数学概論２

２００７年6月１４日分

佐伯 修

６月７日実施の小テストについて

問題は「コンパクト空間の閉集合はコンパクトであることを示せ」でした．10点満点で採点し，平均点は1.6点でした．ちなみに10点満点は6人だけでした．

もともとの空間 X のコンパクト性が仮定にありますが，証明すべきなのはその閉集合 F のコンパクト性です．したがって，F を覆う X の開集合族を考えることから議論が始まります．なおこの問題は，５月３１日の講義で証明した定理 5.1.6 そのものでした．中間試験直後だったことも影響していると思いますが，残念ながら復習をしっかりしている人が少ないことが良くわかりました．

今後小テストでは，以前に講義で証明した基本的な事柄から出題してゆくつもりです．復習をしっかりすることを心がけて下さい．

練習問題

８４．X を位相空間とし，A をその部分集合とする．A が連結でないためには，X の開集合 U_1, U_2 で次を満たすものが存在することが必要十分であることを示せ．

$$U_1 \cap U_2 \cap A = \emptyset, \quad U_1 \cup U_2 \supset A, \quad U_1 \cap A \neq \emptyset \neq U_2 \cap A$$

８５．X, Y を互いに同相な位相空間とする．

(1) X がコンパクトであれば Y もそうであることを示せ．

(2) X が連結であれば Y もそうであることを示せ．

８６．1次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}$ の連結な部分集合は，1点または区間

$$[a,b],\ (a,b),\ (a,b],\ [a,b),\ (-\infty,+\infty),\ (-\infty,b],\ (-\infty,b)\ [a,+\infty), (a,+\infty)$$

$(-\infty < a < b < +\infty)$ に限ることを示せ．逆にこれらの集合はすべて連結であることも示せ．

８７．$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族としたとき，直積空間

$$X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

が連結となるためには，すべての $\lambda \in \Lambda$ について X_λ が連結となることが必要十分であることを示せ．

８８．(X,d) を距離空間とする．X の空でない部分集合 A の**直径** $\mathrm{diam}(A)$ を

$$\mathrm{diam}(A)=\sup\{d(x,y)\in\mathbf{R}\,|\,x,y\in A\}$$

で定める.（ただし，上記の集合が上に有界でないときは $\mathrm{diam}(A)=\infty$ と定める.）A が有界となるためには，$\mathrm{diam}(A)<\infty$ となることが必要十分であることを示せ.

８９．(X,d) をコンパクトな距離空間とする．$\mathcal{U}=\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を X の勝手な開被覆としたとき，ある実数 $\varepsilon>0$ が存在して，X の空でない任意の部分集合 A について（直径 $\mathrm{diam}(A)$ の定義については前問参照）

$$\mathrm{diam}(A)<\varepsilon\Longrightarrow A\subset U_\lambda\quad(\exists\lambda\in\Lambda)$$

が成り立つことを示せ.（この $\varepsilon>0$ を，開被覆 $\mathcal{U}$ の**ルベーグ数**という.）

９０．(X,d) を距離空間とし，A を X の部分集合とする．

(1) $d_A:A\times A\to\mathbf{R}$ を

$$d_A(a,b)=d(a,b)\quad(a,b\in A)$$

で定めると，d_A は A 上の距離関数となることを示せ.

(2) 距離空間 (A,d_A) の位相は，X の部分空間としての位相（相対位相）に一致することを示せ.

９１．X を位相空間とする．$x,y\in X$ に対して，ある連結な部分集合 $A\subset X$ で $x,y\in A$ となるものが存在するとき，$x\sim y$ と定める．この関係 “$\sim$” が X に同値関係を定めることを示せ.

９２．上の９１番における同値関係 “$\sim$” による同値類を X の**連結成分**という．特に，$x\in X$ を含む連結成分を

$$C_x=\{y\in X\,|\,y\sim x\}$$

と書く.

(1) C_x は x を含む連結部分集合すべての和集合と一致することを示せ.

(2) C_x はそれ自身連結であることを示せ.

(3) C_x が X の閉集合となることを示せ.

９３．上の９２番で定義した連結成分は X の閉集合となるが，必ずしも開集合とはならない．具体的な例を挙げよ.

Coffee Break

Beauty is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematics. G. H. Hardy

But, as for everything else, so for a mathematical theory — beauty can be perceived but not explained. A. Cayley