

数学概論 2

2007年7月12日分

佐伯 修

7月5日実施の小テストについて

問題は

「距離空間の収束点列はコーシー列であることを示せ。」

でした。10点満点で採点し、平均点は7.4点でした。

これは6月28日の講義で証明した補題7.2.5そのものでした。まったくできなかった人は良く復習をしておいて下さい。

なお、距離空間の問題でしたが、2点 x_n, x_m の間の距離を $d(x_n, x_m)$ とせず、あたかも実数であるかのように $|x_n - x_m|$ としている人が多数いました。距離空間では一般に2点の「引き算」や「絶対値」は意味を持ちません。実数直線 \mathbf{R} を考えているのか、一般の距離空間を考えているのかを判断し、状況によって記号を正しく使い分けることを覚えて下さい。

皆さんからの感想・質問等について

7月5日実施の小テストの際に2人の学生から質問をもらいました。以下に私のコメントを書いておきます。番号は6月28日のプリントからの続き番号です。

学生34. 演習の成績30点分は欠席でマイナスになりますか？

佐伯. マイナスにはなりません。演習で解いた分だけプラスになります。出席してようがいまいが、一問も解いていなければ演習点は0点です。

学生35. 演習問題が簡単な場合でも10点以下になることはないんですか？

佐伯. すみませんが、これについてはお答えできません。簡単な問題を難く解けば良いのですが、先生にいろいろ助けてもらって解けたような場合は点数を10点以下にする可能性もあります。

期末試験について

繰り返しになりますが、**期末試験**を7月19日(木)午後1時～3時半に行います。受験する部屋は、演習と同じ部屋とします。中間試験と異なり、**持ち込みは不可**としますので十分に注意して下さい。試験範囲は、講義・演習で行った内容すべてとします。

なお、中間試験と同様に基本的な問題を出題する予定です。講義ノートを良く読んで、講義の内容、特に諸概念の定義と、補題・命題・定理の証明を良く復習して試験にのぞんで下さい。

練習問題

- 1 2 2. 講義で定義した $d^* : X^* \times X^* \rightarrow \mathbf{R}$ が距離関数を定めることを示せ.
- 1 2 3. X を距離空間とし, $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ をそのコーシー列とする.
(1) 勝手な $n \in \mathbf{N}$ に対して, 数列 $\{d(x_m, x_n)\}_{m \in \mathbf{N}}$ が収束することを示せ.
(2) (1) の極限を d_n と書くとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$ となることを示せ.
- 1 2 4. 距離空間が全有界であれば有界であることを示せ.
- 1 2 5. コンパクトな距離空間は全有界であることを示せ.
- 1 2 6. 距離空間 X のコーシー列 $\{x_n\}$ が収束する部分列を持てば, 点列 $\{x_n\}$ は同じ点に収束することを示せ.
- 1 2 7. 全有界かつ完備な距離空間は点列コンパクトであることを示せ.
- 1 2 8. 点列コンパクトな距離空間はコンパクトであることを示せ.
- 1 2 9. 完備化の一意性定理を述べ, それを証明せよ.

Coffee Break

「ナイル河畔のシエネ (アスワン) において, 夏至の正午になると太陽の光が井戸の底まで届くという. 同じ時刻にアレキサンドリアでは地面に立てた棒に影ができ, 棒と太陽光線のなす角が 7.2 度であることが計測された. 一方, シエネとアレキサンドリアの距離は, ラクダの隊商がその間を旅するのにかかる日数と旅行速度から 925km と見積もった. もしシエネが北回帰線上にあり, しかもアレキサンドリアとシエネが同一子午線上にあるとすれば, 子午線の全長はいくらか?」

エジプトの科学者エラトステネス (紀元前 275–194) は上の事実に基づいて子午線の全長を計算しました. 皆さんも計算してみてください. 答えは実際のものど 16% しか違わない値になるそうです.

(出典: 砂田利一「ピタゴラスの定理と宇宙のかたち」数学通信, 第 4 巻第 3 号, 1999 年 11 月)