数学概論２

２００７年5月１７日分

佐伯 修

５月１０日実施の小テストについて

練習問題の２４番を解いてもらいました．定義だけ知っていればできる，基本的な問題でした．(1) 5 点，(2) 5 点，(3) 5 点，(4) 10 点の計 25 点満点で採点し，平均は 14.3 点で，最高点は 23 点でした．

平均点が 15 点を下回りました．教科書やノートを見て良い小テストで，しかも定義を写すだけで良い問題 (1)–(3) ができて 15 点ですから，これはかなり問題です．おそらく，定義がわかっていながら，それをきちんと「数学の言葉で」記述できなかった人が多かったのではないかと思います.

数学は自明なことの積み重ねだ，と前回のプリントに書きました．自分一人で数学を理解しようとするときはその考え方で構いません．しかし，**自分で理解したことを他人に伝えようとするときには，それなりの習慣に従う必要があります．** たとえば，数学的な言葉の定義をするときには，それなりの書き方があります．以下に解答例を書きます.

(1) $\mathcal{O}_X = \{\emptyset, X\}$

(2) $\mathcal{O}_Y = \{U \,|\, U \subset Y\}$

(3) 位相空間 X, Y の間の写像 $f : X \to Y$ が連続写像であるとは，Y の任意の開集合 U に対して，その逆像 $f^{-1}(U)$ が X の開集合になるときをいう．

これらは解答例であって，上のように書かなければならない，ということはありません．数学的に正しい書き方になっていれば良いのです.

たとえば (2) で，

$$\mathcal{O}_Y = \mathcal{P}(Y)$$

で済ませている人も多くいました．これでも正解としましたが，本来は $\mathcal{P}$ の意味を説明すべきです．せめて「べき集合」等の説明を書き加えて欲しかったです．というのは，$\mathcal{P}(Y)$ という記号はそれほど一般的ではなく，人によって異なる記号を使うかもしれないけれども，「べき集合」という言葉は誰でも使うものだからです.（このあたりの感覚を今皆さんが分からなくても気にする必要はありません．勉強してゆけば，次第に感覚が自然に身につきます.）

さて，さらに問題となるのが (4) です．(1)–(3) で定義を書いてもらったのは，それさえ理解できれば (4) ができるはずである，と私が思ったからです．解答例を書いておきます.

(4) ある y_0 があって，$f(x) = y_0$ $(\forall x \in X)$ とする．任意の開集合 $U \in \mathcal{O}_Y$ を取る．f が連続かどうかを見るために，$f^{-1}(U)$ が X の開集合かどうかを見よう．容

易にわかるように，

$$y_0 \in U \Longrightarrow f^{-1}(U) = X, \quad y_0 \notin U \Longrightarrow f^{-1}(U) = \emptyset$$

である．いずれにしてもこれらは X の開集合である．よって f は連続となる．

逆に，f が連続であるとしよう．すると，任意の $U \in \mathcal{O}_Y$ に対して $f^{-1}(U)$ は X の開集合となるが，X の開集合は空集合 $\emptyset$ と全体集合 X しかないので，$f^{-1}(U) = \emptyset$ または $f^{-1}(U) = X$ となる．今 X は空集合でないから，$x_0 \in X$ がある．すると $y_0 = f(x_0)$ に対して，$U_0 = \{y_0\}$ は Y の開集合であり，$f^{-1}(U_0) = f^{-1}(\{f(x_0)\}) \ni x_0$ ゆえ，$f^{-1}(U_0) \neq \emptyset$ である．したがって，$f^{-1}(\{y_0\}) = X$ となり，$f(X) = \{y_0\}$ となる．したがって，$\forall x \in X$ に対して $f(x) = y_0$ となることが示された．

満点はいませんでしたので，上の解答は各自で良く復習をしておいて下さい．

皆さんからの感想・質問等について

前回の小テストの際，講義についての感想・質問・要望等を書いてもらいました．その一つについて以下にコメントします．(番号は５月１０日のプリントからの続き番号です.)

学生１２．定義を覚えたあと，いろいろと練習問題をする場合，午後の授業の問題以外に出題はしてもらえるのでしょうか？なかなか「解く」となるとむずかしくて…

佐伯．すみませんが，質問の意味がわかりません…「午後」は「午前」の間違いでしょうか？

これまでは，確かに午前中の講義に関する問題をその日の午後に配っていました．今後は以前習った内容の問題も出して欲しいということでしょうか？そういうことであれば，少しは試みてみたいと思います．

中間試験について

５月３１日（木）の演習の時間に中間試験を行います．出題範囲は第 IV 章の分離公理までとします（教科書では§2.1–§2.4 に相当します．ただし，教科書に書いてあっても講義・演習で学習していない部分からは出題しない可能性が高いです）．なお，基本的な問題を出題します（問題のレベルとしては小テストくらい）．講義の内容を理解していれば容易に解けるものを主に出題します．

試験の際は，A4 版の用紙１枚の片面（両面は不可）に**定義のみを書いたもの**の持ち込みを認めます．したがって，定理等の証明を書いたり，練習問題の解答（定義を書く問題を除く）を書いたりしてはいけません．その用紙は答案と共に回収しますが，採点の対象にはしません．この用紙には**必ずボールペンで記入**して下さい．また，用紙の最上部に**氏名**，**学籍番号**を必ずわかりやすく書いて下さい．なお，**試験の答案は鉛筆**，**またはシャープペンシルで**書き，ボールペンは用いない

で下さい．これらの指示に従わなかった場合は，採点対象外とすることもあり得ますので，十分に注意して下さい．

中間試験が受験できない学生へ

中間試験が何らかの正当な理由で受験できない学生は，**中間試験実施日の１週間前まで**に理由とともに佐伯まで申し出て下さい．その場合，以下のレポート問題を解いてレポートとして６月２１日（木）までに提出すれば，その採点結果をもって中間試験の成績に代えるものとします．ただし，

$$（中間試験の平均点）\times（レポートの成績）/100$$

をもって中間試験の点数とします．したがって，満点のレポートであっても中間試験の平均点となりますので，注意して下さい．

レポート問題（中間試験が受験できない学生用：上記参照）

(1) X と Y を有限個の元からなる位相空間とする．X と Y が同相であれば，それらの開集合の個数は一致することを示せ．

(2) $X = \{a, b, c\}$ とする．X の位相 $\mathcal{O}_X$ であって，$\{a, b\}, \{b, c\}$ を含むものをすべて求めよ．

(3) 上で求めた位相により位相空間がいくつかできるが，それらのうちで同相となる位相空間の組をすべて求めよ．

成績について

成績は，中間試験，期末試験，演習での解答状況，小テスト等を総合的に評価する，と言ってきましたが，それらの総合成績に対する比率を以下のようにしたいと思います．

中間試験 20%，期末試験 40%，演習での解答状況 30%，小テスト 10%

また目安として，**演習問題は一人最低２題は解いて下さい**．１題しか解かなかった場合は試験の成績が良ければ合格可能ですが，１題も解かなかった場合は合格がかなり厳しくなります．注意して下さい．なお，演習問題は難易度によって点数に差を付けます.（難しい問題を１題解いた人の方が，簡単に解ける問題を１題解いた人よりも点数が高いようにする，ということです.）

練習問題

３８．(X, d) を距離空間で，任意の異なる２点 $x, y \in X$ に対して

$$d(x, y) \geq 1$$

となるものとする．このとき X に定まる位相は離散位相となることを示せ．

３９．ユークリッド空間 $\mathbf{R}^2$ の次の部分集合の内部と閉包を求めよ．

(1) $A = [0,1) \times [0,1)$

(2) $B = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x$ は有理数で y は無理数 $\}$

４０．練習問題１８番の位相空間 $(X, \mathcal{O})$ は，T_0 空間であるが T_1 空間でないことを示せ．

４１．T_1 空間であるがハウスドルフ空間でない位相空間の例を挙げよ．

４２．X を位相空間とする．X 上の任意の点 x とその点を含まない任意の閉集合 F に対して，開集合 U, V で

$$x \in U, \quad F \subset V, \quad U \cap V = \emptyset$$

となるものが存在するとき，X は T_3 **空間**であると言う．T_3 空間であるが T_1 空間とならない位相空間の例を挙げよ．

４３．X を位相空間とする．X の任意の互いに交わらない二つの閉集合 F_1, F_2 に対し，開集合 U, V で

$$F_1 \subset U, \quad F_2 \subset V, \quad U \cap V = \emptyset$$

となるものが存在するとき，X は T_4 **空間**であると言う．T_4 空間であるが T_1 空間とならない位相空間の例を挙げよ．

４４．T_1 空間であり，かつ T_3 空間である位相空間は**正則**であるという．また，T_1 空間であり，かつ T_4 空間である位相空間は**正規**であるという．

$$\text{正規空間} \Longrightarrow \text{正則空間} \Longrightarrow \text{ハウスドルフ空間}$$

が成り立つことを示せ．

４５．距離空間は正規であることを示せ．

４６．第二可算公理を満たす正則空間は正規であることを示せ．

４７．位相空間 X は，高々可算かつ稠密な部分集合を持つとき**可分**であるという．第二可算公理を満たす位相空間は可分であることを示せ．

４８．距離空間に対して，第二可算公理を満たすことと可分であることは同値である．これを示せ．

４９．正則空間の部分空間は再び正則空間となることを示せ．

５０．正規空間の任意の閉部分空間は再び正規空間となることを示せ．

５１．正則空間の族の直積空間は再び正則となることを示せ．