

数学概論 2

2007年4月26日分

佐伯 修

ホームページについて

今年度の数学概論 2 ・ 演習のホームページを以下の URL に設けました.

<http://www.math.kyushu-u.ac.jp/~saeki/gaironIII1.html>

そこから配布プリント (pdf ファイル) をダウンロードできるようにします. また, 試験等の情報も掲載します. 適宜自分の勉強に役立ててください.

練習問題

18. 集合 $X = \{a, b, c\}$ の部分集合 A, B を

$$A = \{a\}, B = \{a, b\}$$

で定め, X の部分集合の族 \mathcal{O} を

$$\mathcal{O} = \{\emptyset, A, B, X\}$$

で定めるとき, 以下の問いに答えよ. (なお,

$$\emptyset \subsetneq A \subsetneq B \subsetneq X$$

となることに注意せよ.)

(1) \mathcal{O} が X 上に位相を定めることを示せ.

以下, こうして定まる位相空間 (X, \mathcal{O}) について考える.

(2) 位相空間 (X, \mathcal{O}) の閉集合をすべて求めよ.

(3) 集合 A の内部と閉包を求めよ.

(4) 集合 B の集積点をすべて求めよ.

(5) X の部分集合 W の内部が空集合でなければ, W は X で稠密であることを示せ.

19. 距離空間の間の写像が連続であることを, ε, δ を用いて定義し, それが定義 3.1.2 と一致することを示せ.

20. $f: X \rightarrow Y$ を写像とし, \mathcal{B}_Y を Y の開集合系 \mathcal{O}_Y の基とする. このとき f が連続となるためには, \mathcal{B}_Y の任意の元 U に対して $f^{-1}(U)$ が X の開集合となることが必要十分である. このことを示せ.

2 1. $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ をそれぞれ位相空間とし, $f: X \rightarrow Y$ を写像, $x_0 \in X$ を X の点とする. 写像 f が点 $x_0 \in X$ において連続であるとは, 任意の $U \in \mathcal{O}_Y$ で $f(x_0) \in U$ なるものに対して, ある $V \in \mathcal{O}_X$ で $x_0 \in V$ かつ $f(V) \subset U$ となるものが存在するときをいう. 写像 f が連続であるためには, X のすべての点で連続であることが必要十分であることを示せ.

2 2. 「同相」という関係は, 位相空間全体の集まりにおいて同値関係となることを示せ.

2 3. 位相空間の間の写像 $f: X \rightarrow Y$ について, X の開集合の像が常に Y の開集合となるときの, f は開写像であるという. 今, A を X の部分空間としたとき, 包含写像 $i: A \rightarrow X$ が開写像となるための必要十分条件は, A が X の開集合であることである. このことを示せ.

Coffee Break

7年生になったとき, 学校でパイのことをおそわった. それはギリシャ語の文字でイギリスにあるストーンヘンジの石像物に形が似ている. つまり, 垂直の二本の柱の上に, 横棒が伸びている. 文字にかくと, π . 円周を円の直径で割って得られる数値, それがパイだ. 家に帰ったエリーは, さっそくマヨネーズの瓶の蓋を外し, そのまま糸を巻きつけてから真っすぐに伸ばして, 長さを定規で計った. 同じようにして直径を計り, 最初の数字をそれで割ってみた. 答えは 3.21. 翌日数学のヴァイスブロード先生はこう説明した. — π はおよそ $22/7$ で, 約 3.1416 になる. もっと正確に答えを出そうとすると, 小数点以下は同じパターンをくり返さずに, どこまでも果てしなくつづくのだ, と. 果てしなくか, とエリーは思った. 彼女は手を挙げた. 新しい学年が始まったばかりで手を挙げるのはそれが初めてだった.

「あとう, 小数点以下がどこまでも続くっていうことは, どうしてわかるんですか?」

「そういうことになっているからさ。」ぶきらぼうな口調で先生は答えた.

「でもどうしてわかるんですか? どうして小数点以下を果てしなく計算することができるんですか?」

「アロウェイ君」 — 彼は出席簿を見ていた —

「それは愚劣な質問だね. きみは大切な授業の時間を無駄にしているよ。」

カール・セーガン『コンタクト』(池, 高見訳) より