数学概論 2 演習

2007 年 6 月 7 日分

二宮 嘉行

[Nino 5] X がコンパクトな位相空間ならば，X の任意の無限部分集合 A は集積点をもつことを示せ．

[Nino 6] 位相空間 X_λ $(\lambda \in \Lambda)$ の直積空間 $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ において，無限個の X_λ がコンパクトでなければ X のコンパクト集合は内点を含まないことを示せ．

[Nino 7] $X = (0, 1)$ に対して $\mathcal{U} = \{(0, 1 - 1/n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ を開集合系とするような位相空間 $(X,\mathcal{U})$ を考え，次の (1) と (2) が同値ではないことを示せ．
(1) X の任意の点が，閉包がコンパクトとなるような開近傍を少なくとも一つもつ．
(2) X の任意の点が，コンパクトな近傍を少なくとも一つもつ．

注：教科書 p.138 には局所コンパクトの定義として上の (1) と (2) が書いてある．どちらを定義としてもその後の展開に問題はないということであり，両者が同値ということではない．ちなみに，位相空間がハウスドルフであれば両者は同値となる．以下では (2) を局所コンパクトの定義とする．

[Nino 8] f を局所コンパクト空間 X から位相空間 Y への開連続な全射写像とするとき，Y は局所コンパクトであることを示せ．

[Nino 9] 位相空間 X_λ $(\lambda \in \Lambda)$ の直積空間を X とするとき，次の (1) と (2) は同値であることを示せ (ヒント: **[Nino 6]** と **[Nino 8]** の結果)．
(1) X は局所コンパクトである．
(2) 各 X_λ は局所コンパクトでかつ有限個以外の X_λ はコンパクトである．

[Nino 10] f をコンパクトなハウスドルフ空間 X から X 自身への連続写像とし，また $K_1 = X$，$K_n = f(K_{n-1})$ $(n \geq 2)$ とおいて $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ とする．
(1) K は空でないコンパクト集合となることを示せ．
(2) $f(K) \subset K$ を示せ．
(3) $x \in K$ に対し，$\bigcap_{n=1}^{\infty} \{f^{-1}(x) \cap K_n\}$ は空とならないことを示せ．
(4) $f(K) \supset K$ を示せ．