

数学概論 2 演習

2007 年 5 月 10 日分

二宮 嘉行

[Nino 1] $f: X \rightarrow Y$ が開連続写像かつ全射のとき, 以下を示せ.

- (1) B を X の基とするととき, $\{f(B) | B \in \mathcal{B}\}$ は Y の基になる.
- (2) X が第二可算公理を満たすとき, Y も第二可算公理を満たす.

[Nino 2] Y を位相空間 X の部分空間とするととき, 以下を示せ.

- (1) B を X の基とするととき, $\{B \cap Y | B \in \mathcal{B}\}$ は Y の (相対位相の) 基になる.
- (2) X が第二可算公理を満たすとき, Y も第二可算公理を満たす.

[Nino 3] $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ を直積空間とし (直積位相を考える), また $A_\lambda \subset X_\lambda$ ($\lambda \in \Lambda$) とするととき, 以下を示せ.

- (1) Λ が有限集合ならば $\text{Int}(\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) = \prod_{\lambda \in \Lambda} \text{Int} A_\lambda$ が成り立つ.
- (2) Λ が無限集合ならば上は必ずしも成り立たない (右辺の方が大きくなる例がある).

[Nino 4] X を位相空間とし, また $F = \{f | f: X \rightarrow X \text{ 同相写像}\}$ とする. X 上の同値関係「 $x \sim x' \Leftrightarrow \exists f \in F; f(x) = x' (x, x' \in X)$ 」に対し, $p: X \rightarrow X/\sim$ をそれに基づく自然な射影とするととき, 以下を示せ.

- (1) X の開集合 U に対して $p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{f \in F} f(U)$ が成り立つ.
- (2) p は開写像である.