

# Theory of singular fibers of differentiable maps and characteristic classes of surface bundles

佐伯修 (九州大学大学院数理学研究院) \*  
山本卓宏 (北海道大学大学院理学研究科) †

## 1 序文

$M, N$  を  $C^\infty$  級多様体とし,  $f : M \rightarrow N$  を  $C^\infty$  級写像<sup>1</sup>とする.  $f$  の写像としての振る舞いを調べるには,  $f$  の「特異点」を調べることがどうしても必要になる. 実際  $f$  の特異点が, 多様体  $M, N$  の幾何学的に重要な情報を担っていることが多いからである.

普通「特異点」と言ったときには, 定義域多様体 (英語ではしばしば **source** と言う)  $M$  の点  $x$  であって,

$$\text{rank}(df_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N) < \min\{\dim M, \dim N\}$$

を満たすものとを言う. しかし, 写像の大域的振る舞いを調べるにはこの意味での特異点を調べるだけでは不十分である. たとえば,  $f$  がはめ込み (したがって上の意味で特異点を持たない) であっても, その 2 重点, 3 重点, 一般に  $m$  重点 (すなわち, 値域多様体 (英語ではしばしば **target** と言う) の点  $y \in N$  であって,  $f^{-1}(y)$  がちょうど  $m$  個の点からなるもの) を調べないと, その写像の振る舞いがわかったとは言えないであろう.

さて, はめ込みのように

$$\dim M \leq \dim N$$

のときは,  $f$  が十分に一般的な写像 (特異点論ではこのような写像をしばしば **generic** と言う) であれば, target の点の逆像は常に有限個の点からなることが知られている. したがって, target の点の逆像の近くでの写像の振る舞いを調べるには, その有限個の点の近くでの写像の振る舞い<sup>2</sup>を調べれば十分である. このよう

---

\*Osamu SAEKI, e-mail: saeki@math.kyushu-u.ac.jp

†Takahiro YAMAMOTO, e-mail: taku\_chan@math.sci.hokudai.ac.jp

<sup>1</sup>以下,  $f$  は**プロパー**, すなわちコンパクト集合の逆像は常にコンパクトである, と仮定する.

<sup>2</sup>有限個の点の近くでの写像の振る舞いをきちんと定式化したものは, **多重写像芽** と呼ばれる.

な対象の研究は特異点論においては盛んに行われてきており、研究のための道具も豊富にある。

では次元の関係が

$$\dim M > \dim N$$

となっているときはどうであろうか？この場合、target の点  $y \in N$  の  $f$  による逆像は、たとえ  $f$  が generic であってももはや有限個の点からなるとは限らず<sup>3</sup>、一般には正の次元を持ったCW複体となる。したがって、写像  $f : M \rightarrow N$  の振る舞いを調べるには、 $y \in N$  に対して、正の次元を持った集合に沿った写像芽<sup>4</sup>

$$f : (M, f^{-1}(y)) \rightarrow (N, y) \quad (1.1)$$

の振る舞いを調べる必要が生じる。本講演の題目にある**特異ファイバー**(singular fiber) とは、特に  $y \in N$  が特異値のとき（すなわち、 $f^{-1}(y)$  が  $f$  の特異点を含むとき）の写像芽(1.1)を意味する。

本講演は第I部と第II部からなる。第I部(§2–§4)では、上のような意味での  $C^\infty$  級写像の特異ファイバーの理論の概略を解説する。第II部(§5–§7)ではその応用として、閉曲面をファイバーとする  $C^\infty$  級ファイバー束の特性類が得られることを述べ、その具体例として第1 MMM 類が捕らえられることを解説する。

以下特に断らない限り多様体は  $C^\infty$  級、写像も  $C^\infty$  級とする。

## 2 特異ファイバーの分類

$M, N$  を  $C^\infty$  級多様体とし、

$$C^\infty(M, N) = \{f : M \rightarrow N \mid C^\infty \text{ 級写像}\}$$

に Whitney  $C^\infty$  位相（たとえば[4, 6, 7, 16]等を参照）を入れた空間を考える。 $f \in C^\infty(M, N)$  が**安定写像**(stable map) であるとは、 $f$  のある開近傍  $U$  が  $C^\infty(M, N)$  で取れて、 $U$  に含まれる任意の写像  $g : M \rightarrow N$  が次の意味で  $f$  と  $C^\infty$  右左同値 ( $C^\infty$  right-left equivalent) であるときを言う。 $f$  と  $g$  が  $C^\infty$  右左同値であるとは、ある微分同相写像  $\Phi : M \rightarrow M$ ,  $\varphi : N \rightarrow N$  が存在して、図式

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\Phi} & M \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ N & \xrightarrow{\varphi} & N \end{array}$$

が可換となる<sup>5</sup>ときを言う。

---

<sup>3</sup>ただし、1点の逆像に含まれる特異点の個数は有限個である。

<sup>4</sup>写像芽の正確な定義は述べない。ここでは、 $f^{-1}(y)$  の十分小さな近傍への制限写像と思っていただいて構わない。詳細はたとえば[6, 7, 16]等を参照。

<sup>5</sup>ここで与えているのは、正確には  $C^\infty$  級安定写像の定義である。 $\Phi, \varphi$  が  $C^r$  級微分同相写像として取れるときは、 $f$  は  $C^r$  安定写像であると言う。

§1で言及したgenericな写像としては、本講演では（主に）上の意味での安定写像を考えるものとする。なお、安定写像全体は写像空間  $C^\infty(M, N)$  の中で開集合をなすが、稠密になるかどうか<sup>6</sup>は次元対  $(\dim M, \dim N)$  のみによって決まることが知られている（Mather [12]による<sup>7</sup>）。稠密になる次元対は **nice dimensions** と呼ばれている。たとえば  $\dim N \leq 5$  ならば常に nice dimensions であることが知られている（このあたりのことについては [15] が参考になる）。

安定写像はたとえば次のように特徴付けられる。

**命題 2.1**  $M$  を 4 次元多様体、 $N$  を 3 次元多様体、 $f : M \rightarrow N$  をプロパーな  $C^\infty$  級写像とする。 $f$  が安定写像であるためには次が満たされることが必要十分である。

(i) 各  $q \in M$  に対し、 $q \in M$  のまわりの局所座標系  $(x, y, z, w)$ 、 $f(q) \in N$  のまわりの局所座標系  $(X, Y, Z)$  が存在して、次のいずれかが満たされる：

$$(X \circ f, Y \circ f, Z \circ f)$$

$$= \begin{cases} (x, y, z), & q : \text{正則点}, \\ (x, y, z^2 + w^2), & q : \text{定値折り目特異点}, \\ (x, y, z^2 - w^2), & q : \text{不定値折り目特異点}, \\ (x, y, z^3 + xz - w^2), & q : \text{カスプ}, \\ (x, y, z^4 + xz^2 + yz + w^2), & q : \text{定値スワロウテイル}, \\ (x, y, z^4 + xz^2 + yz - w^2), & q : \text{不定値スワロウテイル}. \end{cases}$$

(ii)  $S(f) = \{q \in M \mid \text{rank } df_q < 3\}$  と置くと、(i) よりこれは  $M$  の 2 次元部分多様体となる。このとき各  $r \in f(S(f))$  に対して  $f^{-1}(r) \cap S(f)$  は高々 3 点からなり、そこでの写像芽

$$f|_{S(f)} : (S(f), f^{-1}(r) \cap S(f)) \rightarrow (N, r)$$

は図 1 のいずれかと  $C^\infty$  右左同値である。

次に、§1 で登場したファイバー（すなわち (1.1) の形の写像芽）の間に自然な同値関係を導入しよう。

**定義 2.2**  $f_i : M_i \rightarrow N_i$  ( $i = 0, 1$ ) を  $C^\infty$  級多様体の間の  $C^\infty$  級写像とする。 $y_i \in N_i$  に対して、 $y_0$  上のファイバーと  $y_1$  上のファイバーが  $C^\infty$  同値（あるいは  $C^0$  同値）であるとは、 $y_i$  の  $N_i$  におけるある開近傍  $U_i$  と、微分同相写像（あるいは同相写像） $\tilde{\varphi} : (f_0)^{-1}(U_0) \rightarrow (f_1)^{-1}(U_1)$  と  $\varphi : U_0 \rightarrow U_1$  で  $\varphi(y_0) = y_1$  となるものが存在して、図式

$$\begin{array}{ccc} ((f_0)^{-1}(U_0), (f_0)^{-1}(y_0)) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & ((f_1)^{-1}(U_1), (f_1)^{-1}(y_1)) \\ f_0 \downarrow & & \downarrow f_1 \\ (U_0, y_0) & \xrightarrow{\varphi} & (U_1, y_1). \end{array}$$

<sup>6</sup>正確には、プロパーな  $C^\infty$  級写像全体のなす写像空間  $C_{\text{pr}}^\infty(M, N)$  の中で、プロパーな安定写像全体のなす集合が稠密になるかどうか、ということ。

<sup>7</sup>ただし、 $C^0$  安定写像全体は常に稠密であることが知られている。たとえば [1] 参照。

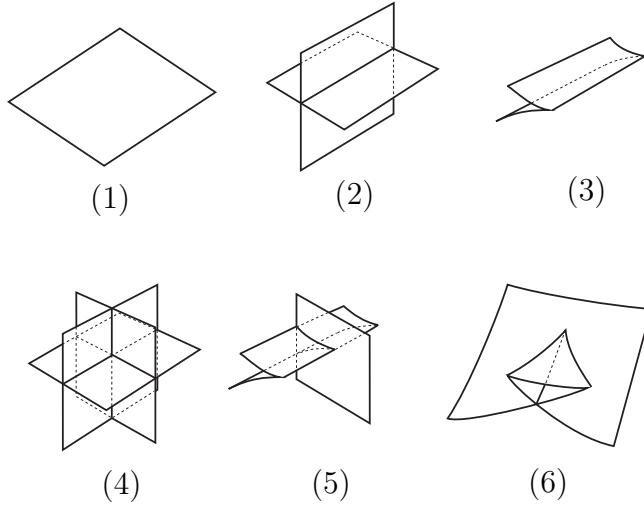


図 1:  $f|_{S(f)}$  に現れる多重写像芽 (の 3 次元多様体  $N$  における像)

が可換になるときを言う.

安定写像の特異ファイバーは次のように分類できることが知られている ([10, 11, 19] 参照).

**定理 2.3** (1)  $n = 2$  または  $n = 3$  とする.  $n$  次元多様体から  $n - 1$  次元多様体へのプロパーな安定写像の特異ファイバーは、図 2 の特異ファイバーといいくつかの非特異  $S^1$  ファイバーの非交和に  $C^\infty$  同値である. (ただし  $n = 2$  のときは  $\kappa = 1$  のもののみ.)

(2) 向き付け可能な 4 次元多様体から 3 次元多様体へのプロパーな安定写像の特異ファイバーは、図 3 の特異ファイバーといいくつかの非特異  $S^1$  ファイバーの非交和に  $C^\infty$  同値である.

なお、表の中に現れる  $\kappa$  は、対応する特異ファイバーが上に乗っている target の点全体の集合（これは target の部分多様体となる）の余次元を表す. たとえば、余次元  $\kappa$  が target の次元と等しい特異ファイバーは離散的に現れるわけである.

なお、これらのリストでは 1 点の逆像の「絵」しか描かれていないように見えるが、実はこれらの「絵」がある意味で同じ<sup>8</sup>であれば、(I<sup>0</sup> と III<sup>c</sup> の例外を除いて) 互いに  $C^\infty$  同値であることが証明される. そこで、「絵」をもつてして  $C^\infty$  同値類を表すことにしてある. I<sup>0</sup> と III<sup>c</sup> の「絵」については、どちらも 1 点を表しているが、特異点のタイプが異なるので、それを表現するために黒丸と黒四角を用いて区別してある.

こうした分類よりたとえば、定理 2.3 の状況においては、特異ファイバーの  $C^\infty$  同値による分類と  $C^0$  同値による分類はまったく同じであることがわかる [19]. (これは特異点論的・技術的には大変重要である.)

---

<sup>8</sup>正確には、多様体の部分集合として微分同相、ということ.

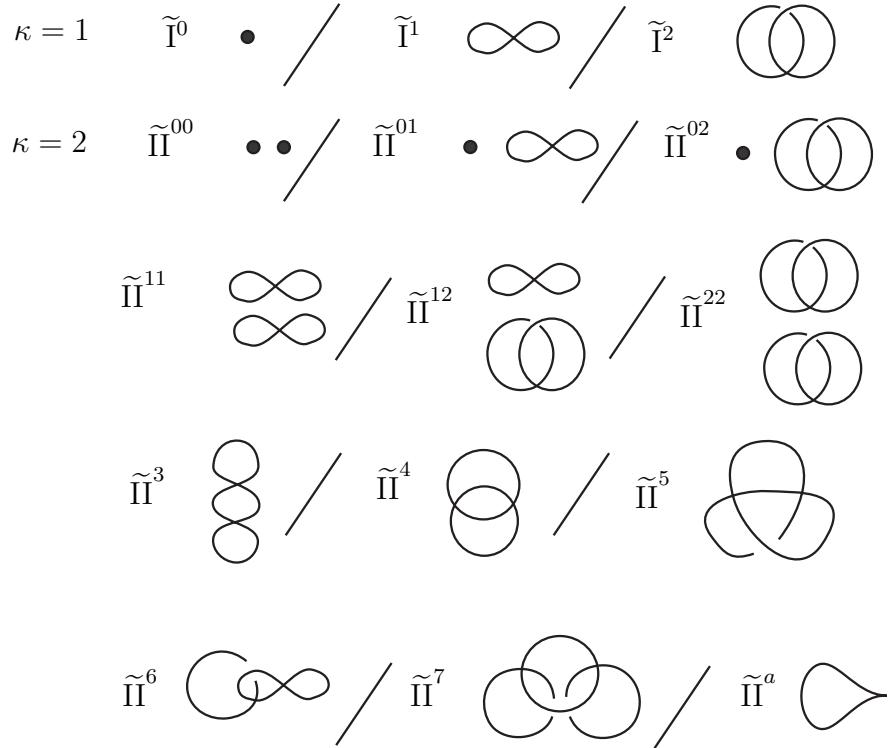


図 2: 2, 3 次元多様体から 1, 2 次元多様体へのプロパーな安定写像に現れる特異ファイバーのリスト

なお, source の 4 次元多様体が必ずしも向き付け可能でないときや, あるいは 5 次元多様体から 4 次元多様体への安定写像に対しても特異ファイバーの分類が得られている ([20, 24, 25] 参照).

### 3 符号数公式

ここでは向き付けられた4 次元多様体  $M$  から (必ずしも向き付けられていない) 3 次元多様体  $N$  へのプロパーな安定写像  $f : M \rightarrow N$  を考える. 定理 2.3(2) より, 全部で 19 種類の離散的に現れるファイバーがある. このうち III<sup>8</sup> 型ファイバーが次の意味で大変重要である.

**定理 3.1 ([20])** (1)  $M$  の向きを使って,  $f$  の各 III<sup>8</sup> 型ファイバーに符号 ( $= \pm 1$ ) が定義できる. (これは  $M$  の向きを逆にすると符号が逆になるという性質を持つ.)  
 (2) 特に  $M$  が閉多様体のときは,  $f$  に現れる III<sup>8</sup> 型ファイバーの符号の総和は,  $M$  の符号数 (signature) に等しい.

III<sup>8</sup> 型ファイバーの符号は具体的には次のように定義する. 簡単のため,  $y \in N$  に対し  $f : (M, f^{-1}(y)) \rightarrow (N, y)$  が III<sup>8</sup> 型で,  $f^{-1}(y)$  が連結であるとする. 点  $y$  の

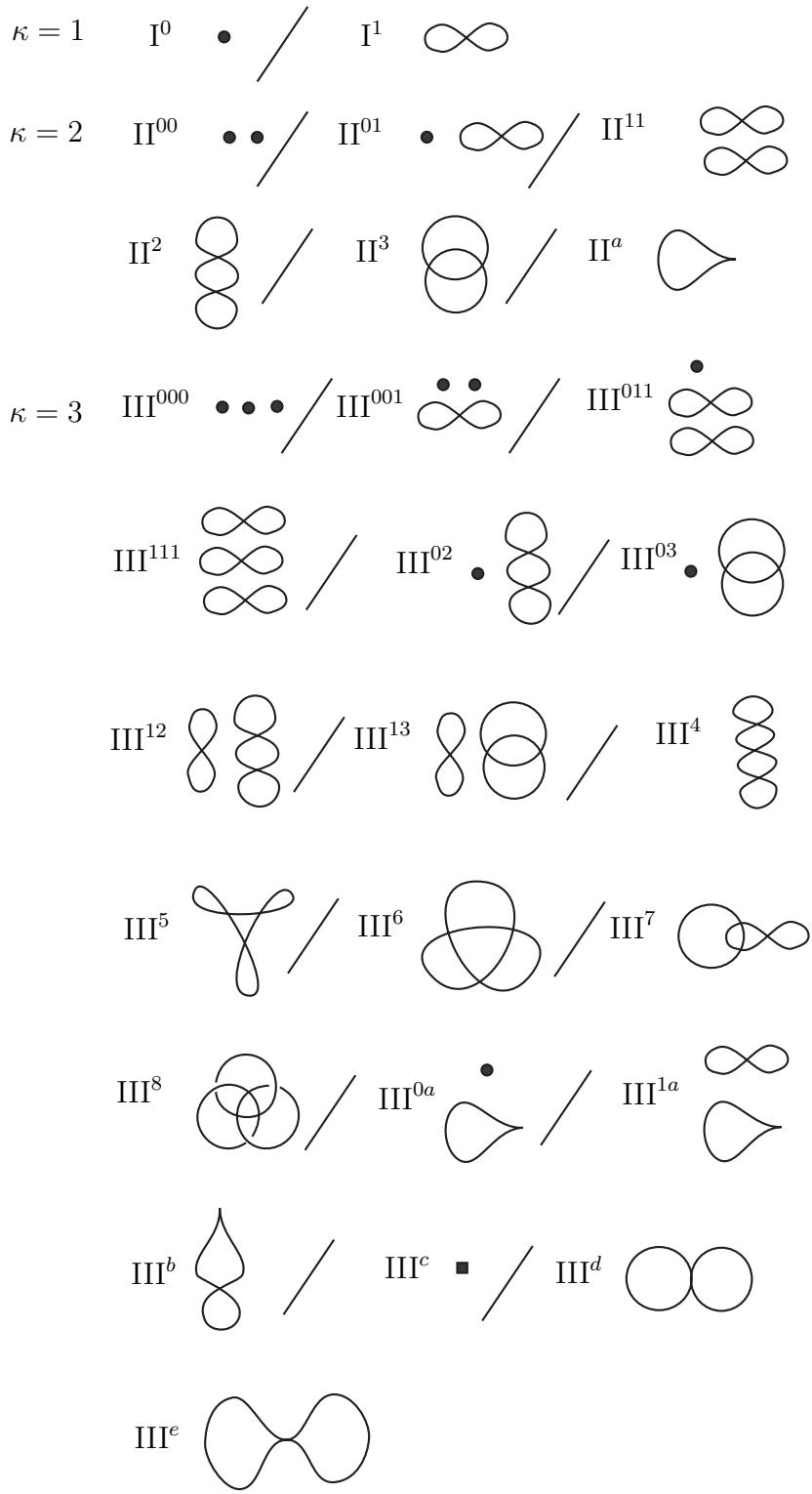


図 3: 向き付け可能な4次元多様体から3次元多様体へのプロパーな安定写像に現れる特異ファイバーのリスト

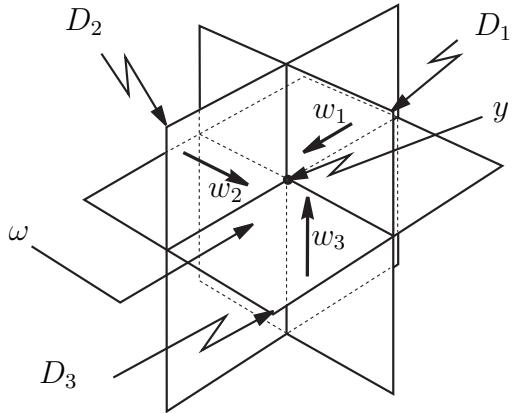


図 4:  $\omega$ に向かう 3枚のシートからの法ベクトル  $w_i$

まわりで  $N$  に一時的に局所的な向きを指定しておく。すると、 $M$  の向きを使って  $f^{-1}(y)$  の正則点集合（6本の辺からなる）に自然に向きが決められる。すると、これにより  $f^{-1}(y)$  に含まれる3つの特異点に円順列が定められる。ところでこれら3つの特異点はすべて不定値折り目特異点（命題 2.1 参照）であり、 $y$  の近くでの  $f(S(f))$  は、図 1(4) のように、それぞれの特異点に1枚ずつのシート  $D_i$  が対応して合計3枚のシートが一般の位置で交わっているようなものになる。すると全部で8つの領域が  $y$  のまわりにできるが、そのうち  $f$  による逆像が連結になる領域（全部で4つある）のどれかを選び（それを  $\omega$  とする）、そちらに向かって3枚のシート  $D_i$  から法ベクトル  $w_i$  を立てる。3枚のシートにはファイバーの向き付けから円順列が定まっていたから、その順番に法ベクトルを並べる。そのとき、それが最初に一時的に決めた  $y$  のまわりの  $N$  の局所的な向きと一致すれば符号を +1, 一致しなければ符号を -1 と定める（図 4 参照）。これは一時的に決めた  $N$  の局所的な向きや、4つの領域のうちのどれを選ぶか等によらず well-defined であることが確かめられる。しかも  $M$  の向きを逆にすると、符号も逆になることが容易に確かめられる。

Hirzebruch の符号数定理（たとえば [13] 参照）より、向き付けられた閉4次元多様体  $M$  の符号数の3倍は、 $M$  の第1 Pontrjagin 数に一致する。実は上の定理はこのことを踏まえて、一般次元に拡張できる。そのことを以下解説しよう。

$f : M \rightarrow N$  を  $\dim N - \dim M = -1$  なる多様体間の  $C^\infty$  級写像とする。このとき、III<sup>8</sup>( $f$ ) で、 $N$  の点  $y$  で、写像芽  $f : (M, f^{-1}(y)) \rightarrow (N, y)$  が III<sup>8</sup> 型である<sup>9</sup> もの全体のなす  $N$  の部分集合を表す。 $f$  が十分に generic であれば、これは  $N$  の余次元 3 の部分多様体である。

**定義 3.2** 多様体間の  $C^\infty$  級写像  $f : M \rightarrow N$  (ただし、 $\dim M > \dim N$  とする) が向き付けられているとは、それを特異点集合の補空間に制限した写像のすべて

<sup>9</sup>正確には、定理 2.3(2) に現れる III<sup>8</sup> 型ファイバーの suspension と、非特異  $S^1$  ファイバーを除いて  $C^0$  同値になるもの、の意である。詳細は [21] を参照。

の（正則）ファイバーがきれいに向き付けられているときを言う。

$C^\infty$  級写像  $f : M \rightarrow N$  が向き付けられていれば、 $\text{III}^8(f)$  の法束が向き付けられることがわかる。実際、法方向に 3 次元の円板  $D^3$  を考え、その逆像  $f^{-1}(D^3)$ （これは 4 次元多様体である）に写像を制限して、中心に現れる  $\text{III}^8$  型ファイバーの符号が  $+1$  になるように、逆像  $f^{-1}(D^3)$  に向きを入れ、さらに正則ファイバーの向きを使って  $D^3$  に向きを定められるのである。このとき、 $\text{III}^8(f)$  の閉包について次が証明できる。

**定理 3.3 ([21])**  $M$  を  $n$  次元多様体、 $N$  を  $n - 1$  次元多様体で、 $f : M \rightarrow N$  をプロパーで generic な  $C^\infty$  級写像<sup>10</sup>とする。さらに、 $f$  が向き付けられているとすると、 $\text{III}^8(f)$  の閉包は  $N$  内の（closed support の）co-oriented cycle をなし、その表すホモロジー類の Poincaré 双対の 3 倍は、捻れを除いて  $f_! p_1(M) \in H^3(N; \mathbb{Z})$  に一致する。（ $M$  が閉多様体のときは、compact support のコホモロジー  $H_c^3(N; \mathbb{Z})$  で考える。）ここで、 $p_1(M) \in H^4(M; \mathbb{Z})$  は  $M$  の第 1 Pontrjagin 類であり、 $f_!$  は  $f$  の誘導する Gysin 準同型を表す。

## 4 特異ファイバーの隣接関係と普遍複体

ここでは、定理 3.1, 3.3 の証明のアイデアを説明するため、特異ファイバーの普遍複体の理論について簡単に解説しよう。（詳細は [19, 20] 等を参照。）

$f : M \rightarrow N$  を  $C^\infty$  級多様体間の安定写像としよう。すると、一般に  $f$  の特異ファイバーは孤立して現れるわけではない。一つの特異ファイバーのまわりにはそれと同じファイバー、あるいは異なるファイバーが隣接していることが一般的である。たとえば  $M$  が向き付け可能な 4 次元多様体で  $N$  が 3 次元多様体のとき、 $\text{III}^8$  型の特異ファイバー（図 3 参照）のまわりには、図 5 のように、種々のファイバーが現れる。

こうした隣接関係を正確に調べれば、特異ファイバーの間の相互関係が見えてくる。それをさらに定式化したものが以下に説明する「特異ファイバーの普遍複体」という概念である。

特異ファイバーの普遍複体を構成するためには、考える**特異ファイバーのクラス**  $\tau$  と、そうした写像に現れるファイバーの間の**同値関係**  $\rho$  で、良い性質を持つものを用意する必要がある。このとき、各  $\kappa$  に対して、「余次元」  $\kappa$  の特異ファイバーの  $\rho$  に関する同値類全体が生成する、形式的  $\mathbb{Z}_2$  ベクトル空間を考え、それを  $C^\kappa(\tau, \rho)$  と書く。すると、特異ファイバーの隣接関係を用いて、準同型

$$\delta_\kappa : C^\kappa(\tau, \rho) \rightarrow C^{\kappa+1}(\tau, \rho)$$

---

<sup>10</sup>より正確には、ここでは Thom-Boardman generic と言われる写像を指す。正確には [4, 21] 等を参照。

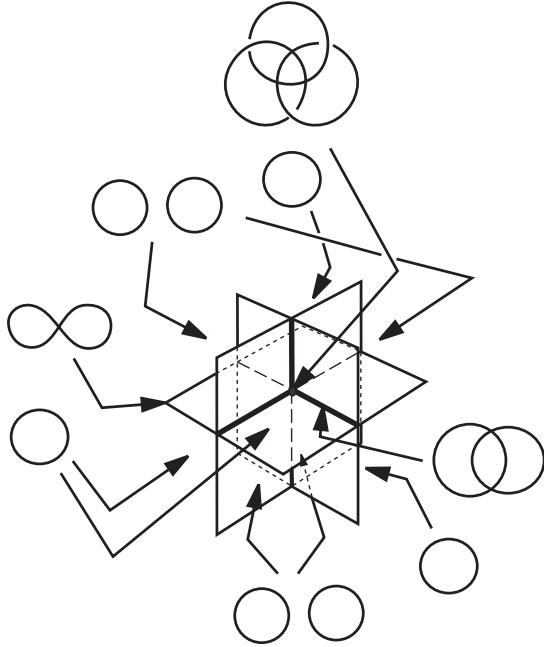


図 5:  $\text{III}^8$  型ファイバーの近くに現れるファイバー達

が  $\delta_{\kappa+1} \circ \delta_\kappa = 0$  となるように定義できる。こうしてできるコチェイン複体

$$\cdots \rightarrow C^\kappa(\tau, \rho) \xrightarrow{\delta_\kappa} C^{\kappa+1}(\tau, \rho) \xrightarrow{\delta_{\kappa+1}} C^{\kappa+2}(\tau, \rho) \rightarrow \cdots$$

を、**特異ファイバーの普遍複体**<sup>11</sup>と呼ぶ。なお、特異ファイバーのクラスや同値関係によっては、 $\mathbb{Z}_2$  係数ではなく  $\mathbb{Z}$  係数で定義できることもある。(このあたりの詳細は [19, 20] を参照。)

実は定理 3.1 は、この特異ファイバーの普遍複体の概念を用いて証明できる。まず特異ファイバーのクラス  $\tau_0$  としては、 $n$  次元の向き付けられた多様体から  $n-1$  次元多様体へのプロパーな安定写像に現れる特異ファイバーで、source の向きを使って「符号」が定義できるもの全体を考える。同値関係  $\rho_0$  としては、非特異  $S^1$  ファイバーを無視した  $C^0$  同値関係（で「符号」を保つもの）を考える。

すると、次が証明できる。

**命題 4.1** (1) 向き付けられた 4 次元多様体から 3 次元多様体へのプロパーな安定写像に現れる特異ファイバーで、source の向きを用いて「符号」が定義できるのは、 $\text{III}^5$  型、 $\text{III}^7$  型、 $\text{III}^8$  型の 3 つのみである。

(2) 特異ファイバーの普遍複体  $C^*(\tau_0, \rho_0)$  は  $\mathbb{Z}$  係数で定義でき、その 3 次元コホモロジ一群は無限巡回群であって、 $\text{III}^8$  型ファイバーの同値類によって生成される。

---

<sup>11</sup>これは、Vassiliev[26] による、写像芽の特異点や多重写像芽の特異点に対する普遍複体の一般化に相当する。Kazarian [8] や大本 [17] の仕事も参照。

のことと、普遍複体のコホモロジー類が、特異写像のコボルディズム<sup>12</sup>不変量を与える、という一般論 ([19] を参照) より、向き付けられた 4 次元閉多様体  $M$  から  $\mathbb{R}^3$  への安定写像  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  の  $\text{III}^8$  型ファイバーの代数的個数 (符号の総和) は多様体  $M$  の同境類のみによることがわかる。しかもそれにより、向き付けられた 4 次元多様体の同境群  $\Omega_4$  から  $\mathbb{Z}$  への準同型

$$\varphi_{\text{III}^8} : \Omega_4 \rightarrow \mathbb{Z}$$

が定義できることがわかる。同様に、多様体の符号数を対応させる準同型

$$\varphi_{\text{sign}} : \Omega_4 \rightarrow \mathbb{Z}$$

も定義できる ( $\varphi_{\text{sign}}$  は同型写像であることが知られている)。

一方、ある安定写像  $f_0 : \mathbb{C}P^2 \# 2\overline{\mathbb{C}P^2} \rightarrow \mathbb{R}^3$  で、 $\text{III}^8$  型ファイバーをちょうど一つ持ち、その符号が  $-1$  であるものが構成できる ([19, 20] を参照)。この 4 次元多様体は  $\Omega_4 \cong \mathbb{Z}$  の生成元を代表し、しかも符号数は  $-1$  である。よって  $\varphi_{\text{III}^8} = \varphi_{\text{sign}}$  となることがわかる。Target が  $\mathbb{R}^3$  でなく一般の 3 次元多様体のときも、古典的なボルディズム理論を用いてほぼ同様に証明できる。

定理 3.3 については、 $\text{III}^8(f)$  の閉包が cycle をなすことは、特異ファイバーの普遍複体の理論を用いて証明される。その Poincaré 双対が  $p_1$  で記述できることは、定理 3.1 とホモロジー論における普遍係数定理や、Thom [23] による、ホモロジー類の多様体からの写像による実現定理等を用いて証明される。

## 5 曲面束

次に、これまでの話を応用して曲面束の特性類が構成できることに話題をうつそう。

[9] の中で Kazarian は、 $S^1$  束のトポロジーを、全空間上に generic な関数をとることで研究している。詳しく言うと、底空間の点で、その上に乗っているファイバーに関数を制限したものが、安定 Morse 関数<sup>13</sup>でなくなるような点に注目する。この方法で Kazarian は、 $S^1$  上のある種の安定でない関数（に対応する底空間の点）に符号 ( $= \pm 1$ ) を付け、その符号和が  $S^1$  束の Chern-Euler 数に一致することを示している。

これと同様のことを今度は曲面束に対して考えてみよう。多様体  $B$  を底空間とし、閉曲面  $S$  をファイバーとする曲面束<sup>14</sup> ( $S$  束)  $\pi : E \rightarrow B$  と、 $E$  上の generic

<sup>12</sup> 特異写像のコボルディズムという概念は Rimányi と Szűcs [18] によって定式化された。

<sup>13</sup> 安定 Morse 関数とは、臨界点がすべて非退化（すなわち、Hesse 行列が非退化）であり、すべての臨界点が異なる値を持つ関数のことである。

<sup>14</sup> 構造群は、 $S$  が向き付け可能なのときは、 $S$  の向きを保つ自己微分同相全体のなす群  $\text{Diff}^+ S$  であり、 $S$  が向き付け不可能であるときは、自己微分同相全体のなす群  $\text{Diff } S$  であるとする。

な関数  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  を考える. このとき, 底空間  $B$  の部分集合  $\Sigma(f)$  を次のように定義する:

$$\Sigma(f) = \{y \in B \mid f_y \text{ は安定 Morse 関数でない}\}.$$

ここで  $y \in B$  に対して  $f_y$  とは,  $f$  を点  $y$  上のファイバー  $\pi^{-1}(y) \cong S$  に制限して得られる関数  $f|_{\pi^{-1}(y)}$  のことである. このようにして,  $f$  が与えられると,  $B$  に  $\Sigma(f)$  という「模様」が入る.

本講演の第 II 部では, 全空間上の generic な関数からできる  $\Sigma(f)$  を用いて曲面束のトポロジーを調べた結果わかったことを紹介する. 以下特に断らない限り,  $S$  で閉曲面を表すものとし,  $S$  束の底空間としては多様体のみを考える.  $C^\infty$  級関数  $g : S \rightarrow \mathbb{R}$  に対して,  $g$  の臨界値で安定でないものの<sup>15</sup>を退化臨界値と呼び, それを全て集めた集合を  $dC_g$  と書く<sup>16</sup>ことにする.

## 6 Morse 関数の退化

前節の状況を“極荒く”見ると, 底空間でパラメータ付けされた曲面上の関数族の研究と言うことができる. その関数族は,  $\Sigma(f)$  の上では退化したものになっているわけである. この退化の様子を特異ファイバーによって特徴付けることを考えよう. そのためにはまず, **写像の特異ファイバー**<sup>17</sup>の観点から, 曲面上の  $C^\infty$  級関数の間に同値関係を導入する. さらに, 同値類の隣接関係から得られる普遍複体のコホモロジ一群の生成元の幾何学的な意味を考えてゆくことにする.

**定義 6.1**  $S$  上の二つの  $C^\infty$  級関数  $g_i : S \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 0, 1$ ) が**特異ファイバー**に関して**同値**であるとは, それぞれの退化臨界値の間の全単射  $\sigma : dC_{g_0} \rightarrow dC_{g_1}$  が存在して, 任意の  $q \in dC_{g_0}$  に対して,  $g_0^{-1}(q)$  と  $g_1^{-1}(\sigma(q))$  が非特異  $S^1$  ファイバーを無視して “ $C^\infty$  同値”<sup>18</sup>になるときを言う. このとき, 関数  $g : S \rightarrow \mathbb{R}$  に対して, その同値類を  $\bar{g}$  と書くことにする.

一方, 特異ファイバーを用いて同値関係を入れているので, 同値類を以下のようににも書くことができる:

$$\bar{g} = [\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_\ell].$$

---

<sup>15</sup>退化した臨界点に対応しているか, または複数の臨界点に対応しているような臨界値のことを指す.

<sup>16</sup> $S$  がコンパクトであるので, 以下の状況では  $dC_g$  は常に有限集合である.

<sup>17</sup>本講演の第 I 部で登場したプロパーで generic な写像  $f : M^n \rightarrow N^{n-1}$  の (ある程度良い性質を持った) 特異ファイバー  $f : (M^n, f^{-1}(y)) \rightarrow (N^{n-1}, y)$ ,  $y \in N^{n-1}$ , が与えられると, ある境界付きでコンパクトな曲面  $S$  と,  $n - 2$  次元円板  $D^{n-2}$  でパラメータ付けられた  $S$  上の関数族  $g_t : S \rightarrow D^{n-2}$ ,  $t \in D^{n-2}$ , が存在して,  $f$  の  $y$  上の特異ファイバーが,  $F : S \times D^{n-2} \rightarrow I \times D^{n-2}$ ,  $F(x, t) = (g_t(x), t)$ , の原点  $(0, 0)$  上の特異ファイバーと  $C^\infty$  同値になることが知られている (詳しくは [11] を参照). よって, 曲面上の関数の特異ファイバーの  $C^\infty$  同値による分類と, 次元差  $-1$  のプロパーで generic な写像の特異ファイバーの  $C^\infty$  同値による分類は, ある程度一致する.

<sup>18</sup>正確には,  $g_i$  を含むような関数族の, 脚注 17 の意味での特異ファイバーに関する, 定義 2.2 の意味での  $C^\infty$  同値の意味である. 以下の状況では, 与えられた関数は常にある関数族に自然に埋め込まれているので, この定義で問題はない.

ここで,  $\ell$  は  $dC_g$  の元の個数を表し, その  $i$  番目の元  $q_i$  に対して,  $\mathfrak{F}_i$  で,  $g$  の  $q_i$  上のファイバー (の  $C^\infty$  同値類) を表す (ただし, 順序に意味はない).

**注意 6.2**  $S$  束  $\pi : E \rightarrow B$ ,  $E$  上の generic な関数  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  と, 関数の同値類  $\bar{g}$  を考える. このとき, 底空間の点  $y \in B$  で,  $f_y = f|_{\pi^{-1}(y)}$  が同値類  $\bar{g}$  に含まれるような点  $y$  を集めた集合は, (空集合でない限り) 余次元が一定であるような  $B$  の部分多様体になる. この余次元を  $\bar{g}$  の **余次元** と定め,  $\kappa(\bar{g})$  と書くことにする.

$n$  次元  $C^\infty$  級多様体上の  $C^\infty$  級  $S$  束を全て集めた集合を  $\mathfrak{B}(n, S)$  と書く.  $\kappa$  を整数とする.  $S$  上の関数の同値類で,  $\mathfrak{B}(n, S)$  に属する曲面束の全空間上のある generic な関数をあるファイバーに制限したものとして得られ, なおかつ余次元が  $\kappa$  であるもの全てを考え, それらを基底とする形式的  $\mathbb{Z}_2$  ベクトル空間を

$$C^\kappa(\mathfrak{B}(n, S))$$

と書く. 余次元  $\kappa$  の関数の同値類がない場合 (例えば  $\kappa < 0$  または  $\kappa > n$  なるとき) は  $C^\kappa(\mathfrak{B}(n, S)) = 0$  とする.

このとき, 各同値類の隣接関係<sup>19</sup>を用いて,  $\mathbb{Z}_2$  線型写像

$$\delta_\kappa : C^\kappa(\mathfrak{B}(n, S)) \rightarrow C^{\kappa+1}(\mathfrak{B}(n, S))$$

を定義することができる. これは,  $\delta_{\kappa+1} \circ \delta_\kappa = 0$  を満たし, コチェイン複体

$$\mathcal{C}^*(\mathfrak{B}(n, S)) = (C^\kappa(\mathfrak{B}(n, S)), \delta_\kappa)_\kappa$$

が得られる. このコチェイン複体を **曲面束の generic な関数のなす特異ファイバーの普遍複体** と呼び, その  $\kappa$  次元コホモロジ一群を  $H^\kappa(\mathfrak{B}(n, S))$  と書くことにする. 実はこのコホモロジ一群に対して,

- $\kappa < n$  であれば,  $H^\kappa(\mathfrak{B}(n+1, S)) = H^\kappa(\mathfrak{B}(n, S))$  と思え,
- $\kappa = n$  であれば,  $H^\kappa(\mathfrak{B}(n+1, S)) \subset H^\kappa(\mathfrak{B}(n, S))$  と思える

ことがわかる. 正確に言うと,  $S$  束の suspension<sup>20</sup>の誘導する準同型を通して同型になる, または像が含まれるということである.

次に, このコチェイン複体のコホモロジ一群の生成元を使って曲面束の不変量を取り出してみよう.

まず,  $S$  束  $\pi : E \rightarrow B$  と generic な関数  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  を考える. このとき,  $\kappa$  次元 コチェイン (すなわち  $C^\kappa(\mathfrak{B}(n, S))$ ,  $n = \dim B$ , の元)

$$c = \sum_{\kappa(\bar{g})=\kappa} n_{\bar{g}} \bar{g} \quad (n_{\bar{g}} \in \mathbb{Z}_2)$$

<sup>19</sup>正確には, 各同値類に対応する底空間の部分多様体どうしの隣接関係, という意味である.

<sup>20</sup> $S$  束  $\pi : E \rightarrow B$  の **suspension** とは,  $S$  束  $\pi \times \text{id}_{\mathbb{R}} : E \times \mathbb{R} \rightarrow B \times \mathbb{R}$  のことである.

に対して,  $B$  の部分集合

$$c(\pi, f) = \{y \in B \mid f_y \text{ は, } n_{\bar{g}} \neq 0 \text{ なるある同値類 } \bar{g} \text{ に含まれる}\}$$

を考える. この部分集合の閉包  $\overline{c(\pi, f)}$  は,  $c$  が cocycle であれば,  $B$  の (closed support の)  $\mathbb{Z}_2$  cycle になることがわかる.

このとき,  $S$  束  $\pi : E \rightarrow B$  と generic な関数  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  に対して, 準同型写像

$$\varphi_{\pi, f} : H^\kappa(\mathfrak{B}(n, S)) \rightarrow H^\kappa(B; \mathbb{Z}_2), \quad \varphi_{\pi, f}([c]) = [\overline{c(\pi, f)}]^*$$

がきちんと定義されることが確かめられる. (ここで,  $[\overline{c(\pi, f)}]^*$  は,  $\overline{c(\pi, f)}$  が表す (closed support の)  $\mathbb{Z}_2$  ホモロジー類の Poincaré 双対のことである.)

さらに,  $n$  次元多様体上の曲面束  $\pi : E \rightarrow B$  に対して, 準同型  $\varphi_{\pi, f}$  の制限  $\varphi_{\pi, f}|_{H^\kappa(\mathfrak{B}(n+1, S))}$  は, generic な関数  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  の選び方に依らないことがわかる. (これは,  $n+1$  次元多様体上の  $S$  束のコホモロジ一群に制限していることが本質的である.) そこで

$$\varphi_\pi = \varphi_{\pi, f}|_{H^\kappa(\mathfrak{B}(n+1, S))} : H^\kappa(\mathfrak{B}(n+1, S)) \rightarrow H^\kappa(B; \mathbb{Z}_2)$$

と書くことにする.

この  $\varphi_\pi$  は次を満たす.

1.  $n$  次元多様体  $B$  上の  $S$  束  $\pi_i : E_i \rightarrow B$  ( $i = 0, 1$ ) に対して, もし  $\pi_0$  と  $\pi_1$  が束同型であれば,  $\varphi_{\pi_0} = \varphi_{\pi_1}$  が成り立つ.
2.  $\alpha \in H^\kappa(\mathfrak{B}(n+1, S))$  ( $\kappa \leq n$ ) を固定したとき,  $n$  次元多様体上の  $S$  束  $\pi : E \rightarrow B$  に対して,  $\varphi_\pi(\alpha) \in H^\kappa(B; \mathbb{Z}_2)$  を対応させる写像は well-defined であり, “自然性<sup>21</sup>” を満たす.

したがって, “ $n+1$  次元多様体上の曲面束の generic な関数のなす特異ファイバーの普遍複体” のコホモロジ一群の生成元が  $n$  次元多様体上の曲面束の特性類を定義することがわかる.

なお, これまですべて  $\mathbb{Z}_2$  係数で考えてきたが, 向き付けをうまく考慮すれば  $\mathbb{Z}$  係数でも同様の考察ができるることを注意しておく.

## 7 具体的な例

ここでは, 向き付け可能な種数  $g$  ( $\geq 0$ ) の閉曲面  $\Sigma_g$  をファイバーとする曲面束の特性類について考える.

まず, 非安定 Morse 関数が現れる底空間上の点集合の形は, 次のように決定される. (次の補題はファイバーとなる曲面が向き付け不可能でも成り立つ.)

---

<sup>21</sup>  $S$  束の間の束写像があれば, 対応するコホモロジー類は, 底空間の間の写像がコホモロジーに誘導する準同型で写りあう, ということ.

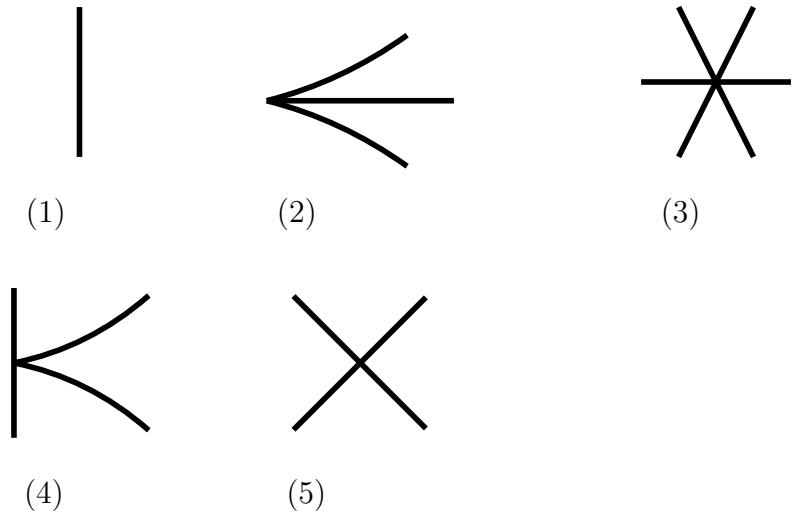


図 6:  $\Sigma(f)$  の局所的な形

**補題 7.1** 曲面上の  $\Sigma_g$  束  $\pi : E \rightarrow B$  と generic な関数  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  を考える. このとき,  $\Sigma(f) \subset B$  は各点  $y \in \Sigma(f)$  のまわりで局所的には図 6 のいずれかの形である :

- (1)  $f_y$  は退化臨界値をちょうど 1 つ持ち, それがカスプ型臨界点か, または 2 つの非退化臨界点に対応する,
- (2)  $f_y$  は退化臨界値をちょうど 1 つ持ち, それがスワロウテイル型臨界点に対応する,
- (3)  $f_y$  は退化臨界値をちょうど 1 つ持ち, それが 3 つの非退化臨界点に対応する,
- (4)  $f_y$  は退化臨界値をちょうど 1 つ持ち, それが 1 つのカスプ型臨界点と 1 つの非退化臨界点に対応する,
- (5)  $f_y$  はちょうど 2 つ退化臨界値を持ち, それぞれは上の (1) で記述したものである.

3 次元多様体上の曲面束に対しても同様の補題があるがここでは省略する. このとき,  $C^\kappa(\mathfrak{B}(3, \Sigma_g))$  の生成元は以下のようになる.

- $\kappa = 0$  : [安定 Morse 関数].
- $\kappa = 1$  :  $[\mathfrak{F}]$ ,  $\mathfrak{F}$  は余次元 2 の特異ファイバー (図 3 の  $\kappa = 2$  のものを参照).
- $\kappa = 2$  :  $[\mathfrak{G}], [\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1]$ ,  $\mathfrak{G}$  は余次元 3 の特異ファイバー,  $\mathfrak{F}_i$  ( $i = 0, 1$ ) は余次元 2 の特異ファイバー (図 3 の  $\kappa = 3, \kappa = 2$  のものを参照).

$\kappa = 3$  については省略する.

このとき, 次を得る.

**命題 7.2**  $\Sigma_g$  をファイバーとする曲面束の generic な関数のなす特異ファイバーの普遍複体

$$\mathcal{C}^*(\mathfrak{B}(3, \Sigma_g)) = (C^\kappa(\mathfrak{B}(3, \Sigma_g)), \delta_\kappa)_\kappa$$

のコホモロジ一群は以下のようになる :

- $H^0 \cong \mathbb{Z}_2$  (生成元は [安定 Morse 関数] である<sup>22)</sup> ,
- $H^1 \cong \mathbb{Z}_2$  (生成元は [ $\text{II}^a$ ] である) ,
- $H^2 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$  (生成元は [ $\text{III}^8$ ] と [ $\text{II}^a, \text{II}^a$ ] である) .

前節の議論から, これらのコホモロジ一群の生成元は, 1, 2 次元多様体上の曲面束の特性類を定義する. しかし, ここで得られた特性類が非自明である保証はない. 実際,  $S^1$  上の  $\Sigma_g$  束に対して, [ $\text{II}^a$ ] の与える特性類はいつでも零である.

しかし,  $\mathbb{Z}$  係数で議論を行うと,  $n$  次元多様体上の 向き付けられた  $\Sigma_g$  束と [ $\text{III}^8$ ] については, 次のことが証明できた.

**定理 7.3 ([22])**  $n$  次元  $C^\infty$  級多様体  $B$  を底空間とし,  $\Sigma_g$  ( $g \geq 0$ ) をファイバーとする向き付けられた  $C^\infty$  級曲面束  $\pi : E \rightarrow B$  と,  $E$  上の generic な関数  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  を考える. このとき,  $\text{III}^8(\pi, f)$  の閉包は  $B$  の余次元 2 の co-oriented cycle であり, それが表す (closed support の) ホモロジー類の Poincaré 双対 ( $H^2(B; \mathbb{Z})$  の元である) の 3 倍は, 摂れを除いて曲面束  $\pi$  の第 1 MMM 類と一致する.

MMM 類 (Mumford-Morita-Miller 類) の定義や性質については, たとえば [14] を参照していただきたい. なお, MMM 類が非自明になる例があることは良く知られている.

定理 7.3 の証明方法はだいたい以下の通りである. まず命題 4.1 の類似で, 曲面束の generic な関数のなす特異ファイバーの普遍複体を  $\mathbb{Z}$  係数で構成する.  $\text{III}^8$  に対応するコチェインが cocycle になることから,  $\text{III}^8(\pi, f)$  の閉包が  $B$  の co-oriented cycle になることがわかる. 一方, 向き付けられた曲面上の向き付けられた  $\Sigma_g$  束の全空間の符号数は, 第 1 MMM 類で記述できている (たとえば [14] 参照).  $\dim B = 2$  で  $B$  が向き付け可能のときは, このことと,

$$(\pi, f) : E \rightarrow B \times \mathbb{R}$$

が安定写像になることを用い, これに対して定理 3.1 を適用すれば定理 7.3 が証明できる. 一般次元のときは, 定理 3.3 の証明方法を真似ることにより証明される.

---

<sup>22</sup>正確には, [安定 Morse 関数] が cocycle となり, その表すコホモロジー類が生成元となる, ということ. 以下同様.

ところで、具体例の前までの一般論は、向き付け可能でない曲面（例えば  $\mathbb{R}P^2$  やクラインの壺など）をファイバーとするような曲面束に対しても適用できるものである。しかし、向き付け可能でない曲面を対象とするときは、臨界値を引き戻した特異ファイバーの分類に、ある**大域的**な観点を加えないと、普遍複体のコホモロジ一群から意味のある量が取り出せないことがわかっている。一方、向き付け不可能な曲面に対しても、MMM 類の定義の類似で特性類を定義することができる。そこで、次の問題を与えておく。

**問題 7.4** 向き付け不可能な曲面をファイバーとする曲面束の特性類を、全空間上の generic な関数を用いて記述せよ。

上記問題に関しては、現在著者らが研究中である。

**注意 7.5** 最近、Igusa [5], Goette [2, 3] らにより、一般の多様体をファイバーとするファイバー束に対し、その全空間上の generic な関数を用いて特性類の研究が活発に行われているようである。こうした仕事と我々の今回の仕事<sup>23</sup>との関係については、現時点ではまったくの未知である。

## 参考文献

- [1] C. G. Gibson, K. Wirthmüller, A. A. du Plessis and E. J. N. Looijenga, *Topological stability of smooth mappings*, Lecture Notes in Math., Vol. 552, Springer–Verlag, Berlin, New York, 1976.
- [2] S. Goette, *Morse theory and higher torsion invariants I*, preprint, 2001, math.DG/0111222.
- [3] S. Goette, *Morse theory and higher torsion invariants II*, preprint, 2003, math.DG/0305287.
- [4] M. Golubitsky and V. Guillemin, *Stable mappings and their singularities*, Grad. Texts in Math., Vol. 14, Springer–Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1973.
- [5] K. Igusa, *Axioms for higher torsion invariants of smooth bundles*, preprint, 2005, math.KT/0503250.
- [6] 泉屋周一, 石川剛郎『応用特異点論』共立出版, 1998.

---

<sup>23</sup>我々の §6 の考察は、曲面束だけではなく、一般の多様体をファイバーとするファイバー束に対しても適用できることに注意。

- [7] 泉屋周一, 佐野貴志, 佐伯修, 佐久間一浩『幾何学と特異点』特異点の数理, 第1巻, 共立出版, 2001.
- [8] M. È. Kazaryan, *Hidden singularities and the Vasil'ev homology complex of singularity classes* (in Russian), Mat. Sb. **186** (1995), 119–128; English translation in Sb. Math. **186** (1995), 1811–1820.
- [9] M. E. Kazarian, *The Chern-Euler number of circle bundle via singularity theory*, Math. Scand. **82** (1998), 207–236.
- [10] L. Kushner, H. Levine and P. Porto, *Mapping three-manifolds into the plane I*, Bol. Soc. Mat. Mexicana **29** (1984), 11–33.
- [11] H. Levine, *Classifying immersions into  $\mathbb{R}^4$  over stable maps of 3-manifolds into  $\mathbb{R}^2$* , Lecture Notes in Math., Vol. 1157, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [12] J. N. Mather, *Stability of  $C^\infty$  mappings: VI, the nice dimensions*, Lecture Notes in Math., Vol. 192, Springer-Verlag, Berlin, 1971, pp. 207–253.
- [13] J. W. Milnor and J. D. Stasheff, *Characteristic classes*, Ann. of Math. Studies, Vol. 76, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.; Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1974.
- [14] 森田茂之『特性類と幾何学』岩波講座, 現代数学の展開 7, 岩波書店, 1999.
- [15] 西村尚史, 福田拓生『特異点と分岐』特異点の数理, 第2巻, 共立出版, 2002.
- [16] 野口広, 福田拓生『初等カタストロフィー』共立出版, 1976 (復刊 2002年).
- [17] T. Ohmoto, *Vassiliev complex for contact classes of real smooth map-germs*, Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ. Math. Phys. Chem. **27** (1994), 1–12.
- [18] R. Rimányi and A. Szűcs, *Pontrjagin-Thom-type construction for maps with singularities*, Topology **37** (1998), 1177–1191.
- [19] O. Saeki, *Topology of singular fibers of differentiable maps*, Lecture Notes in Math., Vol. 1854, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2004.
- [20] O. Saeki and T. Yamamoto, *Singular fibers of stable maps and signatures of 4-manifolds*, preprint, July 2004, available at <http://www.math.kyushu-u.ac.jp/~saeki/res.html>.
- [21] O. Saeki and T. Yamamoto, *Singular fibers and characteristic classes*, preprint.

- [22] O. Saeki and T. Yamamoto, *Singular fibers of differentiable maps and characteristic classes of surface bundles*, in preparation.
- [23] R. Thom, *Quelques propriétés globales des variétés différentiables*, Comment. Math. Helv. **28** (1954), 17–86.
- [24] T. Yamamoto, *Classification of singular fibers and its applications* (in Japanese), Master Thesis, Hokkaido Univ., March 2002.
- [25] T. Yamamoto, *Classification of singular fibres of stable maps of 4-manifolds into 3-manifolds and its applications*, preprint, May 2005.
- [26] V. A. Vassilyev, *Lagrange and Legendre characteristic classes*, Translated from the Russian, Advanced Studies in Contemporary Mathematics, Vol. 3, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1988.