

数学概論 2 演習  
2007 年 6 月 21 日分  
中村 徹

[中村 12] 距離空間におけるコンパクト集合は有界閉集合であることを示せ .

[中村 13]  $(X, d)$  を距離空間とし,  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  を  $X$  上の点列とする . ある  $\alpha \in X$  が存在して  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, \alpha) = 0$  となるとき, 点列  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  は  $\alpha$  に収束するという .  $X$  のコンパクト部分集合  $A$  上の点列  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  は収束部分列を持つことを示せ (ヒント : 問題 [Nino 5]) .

[中村 14] 問題 [中村 4] の距離空間  $(\ell^1, d_1)$  を考える .  $\mathbf{0} = \{0\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^1$  に対し,  $\ell^1$  の部分集合  $A$  を  $A = \{x \in \ell^1 \mid d_1(x, \mathbf{0}) = 1\}$  で定める .

(1)  $A$  は有界閉集合であることを示せ .

(2)  $A$  はコンパクトでないことを示せ . (ヒント :  $\ell^1$  上の点列  $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$  で

$$x^{(n)} = \{x_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty}, \text{ ただし } x_n^{(n)} = 1, x_k^{(n)} = 0 (k \neq n)$$

で定められるものを考え, 問題 [中村 13] の結果を使う)

[中村 15] 実数の集合  $\mathbb{R}$  に対して, 部分集合族

$$\mathcal{B} = \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ かつ } a < b\}$$

によって生成される位相を与える (問題 [中村 10] を参照) . このとき  $\mathbb{R}$  は可分であり, 連結でないことを示せ .

[中村 16]  $X$  を位相空間,  $Y = \{0, 1\}$  を離散位相空間とする . このとき次の (i) と (ii) は同値であることを示せ .

(i)  $X$  は連結でない .

(ii)  $X$  から  $Y$  への連続な全射が存在する .

[中村 17] 次を示せ .

(1)  $\mathbb{R}$  の部分集合  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$  は連結でない .

(2)  $\mathbb{R}^2$  の部分集合  $\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2$  は弧状連結である .