数学概論２

２００７年６月２１日分

佐伯 修

６月１４日実施の小テストについて

問題は

「ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ の部分集合

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

（これを 2 **次元球面**という）がコンパクトであることを示せ.」

でした．20 点満点で採点し，平均点は 10.2 点でした．ちなみに 20 点満点は 12 人いました．

ユークリッド空間の部分集合ですので，講義の定理 5.4.3「ユークリッド空間の部分集合がコンパクトとなるためには，有界閉集合となることが必要十分である」が使えます．というより，それを使わないとなかなか証明しづらい問題だと言えます．有界性は割りとたやすいですが，閉集合性は定義に戻ってきちんと証明して欲しい問題でした．できなかった人は良く復習をしておいて下さい．

練習問題

９４．X を位相空間とする．$x, y \in X$ に対して，x と y を結ぶ弧が存在するとき $x \sim y$ と書くことにする．すると，この関係 "$\sim$" は同値関係となることを示せ．（なお，この同値関係による同値類を X の**弧状連結成分**という.）

９５．X を位相空間とする．X の各点 x とそれを含む勝手な開集合 U に対して，ある弧状連結な開集合 V であって，

$$x \in V \subset U$$

となるものが存在するとき，X は**局所弧状連結**であるという．

(1) X が局所弧状連結であれば，X の各弧状連結成分（定義は前問を参照）は X の開集合であることを示せ．

(2) 局所弧状連結な位相空間 X に対し，それが連結となることと弧状連結となることは同値である．これを示せ．

９６．2 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^2$ の部分空間 X を，

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(0, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, -1 \le y \le 1\}, \\ X_2 &= \left\{ \left(x, \sin\frac{1}{x}\right) \,\middle|\, 0 < x \le 1 \right\} \end{aligned}$$

の和集合 $X_1 \cup X_2$ として定める．X は連結であるが，弧状連結ではないことを示せ．

９７．X, Y を互いに同相な位相空間とする．X が弧状連結であれば Y もそうであることを示せ．

９８．$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族としたとき，直積空間

$$X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

が弧状連結となるためには，すべての $\lambda \in \Lambda$ について X_λ が弧状連結となることが必要十分であることを示せ．

９９．(1) 平面上の単位円

$$S^1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$$

を考える．点 a を単位円の内側から，点 b を単位円の外側から取ると，平面上で点 a と点 b を結ぶ弧は必ず S^1 上を通る．これを示せ．

(2) 上の単位円を今度は

$$\widetilde{S^1} = \{(x,y,0) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$$

のように 3 次元ユークリッド空間で考える．すると，原点 $O = (0,0,0)$ という円の内側の点と，点 $P = (0,2,0)$ という円の外側の点は，$\widetilde{S^1}$ に交わらない弧で結べることを示せ．

１００．$\mathbf{R}^2$ と $\mathbf{R}$ が同相でないことを示せ．

１０１．(X,d) を距離空間とする．X の空でない部分集合 A, B に対して，その間の「距離」を

$$d(A,B) = \inf\{d(a,b) \in \mathbf{R} \,|\, a \in A,\, b \in B\}$$

で定める．また，$x \in X$ に対して，

$$d(x,A) = d(\{x\}, A)$$

と定める．

(1) X 上で定義された関数 $x \mapsto d(x,A) \in \mathbf{R}$ は連続関数となることを示せ．

(2) $d(x,A) = 0$ となるためには，$x \in \overline{A}$ となることが必要十分であることを示せ．

(3) A がコンパクトで B が閉集合であれば，

$$d(A,B) > 0 \Longleftrightarrow A \cap B = \emptyset$$

となることを示せ．

(4) A, B が互いに交わらない閉集合でも $d(A,B) = 0$ となることがある．具体例を構成せよ．