

数学概論 2

2007年6月28日分

佐伯 修

期末試験について

期末試験を7月19日(木)午後1時~3時半に行う予定です。中間試験と異なり、持ち込みは不可とする予定ですので十分に注意して下さい。

練習問題

102. $f: X \rightarrow Y$ を距離空間の間の写像とする。ある定数 $c > 0$ が存在して、

$$d(f(x_1), f(x_2)) \leq c \cdot d(x_1, x_2)$$

が任意の $x_1, x_2 \in X$ に対して成り立つとき、 f をリプシッツ写像という。リプシッツ写像は一様連続であることを示せ(64番参照)。

103. $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ を、 $f(x) = \sqrt{x}$ ($x \geq 0$) で定義する。 f は一様連続であるが、リプシッツ写像ではない(リプシッツ写像の定義は前問参照)。このことを示せ。

104. 距離空間の間の一様連続写像の合成は再び一様連続である。このことを示せ。

105. 距離空間の間の写像 $f: X \rightarrow Y$ について、以下の2つが同値であることを示せ。

- (1) f は一様連続である。
- (2) X の点列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ に対して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} d(f(x_n), f(y_n)) = 0$$

が常に成り立つ。

106. $f: X \rightarrow Y$ を距離空間の間の一様連続写像とする。 $\{x_n\}$ が X のコーシー列であれば、 Y の点列 $\{f(x_n)\}$ もコーシー列になることを示せ。

107. $f: X \rightarrow Y$ を距離空間の間の同相写像で、一様連続であるものとする。このとき、もし Y が完備であれば X も完備であることを示せ。

108. 2つの完備距離空間の直積距離空間(29番参照)は再び完備である。このことを示せ。

109. \mathbf{R} が完備であることを示せ.

110. X, Y を距離空間とし, $f: X \rightarrow Y$ を写像とする. このとき次の2つが同値であることを示せ.

- (1) $f: X \rightarrow Y$ は連続である.
- (2) X の勝手な収束列 $\{x_n\}$ に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right)$$

が常に成り立つ.

Coffee Break

パズルです.

「2人以上が集会に出席しているとき, 各人について, その中に知り合いが何人いるかを調べる. このとき知り合いの人数が同数であるような2人が必ず存在する.」

これは本当でしょうか?

良く考えると, これが本当であることが分かります. パズルの好きな人は以下の答を読まずに自分で考えてみて下さい.

答は次のようにすれば, 割りと簡単にわかります. 今, 人数を n 人としましょう. すると, 知り合いの人数の可能性は0人から $n-1$ 人までの n 通りあります. しかし, 知り合いが0人の人がいて (つまり, 誰とも知り合いでない人がいて), なおかつ知り合いが $n-1$ 人である人がいる (つまり, 他のすべての人と知り合いである人がいる) ことはあり得ません. したがって, 知り合いの人数の可能性はいずれの場合も高々 $n-1$ 通りです. ところが全部で n 人いるので, その中にはこの「知り合いの人数」がだぶる人が2人は必ず現れなければなりません. これで上のパズルが示せたことになります.

なんだか狐につままれたような気もするかも知れませんが, これは以下のような数学的命題を本質的に使っています.

「 A と B を有限個の要素からなる集合とする. もし A の要素の個数の方が B の要素の個数より多いならば, A から B への単射 (つまり, 写像 $f: A \rightarrow B$ であって, $a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2)$ が成り立つもの) は存在しない.」

これは「鳩の巣原理」と呼ばれています. 実際は

「 $kn+1$ ($k \geq 1$) 羽の鳩と n 個の巣箱があり, すべての鳩がこれらの巣箱のいずれかに入れば, 巣箱のうちどれか1つには $k+1$ 羽以上の鳩が同居していることになる.」

という原理のことですが, 本質的には上の命題と同じものです.