数学概論２

２００７年4月１２日分

佐伯 修

教科書として次の本を使います．講義は教科書の第２章に沿って行います.（ただし，記号等は異なるかも知れませんし，教科書に書いてあることをすべて講義で取り上げるとは限りません.）

- 森田茂之『集合と位相空間』朝倉書店，2002.

参考書としては以下の本を挙げておきます．講義中に使うことはほとんどないと思いますが，講義を理解する上でかなりの助けになると思います.

- 志賀浩二『位相への 30 講』朝倉書店，1988.
- 松坂和夫『集合・位相入門』岩波書店，1968.
- 内田伏一『集合と位相』裳華房，1986.

シラバスにも書きましたが，**オフィスアワー**を木曜日 9:45–10:15（理学部 3 号館 5 階 3512 号室）に設けています．質問等があれば対応します．他の時間でも，私が在室している限りは対応します.

この講義では**演習での解答状況を重視**します．演習には必ず出席するようにして下さい．ただ出席するだけではなく，積極的に問題を解いたり，演習担当の教員や，TA に当たっている大学院生にどんどん質問したりして，講義内容の理解に役立てて下さい．これほど演習が充実している数学科は珍しいと思います．十分に演習を活用するよう，各自で努力して下さい．演習の時間にはときどき小テストも行う予定です.

逆に言うと，演習にあまり出席しないと講義がしっかりとは理解できない，ということです．この点は良く理解して下さい.

なお成績は，中間試験，期末試験，演習の解答状況，小テスト，レポート等により総合的に評価します.

佐伯の連絡先とホームページを一応お知らせしておきます．連絡が必要なときはメイルでも構いませんが，メイルはときどき届かないこともあるので注意して下さい.

電子メイル：saeki@math.kyushu-u.ac.jp
ホームページ：http://www.math.kyushu-u.ac.jp/~saeki/index-j.html

練習問題

1． 一変数実数値関数 $f(x)$ $(x \in \mathbf{R})$ と実数 $a \in \mathbf{R}$ を考える．

(1) 関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続であることの定義を，ε, δ を用いて書け．

(2) 上の (1) の否定，すなわち $f(x)$ が $x = a$ で連続でないことを，ε, δ を用いて書け．

(3) 命題

$(*)$ 「a に収束する任意の実数列 $\{x_n\}$ に対して，

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$$

となる」

の否定を述べよ．

(4) 上の $(*)$ と，関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続であることが同値であることを示せ．

2． 閉集合に関する定理 1.2.4 を証明せよ．

3． 以下は 1 次元ユークリッド空間（数直線）$\mathbf{R}$ の部分集合である．それぞれについて，開集合であるか否か，閉集合であるか否かを理由とともに答えよ．

(1) $U_1 = (-1, 2)$　(2) $U_2 = [-1, 2]$　(3) $U_3 = (-1, 2]$　(4) $U_4 = \mathbf{R}$

(5) $U_5 = (-1, +\infty)$　(6) $U_6 = (-\infty, 2]$　(7) $U_7 = \emptyset$

(8) U_8：有理数全体の集合　(9) U_9：無理数全体の集合

(10) $U_{10} = \left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$　(11) $U_{11} = U_{10} \cup \{0\}$

4． (1) $\mathbf{R}^n$ の部分集合 A で，A に含まれる最大の閉集合を持たないものを具体的に挙げよ．

(2) $\mathbf{R}^n$ の部分集合 A で，A を含む最小の開集合を持たないものを具体的に挙げよ．

5． $a \in \mathbf{R}^n$ と $r > 0$ に対して $U(a, r)$ が開集合となることを示せ．

6． 閉包に関する定理 1.2.7 (2) を証明せよ．

Coffee Break

イメージを持つことの手段として，図を描くということは非常に効果がある．ことに幾何学の場合にはうまく図を描けるか描けないかは，自分自身の理解のためと，人にそれをつたえるための両方で重要である．私の経験でも，セミナーでどんどん伸びる学生はそれにともなって図を描くことがうまくなっていくのが普通である．

田村一郎「論理を追う前にイメージを持て」より抜粋