微分可能写像の特異点の消去問題について

佐伯　修* （広島大学理学部）

1　序

本講演では，C^∞ 級多様体の間の微分可能写像に対する特異点の消去問題について，最近得られた結果を，総合的に報告する[1]．

まず，M, N を C^∞ 級多様体とし，$f : M \to N$ を C^∞ 級写像とする．このとき，次の問題が自然に考えられる．

問題１．f をホモトピーで動かして，与えられた型 Σ の特異点[2] を持たない写像に変形できるか？

たとえば，N としてユークリッド空間 $\mathbf{R}^{2n-1}$ $(n = \dim M \geq 2)$ を考え，Σ として微分の階数が n より小さくなる特異点の型全体を考えると，上の問題は肯定的に解かれるが，これは**ホイットニーのはめ込み定理** [31] に他ならない．

ところで，上の問題を考えるには f の**ジェット拡大**を用いるのが普通である．今，十分大きな自然数 r に対し，$J^r(M, N)$ を $M \times N$ 上の r **ジェット束**[3] とし，$j^r f : M \to J^r(M, N)$ を，f の r ジェット拡大[4] とする[5]．さらに，$\Sigma(M, N)(\subset J^r(M, N))$ を，特異点の型 Σ に対応した偏微分係数全体からなる部分束とすると，上の問題１は次のようにいいかえられる．

問題２．$f : M \to N$ をホモトピーで動かして，$j^r g(M) \cap \Sigma(M, N) = \emptyset$ なる g に変形できるか？

次の問題は上の問題と深く関係する．

問題３．$j^r f : M \to J^r(M, N)$ をホモトピーで動かして，$\psi(M) \cap \Sigma(M, N) = \emptyset$ なる $\psi : M \to J^r(M, N)$ に変形できるか？

---

* *e-mail address*: saeki@math.sci.hiroshima-u.ac.jp

[1] 本講演の大部分は，佐久間一浩氏（近畿大）との共同研究であり，一部は菊地茂樹氏（弘前大）との共同研究である．

[2] C^∞ 級写像 $f : M \to N$ に対して，そこでの f の微分の階数が $\min\{\dim M, \dim N\}$ より小さい M の点を，f の**特異点**という．写像芽に対しても同様のことが定義できる．さらに，２つの写像芽が，定義域と値域でそれぞれ C^∞ 級座標変換をして互いにうつりあうとき，それらは**右左同値**であるという．特異点の**型**とは，特異点を持った写像芽の右左同値類（の和集合）のことである．

[3] $M \times N$ の各点 (x, y) の上に，$x \in M$ を $y \in N$ にうつす C^∞ 級写像芽の r 階までの偏微分係数全体の空間がファイバーとしてのっているようなファイバー束．全空間 $J^r(M, N)$ は C^∞ 級多様体の構造を持つ．

[4] $x \in M$ に対し，f の x での r 階までの偏微分係数（$(x, f(x)) \in M \times N$ 上のファイバーの元）を対応させる写像．多様体間の写像として，C^∞ 級になる．

[5] 詳しくは，たとえば [12] を参照．

問題２が肯定的に解ければ，もちろん問題３も肯定的に解けるが，一般にその逆はいえない．しかし，Gromov [13], Èliašberg [10], [11], du Plessis [5], [6], [7] らの仕事により，これら２つの問題はある種の状況において同値となることが示されている．

ところで，上の問題３を考える上で大変重要なのが **Thom 多項式**の概念である．今，特異点の型 Σ がある「良い」条件[6] を満たしたとしよう．このとき，もし f が十分にジェネリック[7] ならば

$$\Sigma(f) = (j^r f)^{-1}(\Sigma(M,N))(\subset M)$$

の閉包 $\bar{\Sigma}(f)$ は基本類 $[\bar{\Sigma}(f)] \in H_*(M;\mathbf{Z}_2)$ を持つことがわかり，しかもその Poincaré dual が，difference bundle $f^*TN - TM$（TM, TN はそれぞれ M, N の接空間を表す）の Stiefel-Whitney classes の多項式で書けることが知られている [15]．この多項式は M, N, f などによらず，Σ のみによって決まることが知られており，この多項式のことを Thom 多項式というのである．

ところで，もし $j^r f$ がある写像 $\psi : M \to J^r(M,N)$ で $\psi(M) \cap \Sigma(M,N) = \emptyset$ なるものにホモトピックになったとすると，必然的に $[\bar{\Sigma}(f)] = 0$ とならなければならないことが確かめられる．つまり，このホモロジー類 $[\bar{\Sigma}(f)]$（の Poincaré dual）[8] をある種の**障害類**だと思うことができる．そこで次の問題が生じる．

問題４． $[\bar{\Sigma}(f)] = 0$ ならば，f をホモトピーで動かして，与えられた型 Σ の特異点を持たない写像に変形できるか？

本講演では，まず上の問題４をめぐる最近の結果についていくつか報告しようと思う．さらに，Thom 多項式ではとらえられない例として，多様体の微分構造が関わってくる現象があることについても解説する．

以下，多様体や写像はすべて C^∞ 級とし，特に断りのない限り（コ）ホモロジー群はすべて $\mathbf{Z}_2$ 係数で考えるものとする．

2　４次元多様体間の安定写像

この節では，問題１が肯定的に解ける例として，４次元多様体の間の写像について解説する[9]．

M を向き付けられた４次元閉多様体とし，N を安定的に平行化可能[10] な４次元多様体とする．以下，$C^\infty(M,N)$ で，M から N への C^∞ 級写像全体の空間に C^∞ 位相を入れた

[6] 正確にいうと，$J^r(n,p)$ を $\mathbf{R}^n, 0 \to \mathbf{R}^p, 0$ なる写像芽の r ジェット全体のなす空間（ある次元のユークリッド空間と同一視できる）としたとき，Σ に対応する集合が $J^r(n,p)$ の semi-algebraic set になる，ということ．

[7] 正確には，$\Sigma(M,N)$ を stratify したときに，それらの strata と $j^r f$ が横断的に交わるということ．

[8] このコホモロジー類そのものを Thom 多項式という場合もあるが，本来は，f の Σ に付随したコホモロジー類とでも呼ぶべきであろう．

[9] 本節の内容は佐久間一浩氏（近畿大）との共同研究である [25]．

[10] M 上のある次元の自明なベクトル束 ε に対して，Whitney sum $TM \oplus \varepsilon$ が M 上の自明なベクトル束になるとき，M を**安定的に平行化可能**であるという．

ものを表すことにする．C^∞ 級写像 $f : M \to N$ が**安定写像**であるとは，f の $C^\infty(M,N)$ における近傍 U_f があって，任意の $g \in U_f$ に対して図式

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ h_1 \downarrow & & \downarrow h_2 \\ M & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

を可換にする微分同相写像 h_1, h_2 が存在するときをいう．Mather [20] の結果により，安定写像全体の集合は $C^\infty(M,N)$ の中で常に open dense であることに注意する．

さて，上のような安定写像に現れる特異点は Mather の理論を使うことにより完全に決定することができ（[12] 等参照），A_1 (fold), A_2 (cusp), A_3 (swallow tail), A_4 (butterfly), $\Sigma^{2,0}$ (umbilic) の５種類であることが知られている[11]．さらに，今まで知られている種々の結果を用いることにより，それらの Thom 多項式を以下のように完全に決定することができる．

特異点の型 Σ	$\dim \Sigma(f)$	Thom 多項式
A_1	3	0
A_2	2	w_2
A_3	1	0
A_4	0	0
$\Sigma^{2,0}$	0	w_2^2 （$\mathbf{Z}$ 係数では p_1）

ここで，$w_i \in H^i(M)$ は M の i-th Stiefel-Whitney class を表す．なお，$\Sigma^{2,0}(f)$ には自然な向きが入り（たとえば [30] 参照），$[\Sigma^{2,0}(f)] \in H_0(M;\mathbf{Z})$ と思うことができるが，上の表の最後に書いてあることは，この（$\mathbf{Z}$ 係数での）Poincaré dual が M の 1-st Pontryagin class $p_1 \in H^4(M;\mathbf{Z})$ に一致することを意味する．

上で出てくる特異点のうち，次元が 0 のものについては次のことが知られていた[12]．

定理１（安藤 [2], [3]）． $p_1 = 0$ ならば[13] 任意の写像 $f : M \to N$ をホモトピーで動かして，$\Sigma^{2,0}, A_4$ 型の特異点を持たない安定写像に変形できる．

そこで，1 次元以上の特異点の消去が問題となるが，これについて次を得た[14]．

定理２（佐伯，佐久間 [25]）． $f : M \to N$ が $\Sigma^{2,0}, A_4, A_3$ 型の特異点を持たない安定写像にホモトピックとなるための必要十分条件は $p_1 = 0$ となることである．

[11] 実は umbilic には，さらに elliptic と hyperbolic の２種類がある．

[12] 安藤氏はもっと一般的な状況で定理１を証明しているが，いずれにしても次元が 0 の特異点集合のみ扱っている．

[13] この条件は，M の signature が 0 になることと同値である．

[14] ここでの状況に限らず，0 次元の特異点の消去に関してはいくつかの結果が既に知られていた（たとえば，[31], [19], [2], [3], [30] など）．1 次元以上の特異点の消去についての本質的な結果は，筆者の知る限り上の定理２が最初である．

定理 2 は，Èliašberg の **homotopy principle**[15] [10] を応用することによって証明できる．

さらに，$w_2 = 0$ となると，A_2 型の特異点に付随したホモロジー類も消えるが，このときは M が安定的に平行化可能となるので，Èliašberg [10] の結果より，どんな f も A_1 型の特異点しか持たない安定写像にホモトピックとなる．

以上をまとめると，我々の状況では，問題 4 が肯定的に解決された[16] ことになる[17]．

3　4 次元から 3 次元への安定写像

次に，問題 4 が否定的に解ける例として，4 次元多様体から 3 次元多様体への写像について解説しよう．

M を向き付け可能な 4 次元閉多様体，N を向き付け可能な 3 次元多様体とする．これらに対しても，写像 $f : M \to N$ が安定であるということを前節と同様に定義できる．そして，この状況で安定写像に現れる特異点は，A_1 (fold), A_2 (cusp), A_3 (swallow tail) の 3 種類であることもわかる．しかも，これらの Thom 多項式は以下のようになることも知られている．

特異点の型 Σ	$\dim \Sigma(f)$	Thom 多項式
A_1	2	w_2
A_2	1	0
A_3	0	0

安藤 [3] により，0 次元の A_3 型の特異点は消去できることが知られている．では，1 次元の A_2 型の特異点についてはどうであろうか？実は，一般には消去できないことが次のようにわかった．

定理 3（[22]）．$H_*(M; \mathbf{Z}) \cong H_*(\mathbf{C}P^2; \mathbf{Z})$ とすると，どんな $f : M \to N$ も，A_2, A_3 型の特異点を持たない安定写像にホモトピックにならない．

証明のアイデアは以下の通りである．もし A_2, A_3 型の特異点を持たない安定写像 $g : M \to N$ が存在したとすると，$A_1(g)$ は M に埋め込まれた閉曲面で，しかも上の Thom

[15] $g : M \to N$ が，M, N の接空間の間の写像で，$M - C$（C は M の閉集合）上で A_1 型の特異点に対応した特異点しかもたないものにリフトできるならば，実際に g は $M - C$ 上で A_1 型の特異点しか持たない写像にホモトピーで動かせる，という定理．

[16] A_1 型の特異点に付随したホモロジー類も消えるので，この特異点の消去も問題になるように見える．しかし，もし消去できてしまうと，その写像ははめ込み（あるいは沈め込みと言っても同じ）となってしまうので，たとえば N が開多様体とすると，容易に矛盾が導ける．したがって，A_1 型の特異点に関しては，問題 4 自体あまり意味を持たなくなってしまうのである．

[17] ここでの結果は，たとえば du Plessis の結果 [5], [6], [7] からは出てこない．ここで出てくる特異点が，彼の結果を適用するための条件を満たさないからである．

多項式の計算から，特性曲面[18] であることがわかる．一方，A_1 型の特異点は局所的に

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1, x_2, \pm x_3^2 \pm x_4^2)$$

と書けるので，これを使うと，$A_1(g)$ の法オイラー数が消えることがわかる．あとは，特性曲面に対する **Rohlin 型の定理** [14] を適用すると，M の交点形式の形から矛盾が導ける．

A_3 型の特異点の Thom 多項式が常に 0 であったことを思い出すと，結局上の状況で，問題 4 が否定的に解かれたことになる．

なお，上の状況で，$j^r f : M \to J^r(M, N)$ が，$\psi : M \to J^r(M, N)$ で $\psi(M) \cap (A_2(M, N) \cup A_3(M, N)) = \emptyset$ なるものにホモトピックかどうかはわかっていない．また，$H_*(M; \mathbf{Z}) \cong H_*(\mathbf{C}P^2; \mathbf{Z})$ という条件を,「M のオイラー標数が奇数である」という条件でおきかえられるかどうかもわかっていない（[29] 参照）．

4 Morin 写像と Hopf 不変量 1 の問題

M を n 次元閉多様体，N を p 次元多様体 $(n \geq p)$ とする[19]．写像 $f : M \to N$ に対して，点 $q \in M$ が A_k **型の Morin 特異点**である $(1 \leq k \leq p)$ とは，$q, f(q)$ のまわりの適当な局所座標を用いて f が

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto \left(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x_p^{k+1} + \sum_{i=1}^{k-1} x_i x_p^{k-i} \pm x_{p+1}^2 \pm \cdots \pm x_n^2 \right)$$

と表せるときをいう[20]（[21]）．さらに f が特異点として Morin 特異点しか持たないとき，f を **Morin 写像**という[21]．

たとえば $N = \mathbf{R}$ のときは，Morin 写像は **Morse 関数**[22] に他ならない．そして，$p \leq 3$ のときは，どんな写像も Morin 写像で近似できることが知られている．$p \geq 4$ のときは一般に，与えられた多様体 M, N に対してその間に Morin 写像があるかどうかはわからない．たとえば，§2 の状況で $p_1 \neq 0$ とすると，umbilic（これは Morin 特異点ではない）が必ず出てくるので，M から N への Morin 写像は存在すらしない．

より一般の次元では，次の定理が証明できる．

定理 4（菊地，佐伯，佐久間 [18], [26]）．M のオイラー標数が奇数であり，N が概平行化可能[23] であるとする．

(1) もし，A_1 型の特異点しか持たない Morin 写像 $f : M \to N$ が存在すれば，$p = 1, 3, 7$ でなければならない．

[18] 4 次元閉多様体に埋め込まれた閉曲面で，その表すホモロジー類の Poincaré dual が w_2 と一致するもののことを**特性曲面**という．

[19] 本節の内容は，菊地茂樹氏（弘前大）[18]，佐久間一浩氏（近畿大）[26] との共同研究である．

[20] §§2, 3 で出てきた A_k 型の特異点は，実はここでの意味の Morin 特異点になっている．

[21] Morin 写像は，いたる所微分の階数が $p - 1$ 以上で，そのジェット拡大がすべての Thom-Boardman strata（たとえば [12] 参照）に横断的なもの，としても特徴付けられる．

[22] ただしここでは,「すべての臨界値が異なる」という条件は考えない．

[23] 1 点を取り除いてできる多様体が平行化可能のとき，もとの多様体を**概平行化可能**であるという．

(2) もし，A_1, A_2 型の特異点しか持たない Morin 写像 $f : M \to N$ が存在すれば，$p = 1, 2, 3, 4, 7, 8$ でなければならない．

(3) p が偶数で，A_1, A_2, A_3 型の特異点しか持たない Morin 写像 $f : M \to N$ が存在すれば，$p = 2, 4, 8$ でなければならない．

注意．上にあげた p の各値に対しては，実際に（そこにある型の特異点しか持たない）Morin 写像を構成することができる．

たとえば定理 4 (1) は次のようなアイデアで証明できる．もし，A_1 型の特異点しか持たない Morin 写像 $f : M \to N$ が存在したとすると，$A_1(f)$ は M の $p-1$ 次元部分多様体であり，$f|_{A_1(f)} : A_1(f) \to N$ は余次元 1 のはめ込みになることがわかる．さらに，M のオイラー標数と $A_1(f)$ のオイラー標数の偶奇は等しく（[24]），仮定により，$A_1(f)$ のオイラー標数は奇数となる．よって，特に $p-1$ は偶数である．さて，はめこみ $f|_{A_1(f)}$ を自己横断的なはめ込み $\psi : A_1(f) \to N$ にホモトピーで動かしたときの p 重点の個数の偶奇は，$A_1(f)$ のオイラー標数の偶奇に等しいことが，Herbert の公式 [16] を用いることにより容易に証明できる[24]．したがって，ψ の p 重点の個数は奇数である．ところが，Eccles の結果 [8], [9] により，余次元 1 の自己横断的はめ込みで p 重点の個数が奇数であるようなものが存在するためには，

$$S^{2p+1} \to S^{p+1}$$

なる連続写像で **Hopf 不変量**が 1 であるものが存在することが必要十分である．したがって，Adams [1] の有名な結果より $p = 1, 3, 7$ となる（$p \geq 1$ に注意）．

以上のように，Morin 写像の存在問題と，Hopf 不変量 1 の問題は密接に関連している．

ところで，上の定理 4 は問題 4 と次のように関連している．定理 4 の状況で，A_k 型の特異点の Thom 多項式は必ずしも消えるとはいえないが，ある状況では消えることが確かめられる．たとえば，$n - p = 1$ のとき，A_k 型の特異点の Thom 多項式は，$k = 1, 3$ を除いて常に消えることが知られている．そして，A_3 型の特異点の Thom 多項式は，$w_1 w_3$ であることも知られている．したがって，$w_1 w_3 = 0$ なる状況では，Morin 特異点に付随したホモロジー類はすべて消えることになる．定理 4 は，そういった状況であっても，p がそこにあげた値でない限りは，対応した特異点を消去することはできないことを意味している．つまり，ある種の状況において，問題 4 が否定的に解かれているといえる[25]．

[24] p が偶数であることが必要である．

[25] ただし多少注意が必要である．というのは，Morin 特異点以外の特異点の Thom 多項式をここでは考えていないからである．たとえば §2 の状況で $p_1 \neq 0$ とすると，仮に Morin 特異点の Thom 多項式が消えていても，umbilic は消せないから，それに隣接して現れる A_2 型や A_3 型の特異点も決して消去出来ないことになる．したがって，問題 4 を考える際には，本来は，与えられた型の特異点に隣接して現れる特異点も込めて考える必要があるのである．

5 微分構造と special generic map

これまでは，特異点の消去問題を Thom 多項式というある意味で homotopy theoretic な観点から考えてきたが，微分位相幾何学的立場から，次のような問題も考えられる[26]．

問題 5．多様体 M_1, M_2, N で，M_1 と M_2 は同相だが，M_1 上には N への与えられた型 Σ の特異点を持たない写像は存在するが，M_2 上には存在しない，という例はあるか？

もし上のような例が存在すれば，M_1 と M_2 は微分同相にはなり得ない．もしなってしまったとすると，その微分同相写像（の逆写像）を合成することにより，まったく同じ特異点を持った写像が M_2 上にも作れてしまうからである．したがって，もし上のような例が存在すれば，それは位相多様体 M_1 の上に微分構造が 2 つ以上入ることを意味する．

たとえば一番顕著な例として，初めから M_1, M_2 として，同相だが微分同相でない多様体を取ってこよう．そして $N = M_1$ とおくと，M_1 上には N への特異点をまったく持たない写像（つまり微分同相写像）が存在するが，M_2 上には存在しないことになり，上の問題 5 の解答を与えることになる．

では，もう少し本質的に特異点が現れる例はないものであろうか？

そこで次のような写像のクラスを考える．M を n 次元閉多様体，N を p 次元多様体 $(n \geq p)$ とする．写像 $f : M \to N$ に対して，点 $q \in M$ が **definite fold** であるとは，$q, f(q)$ のまわりの適当な局所座標を用いて f が

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x_p^2 + x_{p+1}^2 + \cdots + x_n^2)$$

と表せるときをいう（特に definite fold は A_1 型の Morin 特異点である）[27]．さらに f が特異点として definite fold しか持たないとき，f を **special generic map**[28] という（[4], [23]）．

Special generic map はかなり特殊な写像であるが，もっとも簡単な（ジェネリックな）特異点（すなわち definite fold）しか持たない写像ということもあり，特異点の大域的位相幾何学の観点から，最近特に盛んに研究されている．たとえば，問題 5 に関連して次のことが知られている．

定理 5（[23]）．$f : \Sigma^n \to \mathbf{R}^p$ をホモトピー n 球面 Σ^n 上の special generic map とする．もし $n - p = 1, 2, 3$ かつ $n \geq 5$ ならば，Σ^n は標準的な n 次元球面 S^n に微分同相である．

ホモトピー n 球面 Σ^n は常に安定的に平行化可能だから，Èliašberg [11] の結果より，Σ^n から $\mathbf{R}^p$ への，特異点として A_1 型の特異点しか持たない写像 $g : \Sigma^n \to \mathbf{R}^p$ が常に存在

[26] 本節の内容も大部分，佐久間一浩氏との共同研究である [27], [28].

[27] $N = \mathbf{R}$ の場合は，Morse 関数の最大値，最小値を与える点がそうである．Definite fold は，ある意味でもっとも簡単な特異点であるといえる．

[28] これは，ジェネリックな写像（ある意味で豊富に存在する写像ということ）の中で特殊なもの，の意．

する．しかし，もし Σ^n が**異種球面**（exotic sphere）[29] ならば，ある状況下で，g をホモトピーでどう動かしても，definite fold 以外の A_1 型の Morin 特異点（これを **indefinite fold** という）を消去できない，ということを定理５は示している．これは，問題１がある多様体について肯定的に解けても，それと同相な多様体上で肯定的に解けないこともある，ということを意味している．つまり，問題１が多様体の微分構造と深く関わっていることもある，ということである．

上のような例は，４次元から３次元への写像においても多く見られる．たとえば，４次元多様体の例として一番手軽なのは，複素解析的曲面（の複素構造を忘れた実４次元多様体）であるが，これに関して最近次を得た．

定理６（佐伯，佐久間 [28]）．M をコンパクトな複素解析的曲面とする．M を実４次元多様体とみなしたとき，M から $\mathbf{R}^3$ への special generic map が存在するための必要十分条件は，M が**線織面（ruled surface）**[30]，又は，**primary Hopf surface**[31]（と複素解析的に同型）となることである．

たとえば，一般型の複素解析的曲面の中には，$\mathbf{R}^3$ への special generic map を許容する４次元多様体（たとえば，$S^2 \times S^2$ 多数の連結和）と同相になるものが存在することが知られている．上の定理６より，一般型の複素解析的曲面は $\mathbf{R}^3$ への special generic map を許容しないから，こういった例も問題５の解答を与えるわけである．

この他にも問題５の解答を与える例はたくさんある．たとえば，次もそのような例を与える定理である．

定理７（佐伯，佐久間 [27]）．K を K3 surface[32]（の複素構造を忘れて得られる実４次元多様体）とし，$S^1 \tilde{\times} S^3$ を S^1 上の non-orientable S^3-束とする．すると，各 $k \geq 0$ に対して，$M_1 = (S^1 \tilde{\times} S^3) \sharp (\sharp^{k+11} S^2 \times S^2)$ は　$M_2 = (S^1 \tilde{\times} S^3) \sharp K \sharp (\sharp^k S^2 \times S^2)$ と同相で，M_1 上には $\mathbf{R}^3$ への special generic map が存在するが，M_2 上には存在しない．

このように，special generic map の存在（あるいは，definite でない fold の消去）問題は，多様体の微分構造に深く関わっているのである．

注意．Definite fold に対応した Thom 多項式は存在しないことに注意しておく．Definite fold もそうでない fold もすべて一緒にして（A_1 型の特異点全体として考えて）初めて Thom 多項式が意味を持つのである[33]．

---

[29] 標準的球面 S^n と同相だが，微分同相でない多様体のこと．良く知られているように，異種球面は豊富に存在する [17].

[30] コンパクトなリーマン面上の $\mathbf{C}P^1$ 束.

[31] $S^1 \times S^3$ と微分同相な複素解析的曲面.

[32] コンパクトな複素解析的曲面で，その標準直線束が自明で，不正則数 q が 0 となるもの．$\mathbf{C}P^3$ 内の degree 4 の非特異代数的曲面などがその例である.

[33] このことは，たとえば Morse 関数を考えてみればすぐわかる．多様体上の Morse 関数で，極大・極小を与える点があわせて奇数個のものを作るのも，偶数個のものを作るのも，容易である.

参考文献

[1] J. F. Adams, *On the non-existence of elements of Hopf invariant one*, Ann. of Math. **72** (1960), 20–104.

[2] Y. Ando, *Elimination of certain Thom-Boardman singularities of order two*, J. Math. Soc. Japan **34** (1982), 241–267.

[3] Y. Ando, *On the elimination of Morin singularities*, J. Math. Soc. Japan **37** (1985), 471–487; Erratum, **39** (1987), 537.

[4] O. Burlet et G. de Rham, *Sur certaines applications génériques d'une variété close à trois dimensions dans le plan*, Enseign. Math. **20** (1974), 275–292.

[5] A. A. du Plessis, *Maps without certain singularities*, Comment. Math. Helv. **50** (1975), 363–382.

[6] A. A. du Plessis, *Homotopy classification of regular sections*, Compositio Math. **32** (1976), 301–333.

[7] A. A. du Plessis, *Contact invariant regularity conditions*, Lecture Notes in Math., vol.535, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1976, pp.205–236.

[8] P. J. Eccles, *Multiple points of codimension one immersions*, Lecture Notes in Math., vol.788, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980, pp. 23–38.

[9] P. J. Eccles, *Codimension one immersions and the Kervaire invariant one problem*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **90** (1981), 483–493.

[10] J. M. Èliašberg, *On singularities of folding type*, Math. USSR Izv. **5** (1970), 1119–1134.

[11] J. M. Èliašberg, *Surgery of singularities of smooth mappings*, Math. USSR Izv. **6** (1972), 1302–1326.

[12] M. Golubitsky and V. Guillemin, *Stable mappings and their singularities*, Graduate Texts in Math., no.14, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1973.

[13] M. L. Gromov, *Partial differential relations*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3.Folge Band 9, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1986.

[14] L. Guillou et A. Marin, *Une extension d'un théorème de Rohlin sur la signature*, C. R. Acad. Sci. Paris **285** (1977), 95–98.

[15] A. Haefliger et A. Kosinski, *Un théorème de Thom sur les singularités des applications différentiables*, Séminaire H. Cartan, E. N. S., 1956/57, Exposé no.8.

[16] R. J. Herbert, *Multiple points of immersed manifolds*, Mem. Amer. Math. Soc. **34**, no.250, 1981.

[17] M. A. Kervaire and J. W. Milnor, *Groups of homotopy spheres: I*, Ann. of Math. **77** (1963), 504–537.

[18] S. Kikuchi and O. Saeki, *Remarks on the topology of folds*, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 905–908.

[19] H. Levine, *Elimination of cusps*, Topology **3** (suppl. 2) (1965), 263–296.

[20] J. Mather, *Stability of C^∞-mappings : VI, The nice dimensions*, Proceedings of Liverpool Singularities – Symposium I, Lecture Notes in Math., vol.192, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1971, pp.207–253.

[21] B. Morin, *Formes canoniques des singularités d'une application différentiable*, C. R. Acad. Sci. Paris **260** (1965), 5662–5665, 6503–6506.

[22] O. Saeki, *Notes on the topology of folds*, J. Math. Soc. Japan **44** (1992), 551–566.

[23] O. Saeki, *Topology of special generic maps of manifolds into Euclidean spaces*, Topology Appl. **49** (1993), 265–293.

[24] O. Saeki, *Studying the topology of Morin singularities from a global viewpoint*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **117** (1995), 223–235.

[25] O. Saeki and K. Sakuma, *Stable maps between 4-manifolds and elimination of their singularities*, to appear in J. London Math. Soc.

[26] O. Saeki and K. Sakuma, *Maps with only Morin singularities and the Hopf invariant one problem*, to appear in Math. Proc. Camb. Phil. Soc.

[27] O. Saeki and K. Sakuma, *On special generic maps into $\mathbf{R}^3$*, to appear in Pacific J. Math.

[28] O. Saeki and K. Sakuma, *Special generic maps of 4-manifolds and compact complex analytic surfaces*, preprint, 1997.

[29] K. Sakuma, *On the topology of simple fold maps*, Tokyo J. Math. **17** (1994), 21–31.

[30] R. Stingley, *Singularities of maps between 4-manifolds*, Ph.D. thesis, SUNY-Stony Brook, 1993.

[31] H. Whitney, *The singularities of a smooth n-manifold in $(2n-1)$-space*, Ann. of Math. **45** (1944), 247–293.