

SLE入門

白井朋之 (九大数理) *, version 1.2

目次

1	Intro	1
2	Chordal Loewner equation	1
2.1	Capacity from ∞	1
2.2	Chordal Loewner equation	2
2.3	Starting from a continuous curve w_t on \mathbf{R}	3
2.4	Flow of a map Φ_A	4
3	Chordal SLE	5
3.1	SLE_κ in other domains	6
3.2	Simpleness for $\kappa \leq 4$	6
3.3	Locality property for $\kappa = 6$	7
3.4	Restriction property for $\kappa = 8/3$	8
4	Conformal map	10
4.1	Examples of conformal map	10

細かい所は詳しくチェックしていない所もありますので、お気付きの点がございましたらお知らせください。

1 Intro

$D, \Lambda (\neq \mathbf{C})$ を \mathbf{C} 内の単連結領域とすると、等角写像 $\Phi : D \rightarrow \Lambda$ が存在する。 D 内の複素ブラウン運動 B_t の D からの脱出時間を τ_D とすると、適当な時間変更 $\sigma : [0, \tau_D] \rightarrow [0, \tau_\Lambda]$ が存在して、 $\{\Phi(B_{\sigma_t}), t \in [0, \tau_D]\}$ はまた Λ 内の複素ブラウン運動となる。これが複素ブラウン運動の等角不変性 (conformal invariance) である。

2次元格子上で定義される loop-erased random walk ($\kappa = 2$), self-avoiding walk ($\kappa = 8/3$), percolation exploration process ($\kappa = 6$), ペアノ曲線

($\kappa = 8$) などの連続極限として得られる (であろう) ランダム曲線 $\{\gamma_t, t \geq 0\}$ も等角不変性が期待される。また、これらのランダム曲線は自己交差を許さないので、 $\gamma[0, t]$ と $\gamma[t, T]$ は強い相関があり、マルコフ性は期待できない。しかし、値空間を等角写像のなす無限次元空間に拡大してマルコフ性を回復させたものが SLE である。

2 Chordal Loewner equation

$D \subset \mathbf{C}$ が、連結な開集合であるとき領域という。また、領域 D の任意の閉曲線が一点に可縮であるとき D は単連結であるという。以降、

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbf{C}; \text{Im } z > 0\},$$

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbf{C}; |z| < 1\}$$

とする。また、領域 D から領域 D' への解析的同型写像を等角写像 (conformal map) ということにする。

2.1 Capacity from ∞

定義 2.1. コンパクト集合 $K \subset \overline{\mathbb{H}}$ が hull であるとは、 $\mathbb{H} \setminus K$ が単連結領域でかつ、 $K = \overline{K \cap \mathbb{H}}$ であるときをいう。 hull の全体を \mathcal{H} とあらわす。

$K \in \mathcal{H}$ に対して、Riemann の写像定理より、ある全単射等角写像 $g_K : \mathbb{H} \setminus K \rightarrow \mathbb{H}$ が存在する。 \mathbb{H} の解析的自己同型群 $SL(2, \mathbf{R})^1$ の作用の自由度によつて、 $g_K(\infty) = \infty$ かつ、流体力学的正規化 (hydrodynamic normalization) の条件

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (g_K(z) - z) = 0 \quad (2.1)$$

をみたすように、つまり、

$$g_K(z) = z + \frac{a_1}{z} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right), \quad z \rightarrow \infty \quad (2.2)$$

¹ 2×2 の実行列で行列式が 1 のものによる一次分数変換の全体

*2006年5月19日 @九州確率論セミナー

となるようにただ一通りに選べる. この $a_1 = a_1(K)$ を capacity (from ∞) という.

以後, g_K と書くときには流体力学的正規化 (2.1) をしているものとする.

capacity は次のような確率論的な解釈が可能である.

命題 2.2. B_t を \mathbb{H} 上の複素ブラウン運動として,

$$\tau = \tau_K = \inf\{t > 0; B_t \in \mathbf{R} \cup K\}$$

とすると,

$$a_1(K) = \lim_{y \rightarrow \infty} y E^{iy} [\text{Im}(B_\tau)].$$

証明. (2.1) より $\text{Im}(g_K(z) - z)$ は有界調和関数であるから, $\text{Im}(g_K(B_t) - B_t)$ は有界なマルチンゲールである. よって, Doob の任意抽出定理より,

$$\begin{aligned} \text{Im}(g_K(z) - z) &= E^z [\text{Im}(g_K(B_\tau) - B_\tau)] \\ &= -E^z [\text{Im}(B_\tau)]. \end{aligned}$$

ここで, $\text{Im}(g_K(B_\tau)) = 0$ であることは, g_K によって $\mathbf{R} \cup K$ は \mathbf{R} に写されることから従う. 後は (2.2) に注意して $z = iy$ とおいて両辺に y をかけて $y \rightarrow \infty$ とすればよい. \square

capacity は次のような性質を持つ.

補題 2.3. $r > 0, x \in \mathbf{R}$ とし, 以下の集合はすべて hull とする.

- (i) $a_1(rK) = r^2 a_1(K)$
- (ii) $a_1(K + x) = a_1(K)$
- (iii) $J \subset K$ のとき, $a_1(K) = a_1(J) + a_1(g_J(K \setminus J))$
- (iv) $a_1(K \cap J) + a_1(K \cup J) \leq a_1(K) + a_1(J)$

証明. (i),(ii),(iii) はそれぞれ $g_{rK}(z) = rg_K(z/r)$, $g_{K+x}(z) = g_K(z+x) - x$, $g_K = g_{g_J(K \setminus J)} \circ g_J$ に注意すればよい.

(iv) $\tau_K \wedge \tau_J = \tau_{K \cup J}$, $\tau := \tau_K \vee \tau_J \leq \tau_{K \cap J} =: \eta$ に注意する. $\text{Im} z$ は (非有界) 調和関数であるから,

$$\text{Im}(z) \geq E^z [\text{Im}(B_\eta)].$$

よって, $z = B_\tau$ として両辺期待値 E^w をとれば,

$$\begin{aligned} E^w [\text{Im}(B_\tau)] &\geq E^w [E^{B_\tau} [\text{Im}(B_\eta)]] \\ &\geq E^w [\text{Im}(B_\eta)] \end{aligned}$$

となる. よって,

$$\begin{aligned} &E^w [\text{Im}(B_{\tau_K})] + E^w [\text{Im}(B_{\tau_J})] \\ &= E^w [\text{Im}(B_{\tau_K \wedge \tau_J})] + E^w [\text{Im}(B_{\tau_K \vee \tau_J})] \\ &\geq E^w [\text{Im}(B_{\tau_{K \cup J}})] + E^w [\text{Im}(B_{\tau_{K \cap J}})]. \end{aligned}$$

後は $w = iy$ として両辺 y をかけて $y \rightarrow \infty$ とすればよい. \square

注意 2.4. K, J は disjoint な hull とする. 上の補題より,

$$\begin{aligned} a_1(K \cup J) &= a_1(K) + a_1(g_K(J)) \\ a_1(K \cup J) &\leq a_1(K) + a_1(J) \end{aligned}$$

であるから,

$$a_1(g_K(J)) \leq a_1(J)$$

である.

2.2 Chordal Loewner equation

単純曲線 $\gamma_t : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{H}$ に対して,

$$K_t = \gamma([0, t])$$

とする. この K_t に対して, $\mathbb{H} \setminus K_t$ を \mathbb{H} に写す等角写像を $g_t = g_{K_t}$ として得られる等角写像の族 $\{g_t, t \geq 0\}$ をすると, $g_t(z)$ のみたす微分方程式は以下のように与えられる.

命題 2.5. 単純曲線 $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{H}$ で, $\gamma_0 = 0$ となるものを考え, $K_t = \gamma([0, t])$, $g_t = g_{K_t}$ とする.

(i) 極限 $w_t = g_t(\gamma_t) = \lim_{z \rightarrow \gamma_t} g_t(z)$ は一意に存在する. ただし, 極限は $z \in \mathbb{H} \setminus K_t$ をみたくようにとるものとする. また, $t \mapsto w_t$ は連続.

(ii) $b(t) = a_1(K_t)$ が C^1 級ならば, g_t は微分方程式

$$\dot{g}_t(z) = \frac{\dot{b}(t)}{g_t(z) - w_t} \quad (2.3)$$

$$g_0(z) = z \in \mathbb{H} \setminus \{0\}. \quad (2.4)$$

をみたく. また, この方程式は

$$T_z = \sup\{t > 0; g_t(z) \neq w_t\}$$

まで well-defined である. (必要ならば, $T_0 = 0$ としておく.)

注意 2.6. $a_1(K_t)$ は補題 2.3 より単調増大で連続であるが, 狭義単調増大ならば, $\sigma_t = \inf\{s > 0; a_1(K_s) > 2t\}$ とおいて, $\tilde{\gamma}_t = \gamma_{\sigma_t}$ とおけば, $a_1(\tilde{\gamma}_t) = 2t$ となる. このとき, Loewner 方程式は

$$\dot{g}_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - w_t} \quad (2.5)$$

$$g_0(z) = z \in \overline{\mathbb{H}}. \quad (2.6)$$

となる. 以後断わらなければこのパラメーターで考えているものとする.

注意 2.7. $x \in \mathbf{R}$ に対して, $g_t^x(z) = g_t(z - x) + x$ とおけば,

$$\dot{g}_t^x(z) = \frac{2}{g_t^x(z) - w_t^x}$$

$$g_0^x(z) = z \in \overline{\mathbb{H}} \setminus \{x\}.$$

をみtas. ただし, $w_t^x = x + w_t$. よつて, 命題 2.5 中の初期値 $\gamma_0 = 0$ は任意の $x \in \mathbf{R}$ に対して $\gamma_0 = x$ として定義できる.

注意 2.8. $g_t(z) = x_t + \sqrt{-1}y_t$ とすると,

$$\dot{x}_t = \frac{2(x_t - w_t)}{|g_t - w_t|^2}, \quad \dot{y}_t = \frac{-2y_t}{|g_t - w_t|^2}$$

となる. よつて, 実軸上では w_t から遠ざかる方向に, 虚軸上では原点に近づく方向に動く.

例 2.9. $\gamma_t = 2\sqrt{t}i$ とおくと,

$$g_t(z) = \sqrt{z^2 + 4t}$$

で, $g_t(-\infty, 0) = (-\infty, -2\sqrt{t})$, $\lim_{\epsilon \uparrow 0} g_t(0, \epsilon + 2\sqrt{t}i) = (-2\sqrt{t}, 0)$, $\lim_{\epsilon \downarrow 0} g_t(0, \epsilon + 2\sqrt{t}i) = (0, 2\sqrt{t})$, $g_t(0, \infty) = (2\sqrt{t}, \infty)$. このとき, $w_t = g_t(2\sqrt{t}i) = 0$ で,

$$\dot{g}_t(z) = \frac{2}{g_t(z)}$$

$$g_0(z) = z \in \overline{\mathbb{H}} \setminus \{0\}.$$

注意 2.10. 一般に $s < t$ として, $\mathbb{H} \setminus g_s(K_t)$ を \mathbb{H} に写す等角写像を $g_{s,t} := g_{g_s(K_t)}$ とあらわすと,

$$g_t = g_{s,t} \circ g_s$$

をみtasが, 例 2.9 では

$$g_{s,t} = g_{t-s}$$

となっている.

2.3 Starting from a continuous curve w_t on \mathbf{R}

前節では

$$\gamma_t \implies K_t \implies g_t \implies w_t$$

という順で連続曲線 w_t が定まった. 今度は逆に連続曲線 w_t から始まって

$$w_t \implies g_t \implies K_t \implies \gamma_t$$

の順で考えてみる.

連続関数 $w : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ で $w_0 = 0$ となるものに対して, Loewner equation

$$\dot{g}_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - w_t} \quad (2.7)$$

$$g_0(z) = z \in \overline{\mathbb{H}}. \quad (2.8)$$

の解を考える. この方程式の解 $g_t(z)$ は, 時刻

$$T_z = \sup\{t > 0; g_t(z) \neq w_t\}$$

$$T_0 = 0$$

まで well-defined である. この T_z を用いて,

$$K_t = \{z \in \overline{\mathbb{H}}; T_z \leq t\} \quad (2.9)$$

と定義する. この K_t を連続関数 w_t に付随する Loewner chain という. このとき, 解 g_t は $\mathbb{H} \setminus K_t$ から \mathbb{H} への等角写像で流体力学的正規化条件をみたすものを定める. さらに,

$$\gamma_t := \lim_{z \in \mathbb{H} \rightarrow 0} g_t^{-1}(z + w_t)$$

を定義する. これを trace ということがある.

注意 2.11. trace が定義できるかどうかはもちろん明らかでないが, w_t の 1/2-Hölder norm が十分小さければ, γ_t は単純曲線として定義されることが知られている. しかし, この十分条件では w_t をブラウン運動としたときに trace が定義できるかまだ定かでないが, Rohde-Schramm[3] によつて well-defined であることが示されている.

注意 2.12. $\{\mu_t, t \geq 0\}$ を \mathbf{R} 上のボレル測度で, $t \mapsto \mu_t$ が弱位相に関して連続で, $\sup_{0 \leq s \leq t} \mu_t(\mathbf{R}) \leq M_t$ かつ $\text{supp } \mu_t \subset [-M_t, M_t]$ をみtasとする. \mathbb{H} 上の時間に依存する正則ベクトル場を Stieltjes 変換によつて $V(t, z) = \int_{\mathbf{R}} \frac{\mu_t(d\xi)}{z - \xi}$ と定義し, 微分方程式

$$\dot{g}_t(z) = V(t, g_t(z)) \quad (2.10)$$

$$g_0(z) = z \in \overline{\mathbb{H}}. \quad (2.11)$$

を考えても同様である。 $\mu_t = 2\delta_{w_t}$ が上で述べた場合になる。

注意 2.13. $f_t = g_t^{-1} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H} \setminus K_t$ とする。
 $f_t(g_t(z)) = z$ を両辺 t で微分することにより、

$$\dot{f}_t(z) = -f_t'(z)V(t, z) \quad (2.12)$$

$$f_0(z) = z. \quad (2.13)$$

であることがわかる。

命題 2.14. 次のことは同値。

(i) $(K_t, t \geq 0)$ は連続関数 $(w_t, t \geq 0)$ に付随する Loewner chain である。

(ii) a) 任意の $t \geq 0$ に対して $a(K_t) = 2t$.

b) 任意の $T > 0$ と $\epsilon > 0$ に対して次の性質をみたす $\delta > 0$ が存在する: $t \leq T$ に対して直径が ϵ 未満の連結集合 $S = S_t \subset \mathbb{H} \setminus K_t$ であつて $K_{t+\delta} \setminus K_t$ を $\mathbb{H} \setminus K_t$ の中で ∞ から分離するようなものが存在する。

2.4 Flow of a map Φ_A

0 を含まない hull を Hull ということにする。

$\gamma_0 = 0$ である単純曲線 $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{H}$ から定まるコンパクト集合の単調増大族を $K_t = \gamma[0, t]$ とする。Hull A に対して、

$$T_A = \inf\{t > 0 ; K_t \cap A \neq \emptyset\}$$

とする。 $\Phi_0 = \Phi_A : \mathbb{H} \setminus A \rightarrow \mathbb{H}$ を正規化された等角写像とし、 $t < T_A$ に対して

$$K_t^* = \Phi_A(K_t)$$

と定義し、 K_t^* と $g_t(A)$ に対応する等角写像をそれぞれ、

$$g_t^* : \mathbb{H} \setminus K_t^* \rightarrow \mathbb{H},$$

$$\Phi_t : \mathbb{H} \setminus g_t(A) \rightarrow \mathbb{H}$$

とすると以下の可換図式がなりたつ。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} \setminus A \text{ or } \mathbb{H} \setminus K_t & \xrightarrow{g_t} & \mathbb{H} \setminus g_t(A) \\ \Phi_0 = \Phi_A \downarrow & & \downarrow \Phi_t \\ \mathbb{H} \setminus K_t^* & \xrightarrow{g_t^*} & \mathbb{H} \end{array}$$

明らかに $\Phi_t \circ g_t = g_t^* \circ \Phi_0$ が成り立つ。よつて、 γ_t

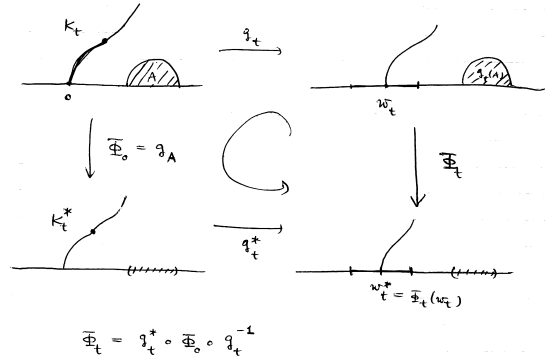


図 1: Flow of a conformal map

(または K_t) から等角写像 $\Phi_A (= \Phi_0)$ の flow

$$\Phi_t = g_t^* \circ \Phi_0 \circ g_t^{-1}$$

が構成される。 $w_t = g_t(\gamma_t)$, $w_t^* = \Phi_t(w_t)$ とおく。

命題 2.14 において、増大する集合族 K_t^* は正規化の条件 $a_1(K_t^*) = 2t$ を除けば、Loewner chain の条件をみたすことがわかる。

$$b_t = a_1(K_t^*)$$

とおくと、命題 2.5 より、対応する g_t^* は

$$\begin{aligned} \dot{g}_t^*(z) &= \frac{\dot{b}_t}{g_t^*(z) - w_t^*} \\ g_t^*(z) &= z. \end{aligned}$$

補題 2.15. 以下が成り立つ。

$$\dot{a}_1(K_t^*) = 2\Phi_t'(w_t)^2. \quad (2.14)$$

証明. h は $z = 0$ の近傍 $U(0) \cap \mathbb{H}$ から \mathbb{H} (の中) への $h(0) = 0$ で局所的に実な解析関数とする。つまり、

$$h(z) = \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \dots, \quad \beta_1 > 0, \beta_i \in \mathbf{R}$$

とする。 $K_t^* = h(K_t)$ とすると、 K_t^* と $\beta_1 K_t$ を比較することにより

$$\dot{a}_1(K_t^*)|_{t=0+} = \beta_1^2 \dot{a}_1(K_t)|_{t=0+}$$

であることがわかる (計算要)。このことと $\dot{a}_1(K_t) = 2t$ に注意すると (2.14) を得る。 \square

flow によって得られた Φ_t の時間微分 $\dot{\Phi}_t$ がみたす微分方程式は以下で与えられる。

命題 2.16. A を Hull とし, g_t を γ_t から定まる Loewner evolution とする. $\Phi_A (=:\Phi_0)$ の g_t による flow を Φ_t とすると,

$$\dot{\Phi}_t(z) = \frac{2\Phi_t'(w_t)^2}{\Phi_t(z) - w_t^*} - \frac{2\Phi_t'(z)}{z - w_t}. \quad (2.15)$$

また, $z \rightarrow w_t$ のとき,

$$\dot{\Phi}_t(w_t) = -3\Phi_t''(w_t).$$

証明. $\Phi_t(z) = g_t^* \circ \Phi_0 \circ g_t^{-1}(z)$ を t で微分して, 補題 2.15 を用いると,

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_t(z) &= \frac{\dot{b}_t}{\Phi_t(z) - w_t^*} - \frac{2\Phi_t'(z)}{z - w_t} \\ &= \frac{2\Phi_t'(w_t)^2}{\Phi_t(z) - w_t^*} - \frac{2\Phi_t'(z)}{z - w_t} \end{aligned}$$

ここで, $z \rightarrow w_t$ とすれば簡単な計算より

$$\dot{\Phi}_t(w_t) = -3\Phi_t''(w_t)$$

を得る. □

同様に, (2.15) を z で微分すると以下の微分方程式を得る.

命題 2.17. A を Hull とし, g_t を γ_t から定まる Loewner evolution とする. $\Phi_A (=:\Phi_0)$ の g_t による flow を Φ_t とすると,

$$\dot{\Phi}_t'(z) = 2 \left[-\frac{\Phi_t'(w_t)^2 \Phi_t'(z)}{(\Phi_t(z) - w_t^*)^2} + \frac{\Phi_t'(z)}{(z - w_t)^2} - \frac{\Phi_t''(z)}{z - w_t} \right].$$

また, $z \rightarrow w_t$ のとき,

$$\dot{\Phi}_t'(w_t) = \frac{\Phi_t''(w_t)^2}{2\Phi_t'(w_t)} - \frac{4\Phi_t'''(w_t)}{3}.$$

注意 2.18. この節では, $\Phi_0 = \Phi_A$ として flow を考えたが, ある x の近傍 N_x における局所的に実な変換 $\Phi_0 = \Phi$ と x 出発の曲線 γ から定まる hull K_t について, $0 \leq t \leq T = \inf\{t > 0; \gamma_t \in \partial N_x\}$ において同じ結論が成り立つ.

3 Chordal SLE

前節のことに注意して, w_t をブラウン運動とするとどうなるかを考える. 以後は, B_t は $B_0 = 0$ の標準 1 次元ブラウン運動とし,

$$w_t = \sqrt{\kappa}B_t, \quad \kappa > 0$$

とする. κ の値によって K_t の振舞いには劇的な違いが出てくるを見る.

定義 3.1. $w_t = \sqrt{\kappa}B_t$ に対するランダムな Loewner 方程式

$$\dot{g}_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - w_t} \quad (3.1)$$

$$g_0(z) = z \in \mathbb{H}. \quad (3.2)$$

によって定義されるランダムな等角写像の族 $\{g_t, t \geq 0\}$ またはそれから (2.9) によって定義される Loewner chain $\{K_t, t \geq 0\}$ をパラメーター $\kappa > 0$ の Chordal Stochastic Loewner evolution または Chordal Schramm-Loewner evolution といい, 簡単に SLE_κ とかく.

K_t がある曲線 $\{\gamma_t, t \geq 0\}$ の hull として生成されるかどうかは明らかでないが, 次のことが知られている.

定理 3.2. SLE_κ は確率 1 で曲線により生成される.

命題 3.3. 任意の $\kappa \geq 0$ に対して, 曲線 $\{\gamma_t, t \geq 0\}$ が

$$\gamma_t = \lim_{z \in \mathbb{H} \rightarrow 0} g_t^{-1}(z + w_t)$$

として定義され, Loewner chain $\{K_t, t \geq 0\}$ を生成する.

ブラウン運動のスケール不変性やマルコフ性から SLE は同様の性質を持つことがわかる.

命題 3.4. $g_t = \{g_t(z), t > 0, z \in \mathbb{H}\}$ を SLE とする.

(i)(スケール不変性) $\alpha > 0$ に対して,

$$g_t^{(\alpha)}(z) = \alpha^{-1/2} g_{\alpha t}(\alpha^{1/2} z)$$

とする. このとき, $\{g_t^{(\alpha)}(z), t \geq 0, z \in \mathbb{H}\}$ は α によらず同分布である.

(ii)(定常独立増分) $g_t = g_{s,t} \circ g_s$ となる正規化された $g_{s,t}: H \setminus g_s(K_s) \rightarrow \mathbb{H}$ がただ一つ存在する. この $g_{s,t}$ に対して,

$$g_{s,t}^*(z) = g_{s,t}(z + w_s) - w_s$$

と定義すると, $g_{s,t}^*(z), t \geq s, z \in \mathbb{H}$ は \mathcal{F}_s と独立で $g_{s,t}^*$ の分布は $t - s$ にしかよらない. 特に, $g_{s,t}^* \stackrel{d}{=} g_{t-s}$.

証明. (i) $g_0^{(\alpha)}(z) = z$ は明らか.

$$\begin{aligned} \dot{g}_t^{(\alpha)}(z) &= \alpha^{-1/2} \frac{2\alpha}{g_{\alpha t}(\alpha^{1/2}z) - w_{\alpha t}} \\ &= \frac{2}{\alpha^{-1/2}g_{\alpha t}(\alpha^{1/2}z) - \alpha^{-1/2}w_{\alpha t}} \\ &= \frac{2}{g_t^{(\alpha)}(z) - w_t^{(\alpha)}}. \end{aligned}$$

ここで, $w_t^{(\alpha)} = \alpha^{-1/2}w_{\alpha t}$ は一次元ブラウン運動. よって, $g_t^{(\alpha)}$ は SLE_{κ} である.

(ii) $g_{s,s}^*(z) = g_{s,s}(z + w_s) - w_s = z$ は明らか.

$$\begin{aligned} \dot{g}_{s,t}^*(z) &= \frac{2}{g_{s,t}(z + w_s) - g_{s,t}(g_s(\gamma_s))} \\ &= \frac{2}{g_{s,t}(z + w_s) - w_t} \\ &= \frac{2}{g_{s,t}^*(z) - (w_t - w_s)}. \end{aligned}$$

$w_t - w_s$ は \mathcal{F}_s と独立で w_{t-s} と同分布である. よって, $\{g_{s,t}^*(z), t \geq s, z \in \mathbb{H}\}$ は $\{g_t(z), t \geq 0, z \in \mathbb{H}\}$ と同分布である. \square

注意 3.5. 上の定常独立増分性は, $\kappa = 0$ の場合に相当する例 2.9 においては, $g_{s,t} = g_{t-s}$ として成り立っていた.

注意 3.6. $w_t = \sqrt{\kappa}B_t = x$ として x 出発のブラウン運動を用いて SLE_{κ} を定義してその法則を P_x とあらわすことにすれば, 以下の意味でマルコフ性となりたつ:

$$\begin{aligned} E_x[F(g_{t+s}, t \geq 0) | \mathcal{F}_s] &= E_x[F(g_{s,t+s} \circ g_s, t \geq 0) | \mathcal{F}_s] \\ &= E_x[F^s(g_{s,t+s}, t \geq 0) | \mathcal{F}_s] \\ &= E_{w_s}[F^s(g_t, t \geq 0)] \end{aligned}$$

が P_x -a.s. で成り立つ. ただし, $F^s(g) := F(g \circ g_s)$. また, s を stopping time σ としても w_t の強マルコフ性より同様である.

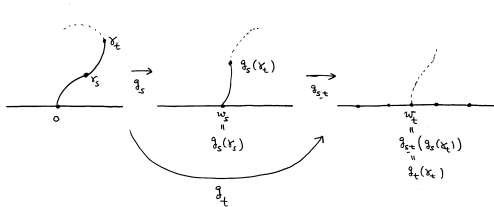


図 2: independent increments

3.1 SLE_{κ} in other domains

D を単連結な領域, $z, w \in \partial D$ を異なる 2 点とする. $F : D \rightarrow \mathbb{H}$ を $F(z) = 0, F(w) = \infty$ である等角写像とする. F は一意的ではないが, 0 を $0, \infty$ を ∞ へ写す \mathbb{H} の解析的自己同型は $z \mapsto rz, r > 0$ しかないから, その自由度のみ. g_t を \mathbb{H} における chordal SLE_{κ} として,

$$g_t^* = F^{-1} \circ g_t \circ F$$

を D における chordal SLE_{κ} という. もし, F のかわりに $\hat{F} = rF$ をとれば,

$$\begin{aligned} \hat{g}_t^*(z) &= \hat{F}^{-1} \circ g_t \circ \hat{F}(z) \\ &= F^{-1}[r^{-1}g_t(rF(z))] \\ &\stackrel{d}{=} F^{-1}[g_{t/r^2}(F(z))] \\ &= g_{t/r^2}^*(z). \end{aligned}$$

ここで, 命題 3.4 のスケール不変性より, $g_t(rz) \stackrel{d}{=} rg_{t/r^2}(z)$ であることを用いた. よって, D における chordal SLE_{κ} の定義は定数倍の時間変更を除いて一意的に定まる.

3.2 Simplicity for $\kappa \leq 4$

単純曲線 $\gamma_t \subset \overline{\mathbb{H}}$ ($\gamma_0 = 0$) を考え,

$$T = \inf\{t > 0; \gamma_t \in \mathbf{R}\} < \infty$$

とする. $\gamma_T > 0$ であると仮定するこの曲線に対応する $\{g_t, t \in [0, T]\}$ を考える. $t \uparrow T$ での状況を考えてみる. g_t による $\gamma([0, t]), \gamma_t, \gamma([t, T])$ の像はそれぞれ

$$g_t(\gamma_t) = w_t \in \mathbf{R}$$

$$g_t(\gamma([0, t])) = [g_t(0-), w_t] \cup [w_t, g_t(0+)] \subset \mathbf{R}$$

$$g_t(\gamma([t, T])) = w_t \text{ と } g_t(\gamma_T) \text{ を結ぶ単純曲線}$$

ここで, $t \uparrow T$ とすると, $g_t(\gamma([t, T]))$ と実軸で囲まれた領域は一点 $w_T = g_T(\gamma_T)$ に収束し,

$$g_T(\gamma([0, T])) = [g_T(0-), w_T]$$

となる. 実軸上の点 $x \in [0, \gamma_T]$ を初期値とする Loewner 方程式の解 $g_t(x)$ は $g_t(x) \in (g_t(0+), g_t(\gamma_T))$ となり, 時刻 $t = T$ で w_T に一致する. 一方, $z \in K(\gamma[0, T])$ と実軸に囲まれる部

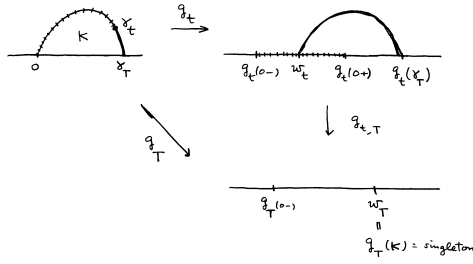


図 3: Hitting to \mathbf{R}

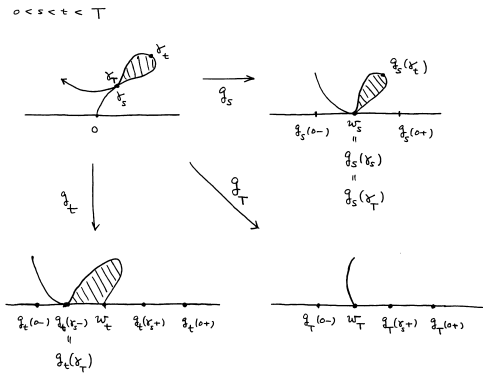


図 4: Hitting to itself

分) はやはり $t = T$ で w_T に一致する。よって、実軸上の解の挙動を観察すれば、 $g_t(z) = w_t$ となる z についての情報が得られる。

$x > 0$ として、

$$Y_t(x) = \frac{g_t(x) - w_t}{\sqrt{\kappa}}$$

とおくと、Loewner equation より、

$$\begin{aligned} dY_t(x) &= -dB_t + \frac{2}{\kappa Y_t(x)} dt \\ &= d\tilde{B}_t + \frac{2}{\kappa Y_t(x)} dt \end{aligned}$$

$$Y_0(x) = x/\sqrt{\kappa}$$

より、 $Y_t(x)$ は次元が $\delta = (1 + 4/\kappa)$ の Bessel 過程² となる。よって、 $1 + 4/\kappa \geq 2$ のとき、つまり $\kappa \leq 4$ のときは、 $Y_t(x) \neq 0 \Leftrightarrow g_t(x) \neq w_t, \forall t \geq 0, \forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ であることがわかり、 $T = \infty$ となる。

²次元が δ の Bessel 過程のみたす SDE は

$$dX_t = dB_t + \frac{\delta - 1}{2X_t} dt$$

である。

$\kappa > 4$ のときは、 $T < \infty$ となる確率が 1 であるから、 $t < T$ のときは $K_t = \gamma([0, t])$ であり、 $t = T$ で $\gamma([0, T])$ と実軸に囲まれる領域が K_T となる。

注意 3.7. 任意の $\kappa \geq 0$ に対して、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_t = \infty, \text{ a.s.}$$

という意味で transient である。

命題 3.8. 以下が確率 1 で成り立つ。

(i) $0 \leq \kappa \leq 4$ ならば、 γ は単純曲線で、 $\gamma(0, \infty) \subset \mathbb{H}$ 。

(ii) $4 < \kappa < 8$ ならば、

$$\bigcup_{t > 0} \overline{K_t} = \overline{\mathbb{H}}.$$

ただし、 $\gamma[0, \infty) \cap \mathbb{H} \neq \mathbb{H}$ である。

(iii) $\kappa \geq 8$ ならば、曲線 γ は $\overline{\mathbb{H}}$ を埋めつくす。つまり、

$$\gamma[0, \infty) = \overline{\mathbb{H}}.$$

この結果は以下の Bessel 過程に関する結果からの帰結である。

命題 3.9. T_x は x 出発の $\delta (= 1 + 4/\kappa)$ 次元の Bessel 過程 X_t^x の 0 への到達時間である。

(i) $\delta \geq 2$ のとき、 $T_x = \infty, \forall x > 0$ 。

(ii) $\delta = 2$ のとき、 $\inf_t X_t^x = 0, \forall x > 0$ 。

(iii) $\delta > 2$ のとき、 $X_t^x \rightarrow \infty, \forall x > 0$ 。

(iv) $\delta < 2$ のとき、 $T_x < \infty, \forall x > 0$ 。

(v) $3/2 < \delta < 2$ のとき、 $P(T_x = T_y) > 0, \forall x < y$ 。

(vi) $\delta \leq 3/2$ のとき、 $P(T_x < T_y) = 1, \forall x < y$ 。

3.3 Locality property for $\kappa = 6$

Hull A に対して、 $\Phi_A : \mathbb{H} \setminus A \rightarrow \mathbb{H}$ を $\Phi_A(\infty) = \infty$ 、 $\Phi_A(0) = 0$ 、 $\Phi_A'(\infty) = 1$ と正規化された等角写像とする。SLE $_{\kappa}$ K_t に対して

$$T_A = \inf\{t > 0 ; K_t \cap A \neq \emptyset\}$$

とすると、前節より、

$$P(T_A < \infty) \begin{cases} < 1 & \kappa \leq 4 \\ = 1 & \kappa > 4 \end{cases}$$

であることに注意しよう。事象 $E_{t,A} = \{T_A > t\}$ の上での γ の条件付分布を考える。 γ に対して、

$$\gamma_s^* = \Phi_A(\gamma_s), 0 \leq s \leq t$$

とする。

定義 3.10. SLE_κ が locality property をもつとは、任意の Hull A に対して、 $\{\gamma_t^*, 0 < t < T_A^*\}$ が SLE_κ の $\{\gamma_t, 0 < t < T_A^*\}$ の時間変更と同分布であるときをいう。ただし、 T_A^* は $\Phi_A(\partial A)$ への到達時間である。

注意 3.11. 上の定義を Φ_A で引き戻して考えてみると、 A に到達するまでの間の \mathbb{H} 内の SLE と $\mathbb{H} \setminus A$ の SLE は時間変更すれば同分布になる、ということ述べている。大雑把に言う、locality property とは、 $\mathbb{H} \setminus A$ 内の SLE path γ が A に到達するまでは A の境界の存在を感じないで \mathbb{H} の SLE と同様に振舞うことを意味している。

注意 3.12. SLE_κ が locality property をもつには、明らかに $\kappa > 4$ が必要である。実際、 $\kappa \leq 4$ のときは γ は実軸 \mathbf{R} に到達しないが、任意の Hull A には有限時間で到達する確率が正である。よって、 γ^* は有限時間で \mathbf{R} に到達する確率が正となり矛盾である。

定理 3.13. (chordal) SLE_κ は $\kappa = 6$ のときに限り、locality property をもつ。

証明. $t < T_A$ に対して

$$K_t^* = \Phi_A(K_t)$$

と定義し、 K_t^* と $g_t(A)$ に対応する等角写像を $g_t^* : \mathbb{H} \setminus K_t^* \rightarrow \mathbb{H}$, $\Phi_t : \mathbb{H} \setminus g_t(A) \rightarrow \mathbb{H}$ とする。 $w_t^* = \Phi_t(w_t)$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} \setminus A \text{ or } \mathbb{H} \setminus K_t & \xrightarrow{g_t} & \mathbb{H} \setminus g_t(A) \\ \Phi_0 = \Phi_A \downarrow & & \downarrow \Phi_t \\ \mathbb{H} \setminus K_t^* & \xrightarrow{g_t^*} & \mathbb{H} \end{array}$$

$\gamma^*[0, t]$ より定まる g_t^* に対する SLE は

$$\dot{g}_t^*(z) = \frac{\dot{a}_1(K_t^*)}{g_t^*(z) - w_t^*}$$

をみたし、 w_t^* を定める。ここで $w_t = \sqrt{\kappa}B_t$ に注意して、Itô の公式と命題 2.16 を用いると

$$\begin{aligned} dw_t^* &= d\Phi_t(w_t) \\ &= \dot{\Phi}_t(w_t)dt + \Phi_t'(w_t)dw_t + \frac{1}{2}\Phi_t''(w_t)\kappa dt \\ &= \Phi_t'(w_t)dw_t + \frac{\kappa - 6}{2}\Phi_t''(w_t)dt \end{aligned}$$

を得る。よって、 $\kappa = 6$ のとき、 $w_t^* = \Phi_t(w_t)$ は

$$dw_t^* = \Phi_t'(w_t)dw_t \quad (3.3)$$

をみたし局所マルチンゲールとなる。

$$t = \int_0^{\sigma_t} \Phi_s'(w_s)^2 ds \quad (3.4)$$

と σ_t を定義し、

$$\beta_t = w_{\sigma_t}^*, \quad \hat{g}_t = g_{\sigma_t}^*$$

とおくと、(3.3) より

$$\langle \beta \rangle_t = \langle w^* \rangle_{\sigma_t} = \int_0^{\sigma_t} \Phi'(w_s)^2 d\langle w \rangle_s = \kappa t$$

であるから、 $\beta \stackrel{d}{=} w$ 。また、命題 2.17 と (3.4) より

$$\dot{\hat{g}}_t = \dot{g}_{\sigma_t}^* \cdot \dot{\sigma}_t = \frac{2\Phi_{\sigma_t}'(w_{\sigma_t})^2}{g_{\sigma_t}^* - w_{\sigma_t}^*} \cdot \dot{\sigma}_t = \frac{2}{\hat{g}_t - \beta_t}$$

となり、明らかに $\hat{g}_0(z) = g_0^*(z) = z$ であるから、 \hat{g}_t は SLE_κ である。 \square

注意 3.14. Φ_A のかわりに Φ を局所的に実な等角写像とする。このとき、 $x \in \mathbf{R}$ から出発する SLE_6 が x の近傍 N_x の境界にヒットするまでは、 SLE_6 に同分布となる。

3.4 Restriction property for $\kappa = 8/3$

$\kappa \leq 4$ の場合の SLE_κ を考えると、 $\gamma_0 = 0$ の単純曲線 $\gamma(0, \infty) \subset \mathbb{H}$ を生成する。Hull A に対して $\Phi_A : \mathbb{H} \setminus A \rightarrow \mathbb{H}$ は $\Phi_A(0) = 0$, $\Phi_A'(\infty) = 1$ をみたす等角写像とする。 $\kappa \leq 4$ の場合 $\gamma[0, \infty) \cap A = \emptyset$ が正の確率で起きる。この事象の上で、 $\gamma^* = \Phi_A \circ \gamma$ を定義する。

定義 3.15. 任意の Hull A に対して、 $\gamma[0, \infty) \cap A = \emptyset$ という条件の下での $\gamma^* = \Phi_A \circ \gamma$ の分布が SLE_κ の時間変更と同分布になるとき、 SLE_κ は restriction property をもつという。

注意 3.16. (i) restriction property は $\gamma[0, \infty)$ に関するもので、locality property は $\gamma[0, t], t > 0$ に関するものである。

(ii) locality property とは逆に、 $\kappa > 4$ では $P(T_A < \infty) = 1$ であるから $\gamma[0, \infty) \cap A = \emptyset$ という条件付分布を考えるためには $\kappa \leq 4$ である必要がある。

注意 3.17. 原点出発の複素ブラウン運動 B_t が $[0, \infty)$ で上半平面に留まるという条件をつけたものを X_t とすると、 $\text{Re } X_t$ は 1 次元ブラウン運動で、

$\text{Im } X_t$ は 3次元 Bessel 過程となる. このとき, Φ_A を $\mathbb{H} \setminus A$ を \mathbb{H} に写す等角写像とすると,

$$P^x(X[0, \infty) \cap A = \emptyset) = \Phi'_A(x), \quad x \in \mathbf{R} \setminus \overline{A}$$

に等しい. もう少し一般に,

$$P^z(X[0, \infty) \cap A = \emptyset) = \frac{\text{Im } \Phi_A(z)}{\text{Im } z}, \quad z \in \mathbb{H} \setminus \overline{A}$$

が成り立つ. このことは, 以下のような議論で大体わかる: $\tau_R = \inf\{t > 0; \text{Im } B_t > R\}$ とすると,

$$\begin{aligned} & P(X[0, \infty) \cap A = \emptyset) \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{P^z(B[0, \tau_R] \cap (\mathbf{R} \cup A) = \emptyset)}{P^z(B[0, \tau_R] \cap \mathbf{R} = \emptyset)} \\ &\sim \frac{\text{Im } \Phi_A(z)/R}{y/R} = \frac{\text{Im } \Phi_A(z)}{y} \\ &\xrightarrow{z=iy \rightarrow 0} \Phi'_A(0) \end{aligned}$$

定理 3.18. (chordal) SLE_κ は $\kappa = 8/3$ のときに限り, restriction property をもつ. また, $\kappa = 8/3$ のとき

$$P(\gamma[0, \infty) \cap A = \emptyset) = \Phi'_A(0)^{5/8}.$$

証明. 1°) まず $\mathcal{C} = \{\Phi_A; A \text{ is a Hull}\}$ は写像の合成に関して半群となることに注意する. 実際, A, B を Hull とすると

$$\Phi_B \circ \Phi_A = \Phi_{A \cup \Phi_A^{-1}(B)}$$

である. また, SLE_κ が restriction property をもつとすると,

$$\begin{aligned} & P(\gamma[0, \infty) \cap (A \cup \Phi_A^{-1}(B)) = \emptyset) \\ &= P((\Phi_A \circ \gamma)[0, \infty) \cap B = \emptyset \mid \gamma[0, \infty) \cap A = \emptyset) \\ &\times P(\gamma[0, \infty) \cap A = \emptyset) \\ &= P(\gamma[0, \infty) \cap B = \emptyset) \cdot P(\gamma[0, \infty) \cap A = \emptyset) \end{aligned}$$

となり,

$$\mathcal{C} \ni \Phi_A \mapsto P(\gamma[0, \infty) \cap A = \emptyset) \in [0, 1]$$

は積に関する半群 $[0, 1]$ への準同型となる. このことより, ある $a > 0$ が存在して,

$$P(\gamma[0, \infty) \cap A = \emptyset) = p(A)^a \quad (3.5)$$

となることに注意する (実際は $p(A) = \Phi'_A(0)$ となる).

2°) 逆に (3.5) が $p(A) = \Phi'_A(0)$ で成り立つとすると,

$$\begin{aligned} & P((\Phi_A \gamma)[0, \infty) \cap B = \emptyset \text{ and } \gamma[0, \infty) \cap A = \emptyset) \\ &= P(\gamma[0, \infty) \cap (A \cup \Phi_A^{-1}(B)) = \emptyset) \\ &= \Phi'_{A \cup \Phi_A^{-1}(B)}(0)^a = (\Phi_B \circ \Phi_A)'(0)^a \\ &= \Phi'_B(\Phi_A(0))^a \cdot \Phi'_A(0)^a = \Phi'_B(0)^a \cdot \Phi'_A(0)^a \\ &= P(\gamma[0, \infty) \cap B = \emptyset) \cdot P(\gamma[0, \infty) \cap A = \emptyset). \end{aligned}$$

よって, $P((\Phi_A \gamma)[0, \infty) \cap B = \emptyset \mid \gamma[0, \infty) \cap A = \emptyset)$ は $P(\gamma[0, \infty) \cap B = \emptyset)$ に等しい.

3°) $\Phi'_t(w_t)$ について調べる. Itô の公式と命題 2.17 より

$$\begin{aligned} & d\Phi'_t(w_t) \\ &= \dot{\Phi}'_t(w_t)dt + \Phi''_t(w_t)dw_t + \frac{\kappa}{2}\Phi'''_t(w_t)dt \\ &= \Phi''_t(w_t)dw_t + \left[\frac{\Phi''_t(w_t)^2}{2\Phi'_t(w_t)} + \left(\frac{\kappa}{2} - \frac{4}{3}\right)\Phi'''_t(w_t) \right] dt. \end{aligned}$$

さらに, $\kappa = 8/3$ として, $\Phi'_t(w_t)^{5/8}$ について Itô の公式を用いると

$$d\Phi'_t(w_t)^{5/8} = \frac{5\Phi''_t(w_t)}{8\Phi'_t(w_t)^{3/8}}dw_t$$

となる. 注意 3.17 より, $0 \leq \Phi'_t(w_t) \leq 1$ であるから, $M_t = \Phi'_t(w_t)^{5/8}$ は有界マルチンゲール. よって, $M_{t \wedge T_A}$ はマルチンゲールだから,

$$\begin{aligned} P(T_A = \infty) &= \lim_{t \rightarrow \infty} E[M_{t \wedge T_A}] = E[M_0] \\ &= \Phi'_0(0)^{5/8} = \Phi'_A(0)^{5/8}. \end{aligned}$$

ここで,

$$\lim_{t \rightarrow T_A} M_t = \lim_{t \rightarrow T_A} \Phi'_t(w_t)^{5/8} = \begin{cases} 1 & T_A = \infty \\ 0 & T_A < \infty. \end{cases} \quad (3.6)$$

を用いた. \square

注意 3.19. (3.6) について: 注意 3.17 より

$$\Phi'_t(w_t) = P^{w_t}(\gamma[0, \infty) \cap g_t(A) = \emptyset)$$

であるから, $T_A = \infty$ の場合は $g_t(A)$ が $t \rightarrow \infty$ で無限遠に動き, $T_A < \infty$ の場合は, $t \rightarrow T_A$ で w_t と $g_t(A)$ の距離が 0 になるので w_t 出発の $\gamma[0, \infty)$ が $g_t(A)$ にヒットする確率は 1 または 0 に収束する (のだろう).

4 Conformal map

4.1 Examples of conformal map

以後、等角写像と言えば、解析的同型写像を意味することにする。

例 4.1. 単位円 \mathbb{D} をそれ自身に写す等角写像は、

$$w = f(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad \theta \in \mathbf{R}, a \in \mathbb{D}$$

の形に限る。

例 4.2. 上半平面 \mathbb{H} をそれ自身に写す等角写像は、

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbf{R}, ad - bc > 0$$

の形に限る。

例 4.3. 上半平面 \mathbb{H} を単位円 \mathbb{D} に写す等角写像は

$$w = f(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

でその逆写像は

$$z = f^{-1}(w) = i \frac{1 + w}{1 - w}$$

で与えられる。

例 4.4. $\mathbb{H} \cap \mathbb{D}$ を $\{z \in \mathbb{H}; \operatorname{Re} z > 0\}$ に写す等角写像は

$$w = f(z) = \frac{1 + z}{1 - z}$$

でその逆写像は

$$z = f^{-1}(w) = \frac{w - 1}{w + 1}$$

で与えられる。

例 4.5. 上の例と $w = z^2$ を合成すれば、 $\mathbb{H} \cap \mathbb{D}$ を \mathbb{H} に写す等角写像は

$$w = f(z) = \left(\frac{1 + z}{1 - z} \right)^2$$

でその逆写像は

$$z = f^{-1}(w) = \frac{\sqrt{w} - 1}{\sqrt{w} + 1}$$

で与えられる。

例 4.6. $\{z \in \mathbf{C}; |\operatorname{Im} z| < \pi/2\}$ を \mathbb{H} に写す等角写像は

$$w = f(z) = i \exp(z)$$

でその逆写像は

$$z = f^{-1}(w) = \log \frac{w}{i}$$

で与えられる。

以下では、hydrodynamic normalization

$$f(z) = z + \frac{a_1}{z} + O(|z|^{-2}), \quad z \rightarrow \infty$$

を見たすものを考える。

例 4.7. $\mathbb{H} \setminus [0, ai]$ を \mathbb{H} に写す等角写像 f は、

$$w = f(z) = \sqrt{z^2 + a^2}$$

で、その逆写像は

$$z = f^{-1}(w) = \sqrt{w^2 - a^2}$$

で与えられる。

例 4.8. $\mathbb{H} \setminus D_r$ を \mathbb{H} に写す等角写像 f は、

$$w = f(z) = z + \frac{r^2}{z}$$

で、その逆写像は

$$z = f^{-1}(w) = \frac{w + \sqrt{w^2 - 4r^2}}{2}$$

で与えられる。

また同様に、 $\mathbb{H} \cap D_r$ を \mathbb{H} に写す等角写像 f は、

$$w = f(z) = - \left(z + \frac{r^2}{z} \right)$$

で、その逆写像は

$$z = f^{-1}(w) = \frac{-w + \sqrt{w^2 - 4r^2}}{2}$$

で与えられる。

参考文献

- [1] G. F. Lawler, *An introduction to the stochastic Loewner equation*, preprint.
- [2] G. F. Lawler, *Conformally Invariant Processes in the Plane*, AMS, 2005.
- [3] S. Rohde and O. Schramm *Basic properties of SLE*, arXiv:math.PR/0106036 v4, 20 Jan 2004.
- [4] W. Werner, *Random planar curves and Schramm-Loewner evolutions*, Lec. Notes from the 2002 Saint-Flour summer school.