Desingularizar aplicações genéricas especiais

Osamu Saeki (Kyushu University, Japão)

O conteúdo desta palestra é um trabalho junto com o Masamichi Takase (Seikei University, Japão)

Nesta palestra, todas as variedades e as aplicações entre elas são de classe C^∞. Dada uma aplicação singular $f : M \to \mathbb{R}^p$ de uma variedade fechada M de dimensão n no espaço euclidiano de dimensão p ($n \geq p \geq 1$), vamos considerar o seguinte problema.

Problema *Seja $\pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ a projeção standard ($m > n \geq p \geq 1$). Determinar se existe uma imersão ou mergulho $\eta : M^n \to \mathbb{R}^m$ tal que $f = \pi \circ \eta$.*

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^m \arrow[d, "\pi"] \\ M^n \arrow[ur, dashed, "?\exists\eta\text{: não singular}"] \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^p \end{tikzcd}$$

Imersões (ou mergulhos) não tem singularidades, então a aplicação η acima pode ser considerada como "resolução de singularidades" da aplicação singular f.

Alguns resultados já são conhecidos. Dada uma aplicação genérica de uma superficie no plano, Haefliger (1960) achou uma condição necessária e suficiente para que uma tal aplicação seja levantada a uma imersão no $\mathbb{R}^3$. Burlet-Haab (1985) mostrou que qualquer função de Morse sobre uma superficie pode ser levantada a uma imersão no $\mathbb{R}^3$. Fora destes resultados relacionados às aplicações sobre superficies, somente alguns resultados são conhecidos sobre aplicações genéricas entre variedades da mesma dimensão.

Nesta palestra, a gente vai considerar aplicações genéricas especiais que admitem somente singularidades de dobra definida, as quais são singularidades mais simples de todas. Seja $f : M^n \to \mathbb{R}^p$ uma aplicação de classe C^∞ ($n \geq p \geq 1$). Um ponto singular de f é chamado de *dobra definida* se f pode ser representada pela forma normal

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x_p^2 + x_{p+1}^2 + \cdots + x_n^2)$$

ao respeito das coordenadas locais adequadas em torno do ponto. Se f tem somente dobras definidas como singularidades, f é chamada de *aplicação genérica especial*. Nesta palestra, alguns resultados sobre a existência de imersões ou mergulhos no $\mathbb{R}^{n+1}$ (em codimensão 1) que levantam aplicações genéricas especiais, são apresentados. De fato, este trabalho está relaciodado com a teoria de Smale–Hirsch sobre imersões, topologia dos espaços de imersões e mergulhos, relação entre os espaços de imersões topológicas e diferenciáveis, "sphere eversion", estruturas diferenciáveis das esferas, o grupo de difeomorfismos das esferas, ação do grupo livre sobre a esfera, etc.