

数学概論 2

2007年5月10日分

佐伯 修

4月26日実施の小テストについて

練習問題の18番を解いてもらいました。定義だけ知っていればできる、基本的な問題でした。(1) 15点, (2) 5点, (3) 10点, (4) 10点, (5) 10点の計50点満点で採点し、平均は25点で、45点以上は8人のみでした。

(1)は開集合系の定義にある3つの「公理」を確かめてもらう問題でした。何をして良いかわからなかった人、まったく手もつけられなかった人は重症です。講義のDef. 2.1.1 (あるいは教科書の定義2.12)を必ず復習して下さい。

なお、開集合の共通部分が開集合、というときは有限個を考えますので、帰納法により、「2つの開集合の共通部分が常に開集合」ということさえ示しておけば、一般個数の場合は容易に従います。(実際教科書ではこちらの方が定義に採用されています。)和集合については一般に有限個とは限らないので、帰納法は使えません。ただし今回の問題では開集合がもともと4つしかありませんので、和集合を取るときも必然的に有限個です。よって「2つの開集合の和集合が常に開集合」ということを示すだけでも構いません。

(2)のできが悪かったのには驚きました。閉集合とは、開集合の補集合のことを言います。ですから、問題で与えられている4つの開集合それぞれの補集合(合計4つ)を書き下せばよいだけです。

(3)についても、内部と閉包の定義がわかっていて、(2)で閉集合がすべて挙げられていればできる問題です。講義のDef. 2.3.1 (あるいは教科書の定義2.20)を復習して下さい。

なお、開集合の内部はその集合自身、というのは定義からすぐにわかります。今後はこの事実は使って下さって構いません。

ところで、講義では「内部」や「閉包」の定義を2回与えています。一度はユークリッド空間の部分集合に対して、もう一度は位相空間の部分集合に対してです。この問題ではもちろん後者ですから、ユークリッド空間での定義は適用できません。中には勘違いして、 ε -近傍 $U(x, \varepsilon)$ などを考えた人もいたようですが、見当違いです。注意して下さい。

(4)の集積点については、定義を勘違いしている人が少なからずいました。講義のDef. 2.3.3の書き方が悪かったかも知れません。反省していますが、 B の集積点は B の点である必要はありません。 X の点 x であって、 $B - \{x\}$ の触点となる点 x を B の集積点と言います。注意して下さい。

(5)は、空でない開集合が必ず a を含むこと、集合 $\{a\}$ の閉包が X 全体に一致してしまうこと、の2つからすぐに従うことです。

前回の小テストの結果を見ていて思ったのですが、やはり**基本は講義に出てノートを取ることであり**と痛感しました。それと同時に、皆さん結構集中力に欠けている、と思いました。

前回の小テストの問題は基本的に、定義を知っていて、それに集中して取り組めば難なくできる問題ばかりだったのです。しかもノートや教科書は見てよかったわけですから、定義は知らなくても、その場で教科書を見たってできたはずなのです。

それにもかかわらず小テストの問題が解けなかった人は、おそらく集中して問題に取り組めなかったのではないかと思います。皆さんの中には、九大の数学科に来て、講義は難解で、試験でも高校までのように高得点はなかなか取れず、数学は難しい、という思いに満たされている人も少なくないかと思います。でも皆さんは集中さえすれば数学を十分に理解する能力は持っているのです。自分ではできない、という先入観は捨てて下さい。自分は本来できる、と思って下さい。

「数学は自明なことの積み重ねである」というのは何度か聞いたことがあると思います。私も講義で言ったことがあるかも知れませんが、それを聞いて言葉通りに信じろと言っても信じられなかった人も多かったと思いますが、このことはウソではありません。少なくとも本講義で習っているようなことは、ほとんど自明なことが多いのです。1ステップごとに確かめれば、定義等に戻って確かめられます。ただそれがいろいろと入り乱れていることもあって、全体として考えると複雑かも知れませんが、でも1ステップそれぞれは「自明なこと」なのです。

たとえば数学は、英語などと比べても簡単です。たとえば3人称単数では動詞にsを付ける、という英文法での規則がありますね。たとえば He reads a book. なら簡単ですが、 He studies mathematics. だと、study の最後のyがieになるとか、とにかく例外だらけです。数学ではこうした例外はありません。定義自体に例外を設けている場合は別として、大抵は一括して定義をしていて、例外はありません。だからこそ厳密に確かめることができるのです。英語には「だいたいのルール」はあっても、「絶対ルール」はあり得ません。人によって、あるいは地域によって言い方に違いが出るからです。でも数学の世界は「絶対」なのです。誰が見たって正しい証明か、そうでない証明か、厳密に区別できる。それが数学なのです。

前回の小テスト、できが悪かった人は、1ステップごとに自分で確認しながら解いてみて下さい。それでも分からないときは一旦休み、頭がスカッとしているときにもう一度集中して考えてみましょう。

皆さんからの感想・質問等について

前回の小テストの際、講義についての感想・質問・要望等を書いてもらいました。そのいくつかについて以下にコメントします。(番号は4月19日のプリントからの続き番号です。)

学生9. こういう小テストや定期考査等で授業で出てきた定理や定義等を使う

とき, “Def. 2.3.1 より”とか, “Th. 2.3.2 より”というふうにしても大丈夫ですか?

佐伯. まあいいですが, できれば他の手段を用いて欲しいと思います. 番号は往々にして間違えますし, この講義を受けていない人に説明しようとするとうまくいきません. あくまでも“「... ならば ...」という定理により”という書き方をしてもらいたいと思います. あるいは「中間値の定理」とか「ロピタルの定理」とか, 定理に名前がついているときはその名前を用いて下さい. 定理を書くのが面倒なときは, どの定理かわかるように, たとえば“「和集合の閉包に関する定理」より”(Th 2.3.2 (2) のこと)とか, “「連続関数の特徴づけ定理」より”(Th. 3.1.1 のこと)等と書いて下さい.

学生 10. 数学がとても苦手です. ツライです. でも楽しく, 具体的にどう自然界・社会に応用されてるのか知りたいです. ついていけない生徒 (ボク) とかをお手数ですが何とかして欲しい. 助けて下さい.

佐伯. 切実な悩みですね. 上にも書きましたが, まずは苦手である, という先入観を捨てることですね. そして何を自分は理解していないか, それをはっきりさせてみて下さい. たとえば前回の小テストの答案を自分なりにもう一度書こうと試みて下さい. できないときは, 何がわからないのか, その点をはっきりさせて下さい. **わからないことは全然恥ずかしいことではありません.** どんなに有名な数学者でも, 他人の講義を聞いてただちに理解できる人はほとんどいません. たいていは講義をしている人に, たくさんの (ときには馬鹿な) 質問をして, そうして理解を少しずつ深めてゆくのです.

質問をする意味はそこにあります. 質問をすることによって, 自分は何がわかっていないのかがはっきりします. 演習の時間を有効に使って下さい. 友達でも TA でも, 演習担当の先生でも私でも, どんどんつかまえて, つまらない質問でも何でもいいからしてみることです.

数学は基本的に講義を聞いて, 教科書を理解すればよいから, 一人で勉強すれば良い, と考えている人もいるかも知れませんが, ある面ではそうとも言えなくもありませんが, 実際はそうではありません. ほかに人と議論をすることにより, 一人で考えていたのではわからないことが見えてくることは本当に良くあります. 数学の世界で共同研究が多くあるのはそのためです.

君のように数学に興味を持ち, その応用を知りたい, と思っている学生であれば, 何とか乗り越えられると思います. 頑張ってください.

学生 11. 演習の問題は前の週に配っておいてもらえると助かります.

佐伯. 前にもプリントに書いたと思いますが, 問題は講義の進度よりも少し先の方からも出しています. また, すべての問題をその日の演習の時間に解くことはまれだと思います. したがって残った問題は, 演習問題を前の週に出したのと本質的に同じことになるはずですよ.

また, 本講義の内容に関して出題される問題は, 定義さえ知っていれば解けるものがほとんどです. ですから午前中に定義を聞いて, 午後にそれに関する問題

を解くことが可能です. そういう意味で, 前もって問題を配ることはしていません. ご理解下さい.

中間試験について

5月31日(木)の演習の時間に中間試験を行います. 出題範囲等は追ってお知らせします.

練習問題

24. X, Y を集合とし, X の位相 \mathcal{O}_X としては密着位相を, Y の位相 \mathcal{O}_Y としては離散位相を考える.

- (1) 密着位相 \mathcal{O}_X の定義を書け.
- (2) 離散位相 \mathcal{O}_Y の定義を書け.
- (3) 写像 $f: X \rightarrow Y$ が連続であることの定義を書け.
- (4) 写像 $f: X \rightarrow Y$ が連続であるための必要十分条件は, ある $y_0 \in Y$ が存在して,

$$f(x) = y_0 \quad (\forall x \in X)$$

となることである. このことを示せ.

25. 有限個の位相空間 (X_i, \mathcal{O}_i) ($i = 1, 2, \dots, k$) のそれぞれが第二可算公理を満たすとする. このときそれらの直積空間も第二可算公理を満たすか?

26. $\{(X_\alpha, \mathcal{O}_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ を位相空間の族とし,

$$X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$$

を直積とする.

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{\alpha \in A} U_\alpha \mid U_\alpha \in \mathcal{O}_\alpha \ (\forall \alpha \in A) \text{ かつ有限個の } \alpha \text{ を除き } U_\alpha = X_\alpha \right\}$$

と置き, \mathcal{B} に属する集合の和集合全体からなる X の部分集合の族を \mathcal{O} と置くと, \mathcal{O} は X 上に位相を定めることを示せ.

27. $\{(X_\alpha, \mathcal{O}_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ を位相空間の族とし,

$$X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$$

を直積とする.

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{\alpha \in A} U_\alpha \mid U_\alpha \in \mathcal{O}_\alpha \ (\forall \alpha \in A) \right\}$$

と置き、 \mathcal{B} に属する集合の和集合全体からなる X の部分集合の族を \mathcal{O} と置くと、 \mathcal{O} は X 上に位相を定めることを示せ。(これを**強位相**と呼ぶこともある.)

28. \mathbf{R}^n の位相は、 n 個の \mathbf{R} の直積位相と一致することを示せ.

29. $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間とする.

(1) $d: (X \times Y) \times (X \times Y) \rightarrow \mathbf{R}$ を,

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2} \quad (x_i \in X, y_i \in Y)$$

で定めると、 d は $X \times Y$ 上の距離関数となることを示せ.

(2) 上の d が $X \times Y$ に定める位相は、 d_X が X 上に定める位相と d_Y が Y 上に定める位相の直積位相に一致することを示せ.

30. X, Y を位相空間、 \sim を X 上の同値関係とし、 $\pi: X \rightarrow X/\sim$ を商写像とする. 写像 $f: X \rightarrow Y$ と $\bar{f}: X/\sim \rightarrow Y$ が図式

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi \searrow & & \nearrow \bar{f} \\ & X/\sim & \end{array}$$

を可換にしているとする (すなわち、 $f = \bar{f} \circ \pi$ が成り立っているとする). このとき f が連続であるためには、 \bar{f} が連続であることが必要十分であることを示せ.

31. X, Y を位相空間、 \sim を X 上の同値関係とし、 $\pi: X \rightarrow X/\sim$ を商写像とする. 写像 $f: X \rightarrow Y$ と $\bar{f}: X/\sim \rightarrow Y$ が図式

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi \searrow & & \nearrow \bar{f} \\ & X/\sim & \end{array}$$

を可換にしているとする (すなわち、 $f = \bar{f} \circ \pi$ が成り立っているとする). さらに f は開写像であるとする (定義は 23 番を参照). このとき次の二つが同値であることを示せ.

(1) \bar{f} は同相写像である.

(2) f は全射連続写像で、 $x, y \in X$ に対して

$$f(x) = f(y) \iff x \sim y$$

が成り立つ.

32. \mathbf{R} の元 x, y に対して

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbf{Z}$$

と定義する.

(1) “ \sim ”が同値関係となることを示せ.

(2) 円周 S^1 を

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

と定め, これにユークリッド空間 \mathbf{R}^2 から誘導される相対位相を入れて位相空間と考える. 今, $f: \mathbf{R} \rightarrow S^1$ を

$$f(\theta) = (\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta) \quad (\theta \in \mathbf{R})$$

で定めると, f が開写像となることを示せ.

(3) 商空間 \mathbf{R}/\sim が S^1 と同相となることを示せ (ヒント: 3.1 番の結果を用いよ).

3.3. X, Y を位相空間とし, $f: X \rightarrow Y$ を連続写像とする. X, Y 上にそれぞれ同値関係 \sim, \sim' が与えられており, 条件

$$x \sim y \quad (x, y \in X) \implies f(x) \sim' f(y)$$

が満たされているとする. このとき

$$\bar{f}: X/\sim \rightarrow Y/\sim$$

を $\bar{f}([x]) = [f(x)]$ ($x \in X$) で定義すると, これは代表元の取り方に依らずに well-defined であり, \bar{f} は連続写像となることを示せ.

3.4. 同じ集合 X 上に二つの位相 $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ が与えられているとする. $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ のとき, 言い換えれば \mathcal{O}_1 に関する開集合が常に \mathcal{O}_2 に関する開集合であるとき, \mathcal{O}_1 は \mathcal{O}_2 よりも弱い位相であるという. 逆に \mathcal{O}_2 は \mathcal{O}_1 よりも強い位相であるという.

(1) X を集合, Y を位相空間, $f: X \rightarrow Y$ を写像とする. このとき, f が連続となるような X 上の位相のうち, 最も弱いもの \mathcal{O}_X が存在することを示せ. また,

$$\mathcal{O}_X = \{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{O}_Y\}$$

となることを示せ.

(2) X を位相空間, A をその部分空間とし, $i: A \rightarrow X$ を包含写像とする. A 上の相対位相は, (1) の意味で $i: A \rightarrow X$ が連続となるような A 上の位相のうち最も弱いものと一致することを示せ.

3.5. (1) X を集合, Y_λ ($\lambda \in \Lambda$) を位相空間の族, $f_\lambda: X \rightarrow Y_\lambda$ を写像の族とする. このとき, すべての f_λ が連続となるような X 上の位相のうち最も弱いもの \mathcal{O} が存在することを示せ. また \mathcal{O} の基として, 有限個の Λ の元 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ を用いて

$$f_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap \dots \cap f_{\lambda_n}^{-1}(U_{\lambda_n}) \quad (U_{\lambda_i} \text{ は } Y_{\lambda_i} \text{ の開集合})$$

と書ける集合の全体が取れることを示せ.

(2) X_α ($\alpha \in A$) を位相空間の族とし,

$$X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$$

をその直積空間とする. また $p_\alpha: X \rightarrow X_\alpha$ を自然な射影とする. このとき X 上の直積位相は, (1) の意味ですべての p_α が連続となる X 上の位相のうち最も弱いものと一致することを示せ.

36. (1) X を位相空間, Y を集合, $f: X \rightarrow Y$ を写像とする. このとき f が連続となるような Y 上の位相のうちで最も強い位相 \mathcal{O}_Y が存在することを示せ. また,

$$\mathcal{O}_Y = \{U \subset Y \mid f^{-1}(U) \text{ が } X \text{ の開集合}\}$$

となることを示せ.

(2) X を位相空間, \sim を X 上の同値関係とする. このとき, 商集合 X/\sim 上の商位相は, (1) の意味で商写像 $\pi: X \rightarrow X/\sim$ を連続とする X/\sim 上の位相のうちで最も強いものと一致することを示せ.

37. 閉区間 $[0, 1]$ に 1 次元ユークリッド空間 \mathbf{R} の部分空間としての位相を入れる. また $[0, 1]$ 上の同値関係 “ \sim ” を,

$$x \sim x \quad (\forall x \in [0, 1]), \quad 0 \sim 1, \quad 1 \sim 0$$

で定める. このとき商空間 $[0, 1]/\sim$ が S^1 と同相となることを示せ (S^1 については 32 番を参照).

Coffee Break

私は 2003 年 2 月から約半年間, フランスのストラスブールに滞在するという幸運に恵まれました. 数学の研究のため, フランスの共同研究者であるヴァンサンが招待してくれたのでした.

その 3 年前に少しだけ滞在したとき, 彼がバドミントンを昼休みにやっていると言っていたのを覚えていて, 今回はスーツケースにラケットを忍ばせて渡仏しました. フランスではそれほどバドミントンは盛んではないし, どうせ彼のレベルは高くないだろうから, 10 年のブランクがある私でも十分相手ができるだろうとたかをくくっていたのでした. (ちなみに私はその 10 年前まで山形の実業団でプレイしていました.)

さてある日の昼休みに彼と体育館に行ってみると, そこの大学の職員数人が集まって, プレイをしています. 私もヴァンサンと始めましたが, 私の考えは完全な誤りであったことがすぐに判明しました. そこに集まっている人達の中で, 私

が一番へたくそだったのです。しかも、5分もアップをやっただけで、フーフー・ハーハー状態になってしまい、コートの外でへたり込む始末... これではいけないとは思いましたが、体は思うように言うことを聞いてくれません。

しかし、何度かそういう人達とプレイしてゆくうちに自分の体も慣れてきて、そのうち上手だと思っていたヴァンサンとも対等に対戦できるようになりました。体が戻ってきたようです。まだまだ自分もやれるぞ、と自信がつくと同時に、バドミントンがととても面白くなりました。肩や足腰はかなり痛みましたが...

さて、あるときこんなことがありました。昼休みにいつものように体育館に行ってみると、誰も練習に来ていません。いくら待っても誰も来ないので、仕方なく数学科の建物に戻ると、そこでヴァンサンに会いました。「ああ、今日は夕方に試合があるから、昼休みの練習は自粛したんだ。昼にやったらみんな疲れちゃうからね。」その試合というのはどうやらストラスブール近郊の実業団のリーグ戦のようなものだったと思います（観戦できなかったのが誠に残念です）。日本ならほぼ確実にこのような試合は土日にあります。フランスでは平日の夕方にあつたわけですね。なぜこのようなことが可能か、ヨーロッパに住んだ経験がある人にはわかると思います。仕事を終える時間が早いのです。しかも土日は家族と過ごすためがあるので、そこに試合は行いたくないという気持ちがあるわけですね。

海外に住むと、やはり日本のことが気になります。フランスではヴァカンスがいっぱいあって、皆長期休暇に1ヶ月くらい旅行に出かけるのは当たり前なのに、日本では... 普通の会話でも国際情勢や政治・経済が話題に上るのに、日本では... 女性が普通に仕事をして社会に貢献しているのに、日本では... (子供を平日の昼間に公園に遊びに連れて行くと、そこに来ている母親は決まって外国人でした。なぜか？フランス人の女性は日中仕事をしているからだ、とあるとき誰かに教えてもらいました。) 電車に乗れば若者が老人にさっと自然に席を譲るのに日本では... 数え上げればきりがありません。

フランスで一番強く感じたことは、とにかく「人間的な生活が普通にできる」ということでした。日本だってそうではないか、と思われる方も多いと思いますし、実は私も以前はそう思っていました。しかし海外、たとえばヨーロッパに住んでみると、そのけた違いの差に驚かされます。日本は戦後、欧米に追いつけ追い越せで頑張ってきたわけですが、それは経済的な面では成功をおさめたけれども、生活レベルの面ではまだまだ立ち遅れている、ということだと思います。

それで、日本の良いところはいったい何なんだと自分に問いかけてみました。自分が生まれ育った国で、唯一勝手を知っている国である、ということ以外になかなか答えが見つかりません。昔ながらの良い伝統があるはずなのに、それが失われつつある日本。この状態は結構深刻なのに、これで本当に良いのだろうか？ととても心配な今日この頃です。