 \boldsymbol{b}^{(\mathrm{rig})}) \succeq 0$$

$g_1(t, x) = t\,(a - t)$, $g_2(t, x) = u - x$

$E = \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{>0}$, $E_0 = [0, a] \times (0, u]$ のときは $g_2(t, x) = x\,(u - x)$

はじめに

1 次元拡散過程

- 変数となるモーメントと線形制約式
- モーメント行列と局所化モーメント行列
- $\mathrm{E}\tau$ を計算する SDP

d 次元拡散過程

- モーメントが満たす線形制約式
- モーメント行列と局所化モーメント行列
- $\mathrm{E}\tau$ を計算する SDP

$\mathrm{P}(\tau > a)$ の計算 ($d = 1$)

- 2 次元確率過程 $\overline{X}(t) = (t, X(t))$
- モーメントが満たす線形制約式
- $\mathrm{P}(\tau > a)$ を計算する SDP

数値実験

- Ornstein-Uhlenbeck 過程
- Bessel 過程
- 幾何 Brown 運動

まとめ

参考文献

数値実験: $P(\tau > a)$ の計算

$$f(t,x) = \left(\frac{t}{a}\right)^r \left(\frac{x}{u}\right)^s \quad (E_0 = [0,a] \times (-\infty, u] \text{ または } [0,a] \times (0,u])$$

- $m_{i,j} = \displaystyle\int_{E_0} \left(\frac{t}{a}\right)^i \left(\frac{x}{u}\right)^j \nu_0(\mathrm{d}t \times \mathrm{d}x)$
- $b_i^{(\mathrm{top})} = \displaystyle\int_{\partial E_0^{(\mathrm{top})}} \left(\frac{t}{a}\right)^i \nu_1^{(\mathrm{top})}(\mathrm{d}t), \quad b_j^{(\mathrm{rig})} = \int_{\partial E_0^{(\mathrm{rig})}} \left(\frac{x}{u}\right)^j \nu_1^{(\mathrm{rig})}(\mathrm{d}x)$

線形制約: $\quad b_r^{(\mathrm{top})} + b_s^{(\mathrm{rig})} - \displaystyle\sum_{i,j} c_{i,j}(r,s)\, m_{i,j} = \left(\frac{x_0}{u}\right)^s \delta_{r,0}$

SeDuMi (Sturm, 1999) を用いて計算

- Ornstein-Uhlenbeck 過程
- Bessel 過程
  - ドリフト係数 $\mu(x)$ が多項式ではない ⇨ 測度変換
  - 解析解が存在 ⇨ 比較
- 幾何 Brown 運動
  - f が単項式だとうまくいかない ⇨ 少し工夫して再計算

Ornstein-Uhlenbeck 過程

生成作用素:

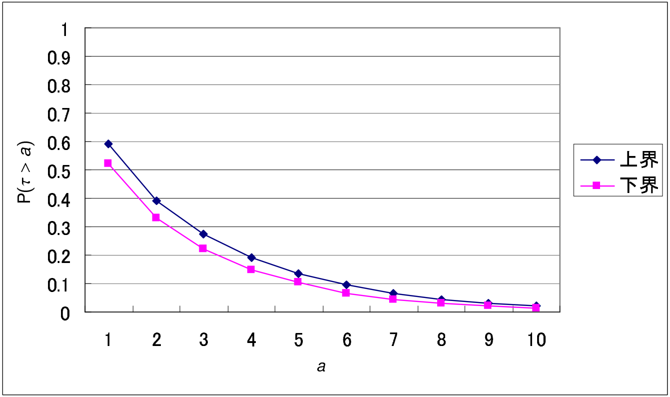
$$\overline{A}f(t,x) = \frac{\partial f(t,x)}{\partial t} - \mu\, x\, \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2}\,\frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^2}, \quad \mu \geq 0,\ \sigma \geq 0$$

線形制約式: $f(t,x) = \left(\frac{t}{a}\right)^r \left(\frac{x}{u}\right)^s$

$$b_r^{(\mathrm{top})} + b_s^{(\mathrm{rig})} - \frac{r}{a}\, m_{r-1,s} + \mu\, s\, m_{r,s} - \frac{s\,(s-1)\,\sigma^2}{2\,u^2}\, m_{r,s-2} = \left(\frac{x_0}{u}\right)^s \delta_{r,0}$$

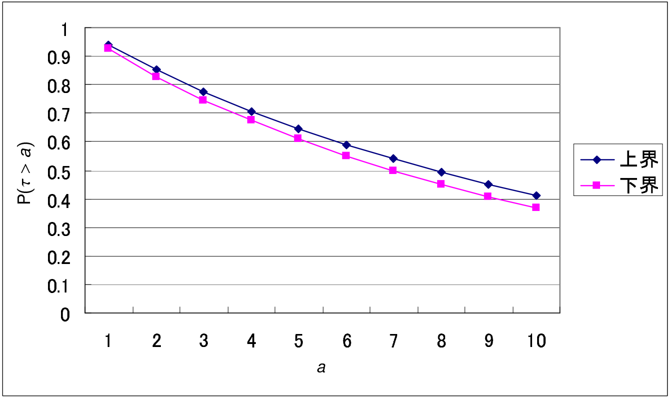
$\mu = 1,\ \sigma = \sqrt{2},\ x_0 = 0$ として計算

Ornstein-Uhlenbeck 過程: 計算結果 (1/2)



$P(\tau > a)$, $a > 0$, の計算結果 ($u = 1.0$, $k = 5$)

Ornstein-Uhlenbeck 過程: 計算結果 (2/2)



$P(\tau > a)$, $a > 0$, の計算結果 ($u = 2.0$, $k = 9$)

Bessel 過程

生成作用素:

$$\overline{A}f(t,x) = \frac{\partial f(t,x)}{\partial t} + \frac{c-1}{2\,x}\,\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^2}, \qquad c \geq 1$$

分母に x ⇨ モーメントに関して線形な制約式が得られない

⇨ 測度変換 $\mathrm{d}\nu_0'/\mathrm{d}\nu_0 = 1/x, \quad x \in (0,u)$

$m'_{i,j}$: ν_0' についての (i,j) 次モーメント

$$m'_{i,j} = \int_{E_0} t^i\, x^j\, \nu_0'(\mathrm{d}t \times \mathrm{d}x) = \int_{E_0} t^i\, x^j\, \frac{1}{x}\, \nu_0(\mathrm{d}t \times \mathrm{d}x)$$

線形制約式

$$b_r^{(\mathrm{top})} + b_s^{(\mathrm{rig})} - \frac{r\,u}{a}\, m'_{r-1,s+1} - \frac{s\,(c+s-2)}{2\,u}\, m'_{r,s-1} = \left(\frac{x_0}{u}\right)^s \delta_{r,0}$$

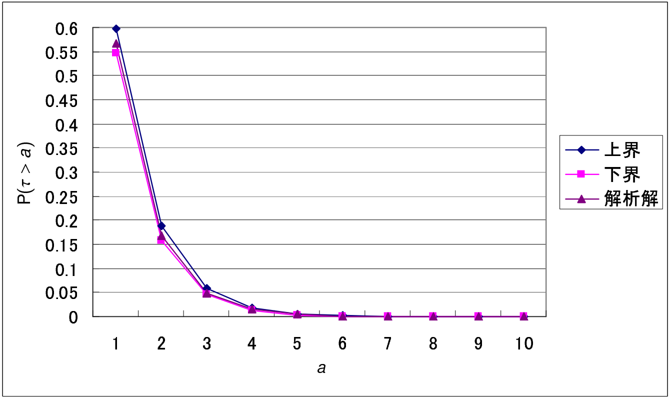
Bessel 過程

解析結果 (Imhof, 1984) と比較

$$P(\tau > a) = 1 - \frac{2\,u}{x_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\Psi\left(\frac{(2\,n-1)\,u + x_0}{\sqrt{a}} \right) - \Psi\left(\frac{(2\,n-1)\,u - x_0}{\sqrt{a}} \right) \right]$$

Ψ: 標準正規分布の分布関数
計算は $n = 1000$ で打切り

$c = 3$, $x_0 = 0.1$ として計算



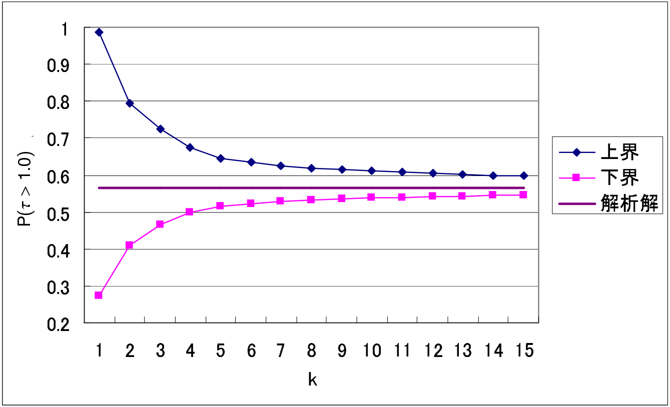
$P(\tau > a)$, $a > 0$ の計算結果 ($u = 2.0$, $k = 15$)

Bessel 過程: 計算結果 (2/3)

$\mathrm{P}(\tau > a)$, $a > 0$ ($c = 3$, $x_0 = 0.1$, $u = 2.0$, $k = 15$)

a	下界	上界	解析解
1	0.545655	0.597988	0.565915
2	0.158079	0.187456	0.168810
3	0.044797	0.057282	0.049190
4	0.01269	0.017516	0.014326
5	0.003585	0.005401	0.004173
6	0.000995	0.001693	0.001216
7	0.000279	0.000524	0.000355
8	0.000081	0.00016	0.000103
9	0.000023	0.000049	0.000029
10	0.000007	0.000015	0.000008

Bessel 過程: 計算結果 (3/3)



k (モーメントの最大次数は $2\,k$) による上界・下界の変化
($c = 3$, $x_0 = 0.1$, $u = 2.0$, $a = 1.0$)

幾何 Brown 運動

生成作用素:

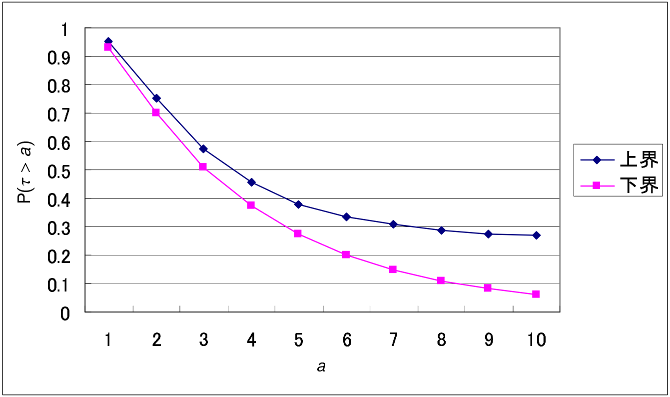
$$\overline{A}f(t,x) = \frac{\partial f(t,x)}{\partial t} + \mu\, x\, \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2}\, x^2\, \frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^2}, \quad \mu > 0,\ \sigma > 0$$

線形制約式: $f(t,x) = \left(\frac{t}{a}\right)^r \left(\frac{x}{u}\right)^s$

$$b_r^{(\mathrm{top})} + b_s^{(\mathrm{rig})} - \frac{r}{a}\, m_{r-1,s} - s\left[\mu + \frac{(s-1)\,\sigma^2}{2}\right] m_{r,s} = \left(\frac{x_0}{u}\right)^s \delta_{r,0}$$

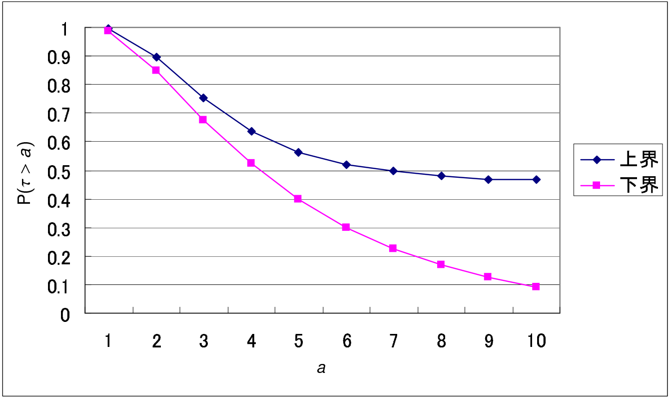
$\mu = \sigma = 1,\ x_0 = 0.1$ として計算

幾何 Brown 運動: 計算結果 (1/2)



$\mathrm{P}(\tau > a)$, $a > 0$, の計算結果 ($u = 1.0$, $k = 15$)

$\mu = \sigma = 1,\ x_0 = 0.1$



$\mathrm{P}(\tau > a),\ a > 0$, の計算結果 ($u = 2.0,\ k = 15$)

幾何 Brown 運動: モーメントの再計算

u と a の値が大きい ⇨ 上界と下界の値の差が大きい!!

線形制約式に問題?

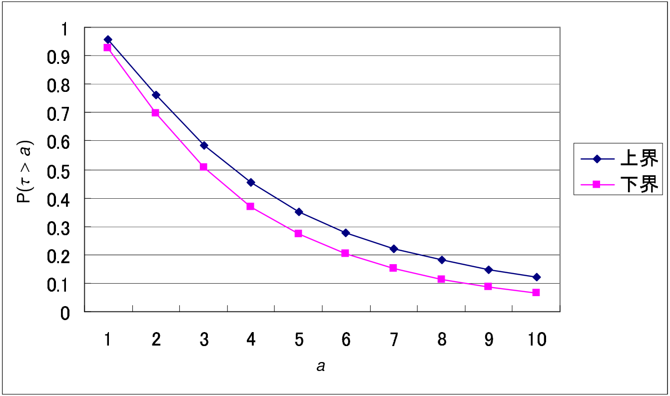
$$b_r^{(\mathrm{top})} + b_s^{(\mathrm{rig})} - \frac{r}{a} m_{r-1,s} - s\left[\mu + \frac{(s-1)\,\sigma^2}{2}\right] m_{r,s} = \left(\frac{x_0}{u}\right)^s \delta_{r,0}$$

- 1 つの線形制約式に異なる s が現れない?
- $f(t,x) = \left(\frac{t}{a}\right)^r \left(\frac{1}{1-\ln(x/u)}\right)^s$ として再計算

新しい線形制約式

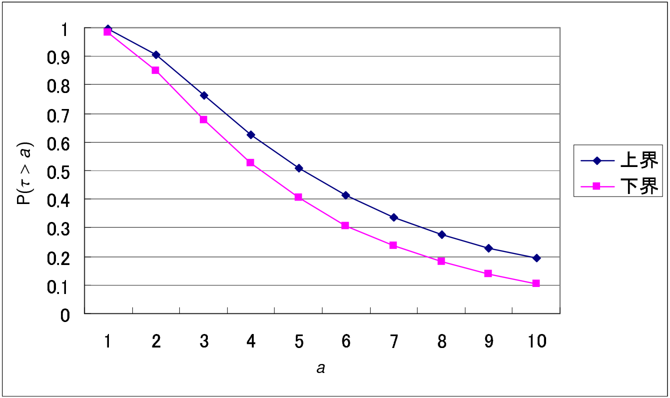
$$b_r^{(\mathrm{top})} + b_s^{(\mathrm{rig})} - \frac{r}{a} m_{r-1,s} - s\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) m_{r,s+1} - \frac{s\,(s+1)\,\sigma^2}{2} m_{r,s+2}$$
$$= \left(\frac{1}{1-\ln(x_0/u)}\right) \delta_{r,0}$$

幾何 Brown 運動: 再計算結果 (1/2)



$P(\tau > a)$, $a > 0$, の計算結果 ($u = 1.0$, $k = 15$)

幾何 Brown 運動: 再計算結果 (2/2)



$\mathrm{P}(\tau > a)$, $a > 0$, の計算結果 ($u = 2.0$, $k = 15$)

まとめ

- 拡散過程の初到達時刻に対して，SDP を用いてモーメントや裾確率を計算する手法を紹介
- 基本的な考え方ではドリフト係数，拡散係数ともに多項式であることを仮定
  - ⇨ 適当な測度変換により緩和できる場合がある
- 関数 f を単項式とするとうまくいかない例 (幾何 Brown 運動)
  - ⇨ 別の関数 f を選んで改善
- 課題: f としてどのような関数を選べば良いのか?

参考文献

鈴木, 三好, 小島 (2008).
拡散過程の生存確率に対する半正定値計画を用いた数値計算手法. 日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文紙, 51, 25–43.

Lasserre, J.-B. and Prieto-Rumeau, T. (2004).
SDP vs. LP relaxations for the moment approach in some performance evaluation problems. *Stochastic Models*, 20, 439–456.

Lasserre, J.-B., Prieto-Rumeau, T. and Zervos, M. (2006).
Pricing a class of exotic options via moments and SDP relaxations. *Mathematical Finance*, 16, 469–494.

Sturm, J. F. (1999).
Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 11-12, 625–653.

Imhof, J.-P. (1984).
Density factorizations for Brownian motion, meander and the three dimensional Bessel process, and applications. *Journal of Applied Probability*, 21, 500–510.