安定マッチングモデルに対するアルゴリズムの最近の進展

神山 直之

九州大学
マス・フォア・インダストリ研究所

Institute of Mathematics for Industry
Kyushu University

割当問題

定義 (割当問題)

- 二つのグループ間のマッチングを決める問題

例えば...

- 研究室と学生
- 病院と医学生

疑問

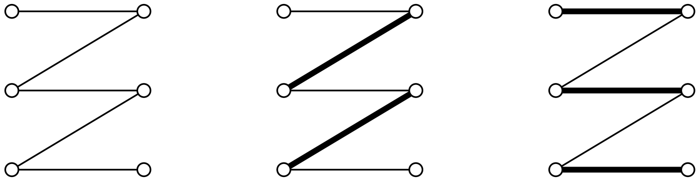
どのような割り当てが望ましいのか?

$\Longrightarrow$ **解の質の良さ** $+$ **計算時間**

最大マッチング問題

定義 (最大マッチング問題)

- 入力: 二部グラフ
- 出力: サイズが最大のマッチング

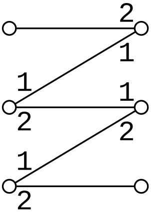


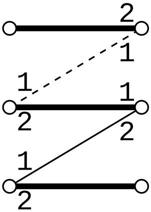
- ○ 効率よく求めることができる
- ○ サイズが最大
- × 個々の選好は考慮出来ない

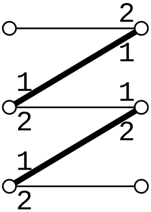
安定マッチング問題

定義 (安定マッチング問題)

- **入力**: 二部グラフ ＋ 各点の相手に対する選好順序
- **出力**: 安定なマッチング







定義 (安定ではないマッチング)

- お互い現在の相手より好ましい組が存在

Gale-Shaply のアルゴリズム

定理 (Gale & Shapley)

安定マッチング問題の任意の問題例に対して少なくとも一つ安定マッチングが存在し効率的に求めることができる

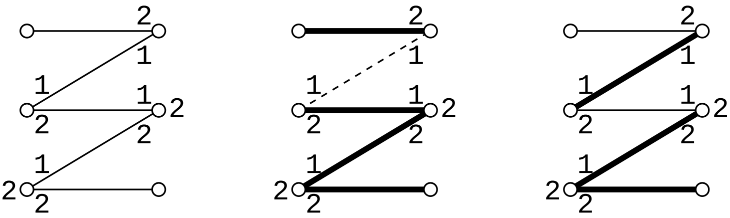
アルゴリズム

相手がいないかつ全ての女性に断られていない男性 m がいる限り以下を繰り返す

1. m は断られていない最も好ましい女性 w にプロポーズする
2. w は相手がいないもしくは現在の相手より好ましければ乗り換える

定義 (研修医配属問題)

- 入力: 安定マッチング問題 + 各点の容量
- 出力: 安定な割り当て



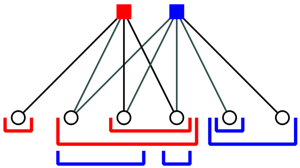
定義 (安定ではない割り当て)

- お互い現在の相手より好ましい組が存在

階層付き研修医配属問題

定義 (階層付き研修医配属問題)

- **入力**: 安定マッチング問題 + **各点の階層付き容量**
- **出力**: 安定な割り当て



定義 (安定ではない割り当て)

- お互い現在の相手より好ましい組が存在

マトロイドを用いた一般化

定義 (マトロイド)

以下を満たす有限集合 E と $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ の組 $\mathbf{M} = (E, \mathcal{I})$

1. $E \neq \emptyset$
2. $I \in \mathcal{I},\ J \subseteq I \implies J \in \mathcal{I}$
3. $I, J \in \mathcal{I},\ |I| < |J| \implies \exists e \in J \setminus I,\ I + e \in \mathcal{I}$

定義 (順序付きマトロイド)

以下のを満たす三つ組 $(E, \mathcal{I}, <)$

1. $(E, \mathcal{I})$ がマトロイド
2. $<$ は E 上の狭義の線形順序

定義 (サーキット)

- $C \notin \mathcal{I}$ かつ任意の $C' \subseteq C$ に対して $C' \in \mathcal{I}$

マトロイドを用いた一般化

事実

- $I \in \mathcal{I}$ かつ $I + e \notin \mathcal{I}$
  $\Longrightarrow I + e$ は唯一のサーキット C_I を含みかつ $e \in C_I$

定義 (支配関係)

- $I \in \mathcal{I}$ が $e \in E \setminus I$ を支配する
  $:=$ 任意の $f \in C_I - e$ に対して $f < e$
- $I \in \mathcal{I}$ の支配する要素の集合 $:= \mathcal{D}_M(I)$

定義 (マトロイド核)

- $I \subseteq E$ が以下を満たす時，$\mathbf{M}_1 = (E, \mathcal{I}_1, <_1)$ と $\mathbf{M}_2 = (E, \mathcal{I}_2, < 2)$ のマトロイド核という

$$I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 \quad \text{and} \quad \mathcal{D}_{\mathbf{M}_1}(I) \cup \mathcal{D}_{\mathbf{M}_2}(I) = E$$

マトロイド核の求め方

- $\mathbf{M} = (E, \mathcal{I}, <)$: **順序付きマトロイド**
- $E := \{e_1, \ldots, e_n\}$ **かつ** $e_1 < \cdots < e_n$
- **各** $F \subseteq E$ **と** $i \in \{1, \ldots, n\}$ **に対して**

$$\mathcal{F}^0_{\mathbf{M}}(F) := \emptyset$$

$$\mathcal{F}^i_{\mathbf{M}}(F) := \begin{cases} \mathcal{F}^{i-1}_{\mathbf{M}}(F) & \text{if } e_i \notin F \text{ or} \\ & \text{if } \mathcal{F}^{i-1}_{\mathbf{M}}(F) + e_i \notin \mathcal{I} \\ \mathcal{F}^{i-1}_{\mathbf{M}}(F) + e_i & \text{otherwise} \end{cases}$$

- **各** $F \subseteq E$ **に対して** $\overline{\mathcal{F}_{\mathbf{M}}}(F) = F \setminus \mathcal{F}_{\mathbf{M}}(F)$

- $f(F) := E \setminus \overline{\mathcal{F}_{\mathbf{M}_2}}(E \setminus \overline{\mathcal{F}_{\mathbf{M}_2}}(F))$

マトロイド核の求め方

事実 (Fleiner)

- $F \subseteq E$ が $f(F) = F$ を満たす
  $\implies \mathcal{F}_{\mathbf{M}_1}(F)$ はマトロイド核

定理 (Fleiner)

常にマトロイド核が存在し効率的に見つけることができる

証明

- $F_1 \subseteq F_2 \implies f(F_1) \subseteq f(F_2)$
- $\emptyset \subseteq f(\emptyset) \subseteq f(f(\emptyset)) \subseteq \cdots$

この証明は Gale-Shapley のアルゴリズムの一般化

安定マッチング問題の帰着

マトロイドの定義

- E を二部グラフの辺集合とする
- 各男性 (女性) が高々一人と組みになるような辺の集合

線形順序の定義

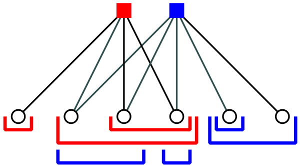
- 全ての個人の選好の自然な拡張
  つまり誰かに関して $a < b$ ならマトロイドでも $a < b$

- 他のモデルも同様に帰着できる
- 後に離散凸関数を用いたモデルへ拡張

下限付き安定マッチングモデル

入力

- **二部グラフ** $G = (P, Q; E)$
- **各点** $v \in P \cup Q$ **にラミナー族** $\mathcal{C}_v \subseteq 2^{E(v)}$
- **各点** $v \in P \cup Q$ **に容量関数** $l \colon \mathcal{C}_v \to \mathbb{Z}_+, u \colon \mathcal{C}_v \to \mathbb{Z}_+$
- **各点** $v \in P \cup Q$ **の** $E(v)$ **上の狭義の線形順序** $<_v$



- **ただし** $v \in P$ **に対しては** $\mathcal{C}_v = \{E(v)\}$
- **ただし** $v \in P$ **に対しては** $l(E(v)) = 0, u(E(v)) = 1$

下限付き安定マッチングモデル

定義 (点における実行可能性)

- $F \subseteq E$ が $v \in V$ に対して**実行可能** $\Longleftrightarrow$

$$l(C) \leq |M(v) \cap C| \leq u(C) \quad (\forall C \in \mathcal{C}_v)$$

定義 (割り当て)

- $M \subseteq E$ が**割り当て** $\Leftrightarrow$ 全ての V の点に対して実行可能

定義 (安定な割り当て)

- 割り当て $M \subseteq E$ が**安定**

  $\Longrightarrow$ **ブロックする辺**が存在しない

下限付き安定マッチングモデル

定義 (ブロッキング辺)

$e \in E \setminus M$ が M をブロックする

$\Longrightarrow$ e の両端点 v に以下のいずれかが成り立つ

- $M + e$ が v において実行可能, or
- ある辺 $f \in M(v)$ に対し $e <_v f$ かつ $M + e - f$ が v において実行可能

注: 安定な割り当ては存在しない可能性がある!!

Huang のアルゴリズム

1. 巧妙に下界を無視した問題の割り当て M を求める
2. M が全ての下界制約を満たせば安定割り当て．そうでなければ安定な割り当ては存在しない

疑問

- 両側に制約を付けることはできないのか？

  一般に片側から両側への拡張は非自明

- 安定な割り当ての多面体の表現は？

  特徴ベクトルの凸法の線形不等式表現

- 安定な割り当ての束構造は？

  男性優位安定マッチングに関係

マトロイドアプローチで解決

提案手法

1. 以下を満たす順序付きマトロイド $\mathbf{M}_P, \mathbf{M}_Q$ を構成

   $M \subseteq E$ が安定な割り当て $\Longleftrightarrow$

   M が $\mathbf{M}_P$ と $\mathbf{M}_Q$ の核かつ全ての下界を満たす
2. $\mathbf{M}_P$ と $\mathbf{M}_Q$ の核 M を見つける
3. M が全ての下界制約を満たせば安定割り当て．そうでなければ安定な割り当ては存在しない

まとめ

- 安定マッチングモデルのアルゴリズム的最先端である下界付きのモデルに対するマトロイドアプローチ
- 非常に巧妙にこれまでのマトロイドモデルに帰着 $+\alpha$