Homework

14
Due on January ~~15~~, 2011

Answer the following 10 Problems of the text:

1. Problem 2.4.3
2. Problem 3.4.3
3. Problem 4.4.6
4. Problem 4.4.7
5. Problem 5.4.2
6. Problem 5.4.6
7. Problem 6.4.5
8. Problem 7.4.2
9. Problem 7.4.4
10. Problem 8.4.1

Sang Youl Lee
Department of Mathematics
Pusan National University
Busan 609-735, Republic of Korea
e-mail: sangyoul@pusan.ac.kr

2.4. 第2講の補充・発展問題

問 2.4.1　図式 D が $c(D) \leqq 3$ をみたすような結び目は，自明結び目または三葉結び目のいずれかであることを示せ．

問 2.4.2　図式 D が $c(D) \leqq 3$ をみたすような 2 成分絡み目は，自明絡み目，三葉結び目と自明結び目の分離和，あるいはホップの絡み目のいずれかであることを示せ．

問 2.4.3　図 2.20 の絡み目図式 D の複雑度 $cd(D)$ を求めよ．

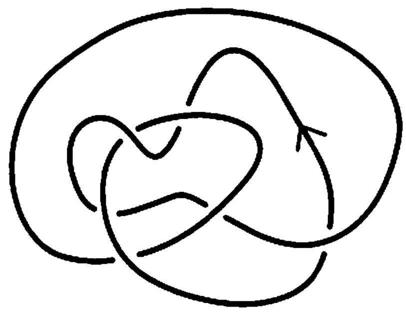


図 2.20

問 2.4.4　図 2.21 のブレイドを初等ブレイドの積で表せ．

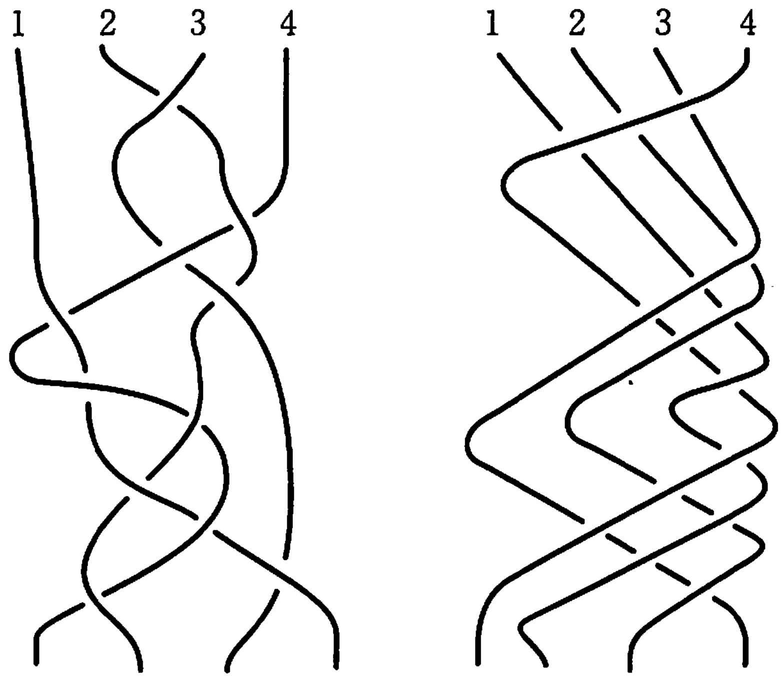


図 2.21　ブレイド

3.4. 第3講の補充・発展問題

問 3.4.1　ホップの絡み目に種数 0 のザイフェルト曲面をはってみよ．また，三葉結び目と 8 の字結び目に種数 1 のザイフェルト曲面をはってみよ．

問 3.4.2　絡み目 L の種数 $g(L)$ と自然種数 $g_c(L)$ は，それぞれ L の連結とは限らないようなザイフェルト曲面 F の合計種数 $g(F)$ の最小値，連結とは限らないような図式 D のザイフェルト曲面の合計種数 $g(D)$ の最小値に等しいことを示せ．

問 3.4.3　図 3.11 に示された $\boldsymbol{R}^3$ における左ひねりと右ひねりのメービウスの帯は，（同位変形により）同じ形に変形できないことを示せ（付録の解答は 2006 年度当時の大阪府立天王寺高校 3 年生，糸数達弘，田中謙伍，田中勇介による[2]）．

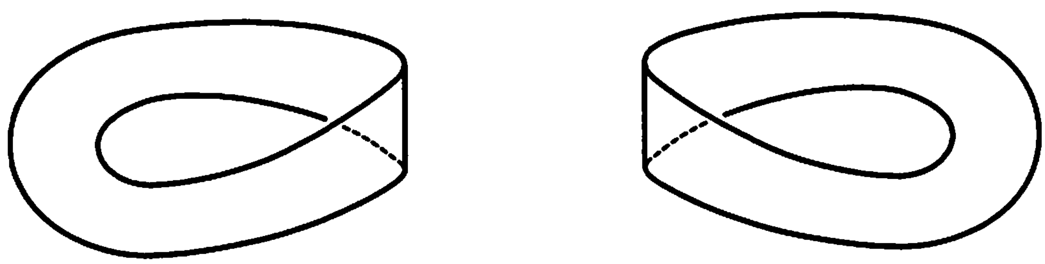


図 3.11　左ひねりと右ひねりのメービウスの帯

問 3.4.4　図 3.12 の a, b, c それぞれの絡み目の絡み数を求めよ．

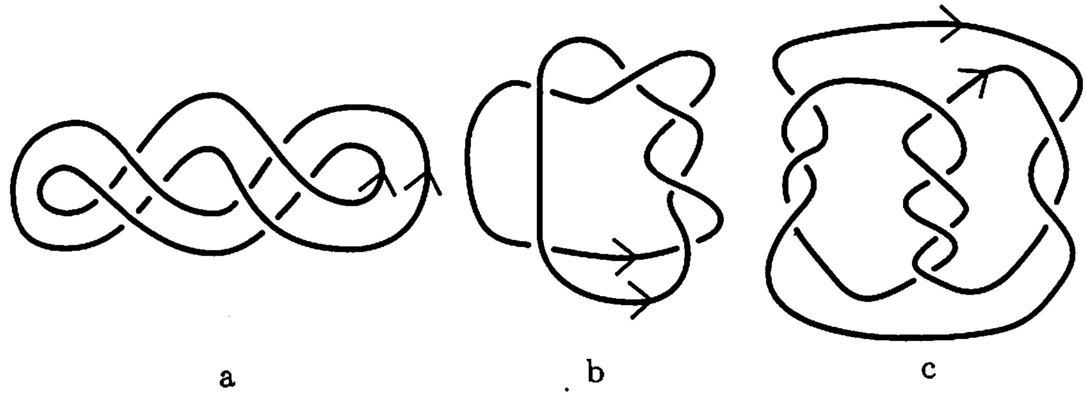
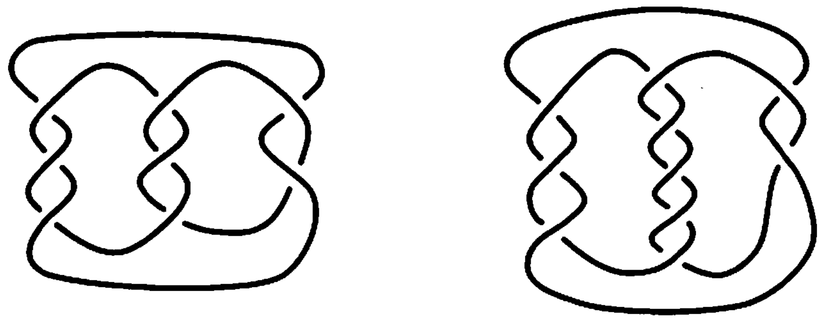


図 3.12

[2] 彼らは，同高校の SSH 事業の一環として大阪市立大学数学科 1 回生対象の 2006 年度前期講義「数学入門セミナー 結び目の数学」で結び目理論を学んだ．彼らの証明は，2006 年度 SSH 生徒研究発表会の文部科学大臣賞奨励賞の栄誉に輝いた．



a　　　　b

図4.7

問4.4.4　n 橋絡み目はせいぜい n 成分の絡み目で，ちょうど n 成分をもつときには各結び目成分は自明であることを示せ．

問4.4.5　図 4.8 の 2 橋結び目の型を求め，もろて型かどうかを判定せよ．

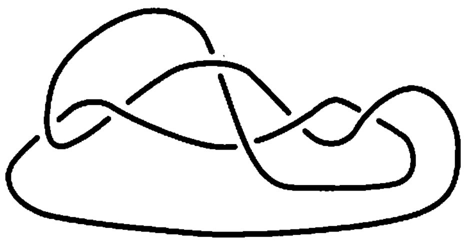


図4.8

問4.4.6　結び目でないような 2 橋絡み目の 2 つの成分は，有限回のセル移動で交換できることを示せ．

問4.4.7　図 4.9 はプレッツェル結び目になることを示し，可逆的結び目かどうかを判定せよ．また，もろて型かどうかを判定せよ．

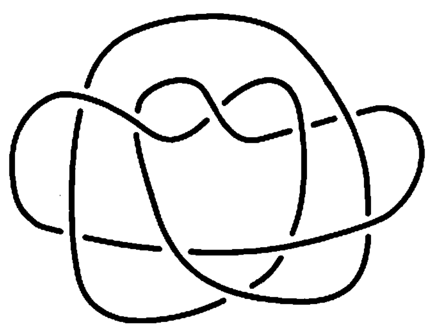


図4.9

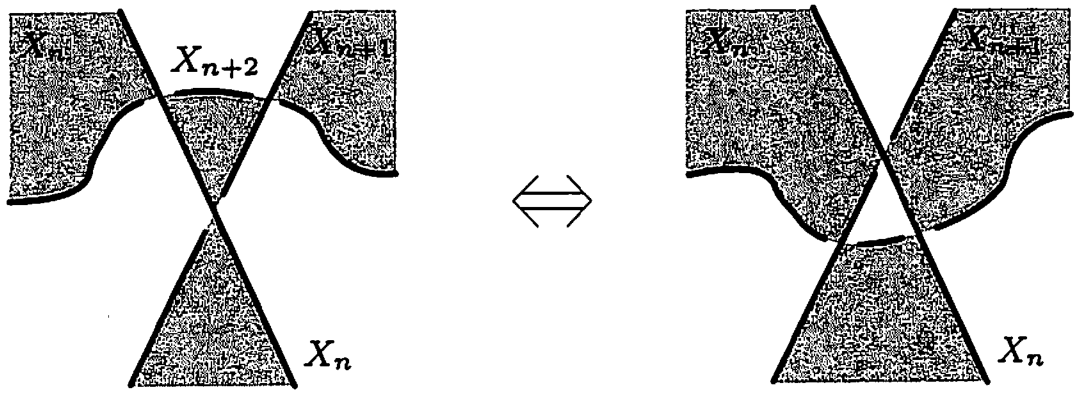


図 5.17

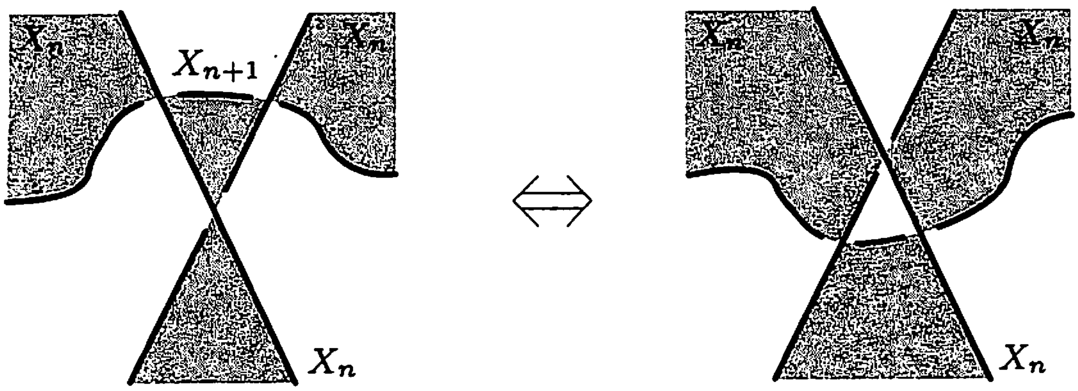


図 5.18

加え，$(m+2)$ 番横ベクトルを $(m+1)$ 番横ベクトルに加えて得られた行列はブロック和 $G' \oplus (-1)$ になるので，行列変形 (1), (2) により G と G' は移り合う．

こうして，すべての場合に，行列変形 (1), (2) により G と G' が移り合うことが示され，命題 5.3.2 の証明が完成する．□

5.4. 第 5 講の補充・発展問題

問 5.4.1　すべての絡み目は，同一の黒領域を結ぶ交差点がないような白黒彩色の連結図式をもつことを示せ．

問 5.4.2　(n,m) 型整数行列 A に対し，(1)–(4) を示せ．

(1) A のねじれ不変量 $k_*(A) = (k_1, k_2, \ldots, k_d)$ が存在し，かつ A により一意的に定まる．

(2) A が整数行列 B に同値ならば，$k_*(A) = k_*(B)$ となる．

(3) A の階数が r ならば，$n(A) = n - r$ となる．

(4) $n = m$ のとき，A の行列式 $\det A = \pm k_1 k_2 \ldots k_d$ となる．

問 5.4.3　整数行列 A のねじれ不変量 $k_*(A) = (k_1, k_2, \ldots, k_d)$ は命題 5.3.2 の行列変形で不変であることを示せ．

問 5.4.4　(m, n) 型整数行列 $A = (a_{ij})$ から 1 つの成分 a_{hk} を含む行と列を除いて得られる行列を A_{hk} で表す．各 i', j' に対して

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i'j} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij'} = 0$$

となるならば，A は基本変形により $A_{hk} \oplus (0)$ に変形できることを示せ．

問 5.4.5　つぎの等式を満たす 3 次正方整数行列 P で $\det P = \pm 1$ となるようなものを見出せ．

$$P^T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus (1)\right)P = (1) \oplus (-1) \oplus (1)$$

問 5.4.6　ツイスト結び目 K_n について，$d(K_n) = 1$, $k_1(K_n) = |2n+1|$ となることを示せ．

問 5.4.7　図 5.19 の五輪のマークのゲーリッツ不変量は $d = 4$ で，$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 2$ となることを示せ．

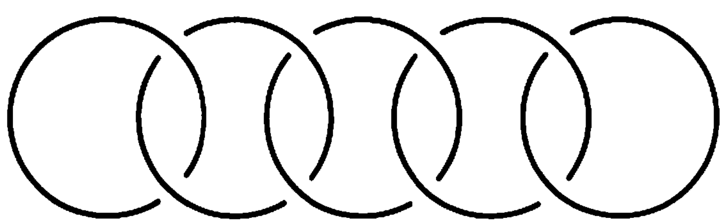


図 5.19

6.4. 第6講の補充・発展問題

問 6.4.1　素な交代絡み目は既約交代図式をもつことを示せ.

問 6.4.2　既約交代図式をもつ 2 つの絡み目 L, L' の任意の連結和 $L\#L'$ は，連結和に使用する L' の成分の向きを変えることを許すならば，必ず既約交代図式をもつことを示せ.

問 6.4.3　r 成分絡み目 L に対し，$A^{2r-2}V(L;A)$ は A^4 のローラン多項式になることを示せ.

問 6.4.4　r 成分絡み目 L に対し，$A^4=1$ とおくと，$V(L;A)=(-2A^2)^{r-1}$ となることを示せ.

問 6.4.5　自明でない 2 橋絡み目は，$a_1, a_2, \ldots, a_n$ のすべてが正整数となるような連結既約交代図式 $C(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ をもつことを示せ.

ここで，x は整数，$\mathbf{0}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ は横ベクトルで，$\mathbf{0}^T, \boldsymbol{v}^T$ はそれぞれ $\mathbf{0}, \boldsymbol{v}$ の転置縦ベクトルを表す．このとき，W は V の**行拡大** (row enlargement)，V は W の**行縮小** (row reduction) という．また，転置行列 W^T は V^T の**列拡大** (column enlargement)，V^T は W^T の**列縮小** (column reduction) という．

定義 7.3.1　正方整数行列 V と W が **S 同値** (S-equivalence) であるとは，W が V から基底変換，行拡大，行縮小，列拡大，列縮小の有限回の操作により得られることである．

S 同値は正方整数行列の間の同値関係になる．上記の V と W の関係式において，W の基底変換により，x, $\boldsymbol{u}$ はそれぞれ任意の整数，任意の横ベクトルとしてとれることを注意しておく．つぎの定理がザイフェルト行列の基本定理である．

定理 7.3.2　R^3 内の絡み目 L のすべてのザイフェルト行列は互いに S 同値になる．

証明　連結ザイフェルト曲面 F に同位変形や ∞-近傍移動を行っても，そのザイフェルト行列は基底変換を無視すれば変わらない．F' が F のハンドル拡大とすれば，F のザイフェルト行列の列拡大または行拡大であるような F' のザイフェルト行列を得る．命題 7.2.2 から結論が得られる．□

7.4. 第 7 講の補充・発展問題

問 7.4.1　図 7.9 に示された 2 個の穴あき 2-セル F 内の単純でないループ ℓ によって代表される整係数ホモロジー $H_1(F) = Z^2$ の元は原始元であるが，1 つの単純ループによって代表されないことを示せ．

問 7.4.2　図 7.10 に示されたザイフェルト曲面上の指定されたループに関するザイフェルト行列を求めよ．

問 7.4.3　n 次正方整数行列 V が r 成分絡み目のザイフェルト行列である必要十分条件は，$d(V - V^T) = n(V - V^T) = r - 1$ となることである．これを示せ．

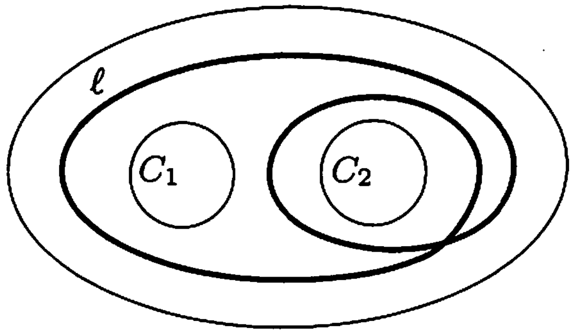


図 7.9

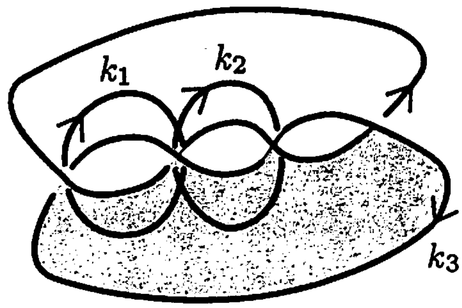


図 7.10

問 7.4.4　つぎの行列 V はザイフェルト行列であることを示し，V をザイフェルト行列にもつようなザイフェルト曲面を構成せよ．

$$V = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

問 7.4.5　r 成分絡み目の連結図式 D のザイフェルト曲面 $F(D)$ の種数 $g(D)$ は，D の交差数を c，ザイフェルト円周の数を s とするとき，つぎの式で与えられることを示せ．

$$g(D) = \frac{2+c-r-s}{2}$$

がなりたつ．つぎの系はザイフェルト行列の定義から得られる：

系 8.3.8

(1) $\sigma(L)+n(L)\equiv r-1 \pmod 2$ かつ $n(L)\leqq r-1$. ここで，r は L の成分数を表す．

(2) $\sigma_\alpha(L\# L')=\sigma_\alpha(L)+\sigma_\alpha(L')$, $\sigma_\alpha(L^*)=-\sigma_\alpha(L)$, $\sigma_\alpha(-L)=\sigma_\alpha(L)$.

8.4. 第8講の補充・発展問題

問 8.4.1　連結でないようなザイフェルト曲面をもつ絡み目 L のアレクサンダー多項式 $A(L;t)=0$ を示せ．

問 8.4.2　図 8.3における向きを変えたプロパー絡み目 L, L' について, $\mathrm{Arf}(L)=0$, $\mathrm{Arf}(L')=1$ となることを示せ．

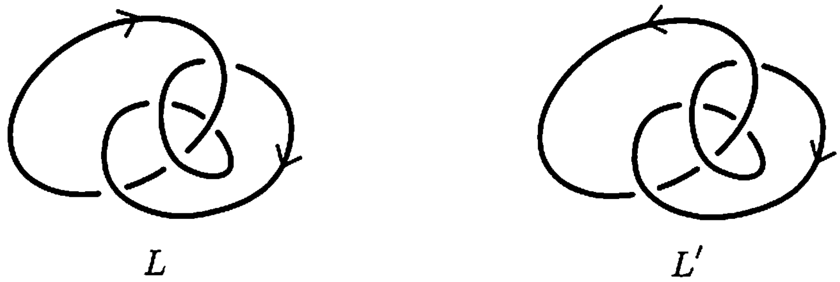


図 8.3

問 8.4.3　図 8.4 のザイフェルト曲面 F について，それぞれ $\mathrm{Arf}(F,\mathfrak{b})=0$, $\mathrm{Arf}(F,\mathfrak{b}')=1$ となるような Z_2-標準基底 $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}'$ を与えよ．

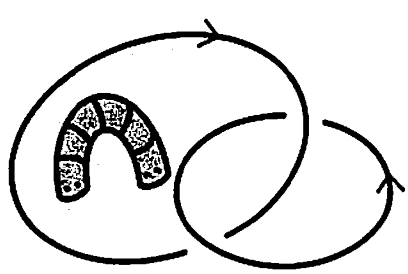


図 8.4