数学概論2 演習 第2回
2007 年 4 月 19 日分
中村 徹

[**中村 1**] 実数値関数 $d_1, d_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \quad d_2(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

で定める．ただし $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ とする．

(1) d_1, d_2 は $\mathbb{R}^2$ 上の距離関数であることを示せ.

(2) それぞれの距離について，原点の ε 近傍を図示せよ.

(3) $\mathbb{R}^2$ の部分集合 A が $(\mathbb{R}^2, d_1)$ で開集合であることと，$(\mathbb{R}^2, d_2)$ で開集合であることは同値であることを示せ.

(4) ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ と距離空間 $(\mathbb{R}^2, d_1)$ は同じ開集合系を持つことを示せ.

[**中村 2**] $C[0,1]$ を閉区間 $[0,1]$ 上での実数値連続関数全体の集合とする．$f, g \in C[0,1]$ に対して $d_1(f,g)$, $d_2(f,g)$ を

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\,dx, \quad d_2(f,g) = \max_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$$

で定める．

(1) d_1, d_2 は $C[0,1]$ 上の距離関数であることを示せ.

(2) $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n, g_n \in C[0,1]$ を

$$f_n(x) = x^n, \quad g_n(x) = \begin{cases} 2n^2 x & (0 \le x < \frac{1}{2n}), \\ 2n - 2n^2 x & (\frac{1}{2n} \le x < \frac{1}{n}), \\ 0 & (\frac{1}{n} \le x \le 1) \end{cases}$$

で定める．このとき $n \to \infty$ のときの $d_1(f_n, 0)$, $d_2(f_n, 0)$, $d_1(g_n, 0)$, $d_2(g_n, 0)$ の極限を求めよ.

[**中村 3**] (X, d) を距離空間とする．このとき $d_0 : X \times X \to \mathbb{R}$ を

$$d_0(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

で定める.

(1) $u \le s + t$ となる非負実数 u, s, t に対し

$$\frac{u}{1+u} \le \frac{s+t}{1+s+t} \le \frac{s}{1+s} + \frac{t}{1+t}$$

が成立することを示せ.

(2) (X, d_0) は距離空間となることを示せ.

(3) 二つの距離空間 (X, d) と (X, d_0) は同じ開集合系を持つことを示せ.

問題は裏面にもある

[中村 4] 実数列 $x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ のうち $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|<\infty$ となるものの全体を ℓ^1 とする．$d_1:\ell^1\times\ell^1\to\mathbb{R}$ を

$$d_1(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-y_n| \quad \text{ただし } x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty},\, y=\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$$

で定めると，(ℓ^1,d_1) は距離空間となることを示せ.

[中村 5] 空でない集合 X 上に二つの開集合系 $\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2$ が与えられているとする．このとき $\mathcal{U}=\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2$ とおくと，$(X,\mathcal{U})$ は位相空間となることを示せ.

[中村 6] $X=\{a,b,c,d\}$ とする．以下の集合 $\mathcal{U}_i$ $(i=1,2,3,4)$ はそれぞれ X 上に位相を定めるか.

(1) $\mathcal{U}_1=\{\emptyset,\{a\},\{a,b\},\{a,c\},X\}$

(2) $\mathcal{U}_2=\{\emptyset,\{a,b,c\},\{a,b,d\},X\}$

(3) $\mathcal{U}_3=\{\emptyset,\{a,b\},\{a,b,d\},X\}$

(4) $\mathcal{U}_4=\{\emptyset,\{a\},\{b,c\},X\}$

[中村 7] X を無限集合とし，X の部分集合族 $\mathcal{U}$ を

$$\mathcal{U}=\{U\subset X\ ;\ U^c \text{ は有限集合}\}\cup\{\emptyset\}$$

で定めると，$(X,\mathcal{U})$ は位相空間となることを示せ.