Fermion 測度とその周辺

白井 朋之 (金沢大・理学部)

目 次

1 はじめに

１９５０年代に原子核（多体系）のスペクトルの統計的な研究のために Wigner がランダム行列を導入し，Wigner の半円則を証明した [45] のをきっかけにランダム行列の研究は物理と数学の両分野で多方面に拡がっている．数あるランダム行列の中でも特に GUE は深い数学的対象であることがわかってきている．GUE とは $N \times N$-Hermite 行列全体 $\mathcal{H}_N$ にガウス測度

$$P_N(dX) \propto \exp(-\operatorname{Tr}(X^2))dX \tag{1.1}$$

を入れたランダム行列である．Hermite 行列 X の行列成分のうち，上三角の非対角成分の実部と虚部 $\operatorname{Re} X_{ij}, \operatorname{Im} X_{ij}$ $(1 \leq i < j \leq N)$, 対角成分 X_{ii} $(1 \leq i \leq N)$ の N^2 個が独立な変数なので，$\mathcal{H}_N$ は自然に $\mathbf{R}^{N^2}$ と見なせ，dX はそう見たときの $\mathcal{H}_N$ 上の Lebesgue 測度

$$dX = \prod_{i=1}^{N} dX_{ii} \times \prod_{1 \leq i < j \leq N} d(\operatorname{Re} X_{ij}) d(\operatorname{Im} X_{ij})$$

である．$\operatorname{Tr}(X^2)$ が各成分の２乗和であることに注意すれば，(1.1) は，各成分 $\operatorname{Re} X_{ij}, \operatorname{Im} X_{ij}$ $(1 \leq i < j \leq N)$, X_{ii} $(1 \leq i \leq N)$ が独立な 1 次元の Gauss 分布に従っていることを意味する．

$\mathcal{H}_N$ の元の N 個の実固有値 $x = (x_1, \dots, x_N)$ の $\mathbf{R}^N$ における（対称化した）分布密度は，

$$\begin{aligned}
\mu_N(x) &= \mu_N(x_1, \dots, x_N) \\
&= Z_N^{-1} \prod_{1 \leq i < j \leq N} (x_i - x_j)^2 \exp\left(-\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \right) \\
&= \det\left(K^{(N)}(x_i, x_j) \right)_{i,j=1}^{N}
\end{aligned}$$

という非常に特別な形になることが知られている [29]．ただし，

$$
\begin{aligned}
K^{(N)}(x,y) &= \sum_{k=0}^{N-1} \varphi_k(x)\varphi_k(y) \\
&= \left(\frac{N}{2}\right)^{1/2} \frac{\varphi_N(x)\varphi_{N-1}(y) - \varphi_{N-1}(x)\varphi_N(y)}{x-y}
\end{aligned}
$$

と定義される積分核である．また $\varphi_k(x)$ は正規化された Hermite 関数で，

$$
\varphi_k(x) = \frac{1}{(\sqrt{\pi}k!2^k)^{1/2}} H_k(x) e^{-x^2/2}
$$

によって与えられる．$H_k(x)$ は Hermite 多項式

$$
H_k(x) = (-1)^k e^{x^2} \frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2}
$$

で重み $e^{-x^2}dx$ に関する直交多項式である．$K^{(N)}(x,y)$ についての二つ目の等式は直交多項式論で有名な Christoffel-Darboux の公式による [39]．

ここに与えられた確率密度関数の $N-n$ 個の変数を積分することにより n 点相関関数が得られる．n 点相関関数とは以下のようなものである．

$$
\rho_n^{(N)}(x_1,\ldots,x_n) = \frac{N!}{(N-n)!} \int_{\mathbf{R}^{N-n}} p_N(x_1,\ldots,x_N) dx_{n+1}\ldots dx_N \tag{1.2}
$$

によって定義する．この特別な形の確率密度関数 (相関関数) が後で見るように Fermion 測度の特徴であり，GUE の固有値分布は Fermion 測度となることがわかる．

Hermite 関数の漸近形は詳しく研究されており (cf. [20])，その結果を用いると $K^{(N)}(x,y)$ のスケーリング極限が計算される．

$\alpha_N = \frac{\pi}{\sqrt{2N}}$ とおくと，

$$
\lim_{N\to\infty} \alpha_N K^{(N)}(\alpha_N x, \alpha_N y) = \frac{\sin\pi(x-y)}{\pi(x-y)} =: K^{sine}(x,y)
$$

となり，$K^{sine}(x,y)$ は正弦核と呼ばれる．

また $\beta_N = \frac{1}{\sqrt{2}N^{1/6}}$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} \beta_N K^{(N)}(\sqrt{2N}+\beta_N x, \sqrt{2N}+\beta_N y) &= \frac{\mathrm{Ai}(x)\mathrm{Ai}'(y) - \mathrm{Ai}'(x)\mathrm{Ai}(y)}{x-y} \\
&=: K^{Airy}(x,y)
\end{aligned}
$$

となり，$K^{Airy}(x,y)$ は Airy 核と呼ばれる ([11, 42])．ただし，

$$
K^{Airy}(x,x) = \mathrm{Ai}'(x)^2 - \mathrm{Ai}''(x)\mathrm{Ai}(x) = \mathrm{Ai}'(x)^2 - x\mathrm{Ai}(x)^2.
$$

Γ 分布の行列版を考えよう．非負定値 Hermite 行列は必ず X^*X の形に書けることに注意して，$\alpha > -1$ とするとき非負定値行列の空間に

$$
\exp(-\operatorname{Tr}(X^*X)) \det(X^*X)^\alpha dX \tag{1.3}
$$

に比例する確率分布を考えたものは Laguarre Ensemble とよばれる．ただし，dX は複素行列全体上の Lebesgue 測度．このとき X^*X の固有値は非負となりその分布は GUE と同様に行列式の形をもつ．

$$
\begin{aligned}
\mu_N(x) &= \mu_N(x_1,\ldots,x_N) \\
&= Z_N^{-1} \prod_{1\le i<j\le N} (x_i-x_j)^2 \prod_{i=1}^N x_i^\alpha \exp\left(-\sum_{i=1}^N x_i\right) \\
&= \det\left(K^{(N)}(x_i,x_j)\right)_{i,j=1}^N
\end{aligned}
$$

ここで積分核は $K^{(N)}(x,y)=\sum_{k=0}^{N-1}\psi_k^{(\alpha)}(x)\psi_k^{(\alpha)}(y)$ である．ただし，$\psi_k^{(\alpha)}(x)=L_k^{(\alpha)}(x)x^{\alpha}e^{-x}$ で $L_k^{(\alpha)}(x)$ は Laguarre 多項式である．つまり，$(0,\infty)$ における重み $x^{\alpha}e^{-x}dx$ に関する直交多項式で

$$L_k^{(\alpha)}(x)=\frac{x^{-\alpha}e^{x}}{k!}\frac{d^k}{dx^k}x^{\alpha}e^{-x}$$

で与えられる．$\gamma_N=\frac{1}{4N}$ とおくと

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\gamma_N K^{(N)}(\gamma_N x,\gamma_N y) &= \frac{J_\alpha(\sqrt{x})\sqrt{y}J'_\alpha(\sqrt{y})-\sqrt{x}J'_\alpha(\sqrt{x})J_\alpha(\sqrt{y})}{2(x-y)}\\ &= :K^{Bessel}(x,y)\end{aligned}$$

となる．ここで J_α は Bessel 関数である．$K^{Bessel}(x,y)$ は Bessel 核と呼ばれる (cf. [42])．

注意 *1.1.* これらの積分核 $K^{(N)},K_{sine},K_{Airy},K_{Bessel}$ などから定まる積分作用素はすべて射影作用素になっていることに注意する．

本講演ではまず Fermion 測度の性質について (特に離散の場合に) 詳しく述べた後，その類似物である α-Boson 測度について考えたい．またこの他 Wishart 過程や表現論と α-Boson 測度との関係や，Tracy-Widom 分布と Airy 過程などについても考えたい．

2 離散 Fermion 測度 (Determinantal 測度)

2.1 アイディア

まず Fermion 測度のアイディアを簡単に説明しよう．

二つの行列

$$K=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},\quad I-K=\begin{pmatrix}1-a & -b\\ -c & 1-d\end{pmatrix}$$

を用意して，$\{0,1\}^2$ 上の関数 $\mu(x_1x_2)$ を以下のように定める：

(1) x_1x_2 の値によって $K,I-K$ からあらたな行列 $K^{(x_1x_2)}$ をつくる．$K^{(x_1x_2)}$ の 1 行目は $x_1=1,0$ に従って $K,I-K$ の 1 行目とする．$K^{(x_1x_2)}$ の 2 行目は $x_2=1,0$ に従って $K,I-K$ の 2 行目とする．

(2) $\mu(x_1x_2)=\det(K^{(x_1x_2)})$ と定める．具体的には行列 $K^{(x_1x_2)}$ は

$$K^{(11)}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},\quad K^{(10)}=\begin{pmatrix}a & b\\ -c & 1-d\end{pmatrix},\quad K^{(01)}=\begin{pmatrix}1-a & -b\\ c & d\end{pmatrix},\quad K^{(00)}=\begin{pmatrix}1-a & -b\\ -c & 1-d\end{pmatrix}$$

となり，

$$\begin{aligned}&\mu(11)=\det K^{(11)}=ad-bc,\quad \mu(10)=\det K^{(10)}=a(1-d)+bc,\\ &\mu(01)=\det K^{(01)}=(1-a)d+bc,\quad \mu(00)=\det K^{(00)}=(1-a)(1-d)-bc.\end{aligned}$$

と定める．行列式の多重線型性により $\mu(11)+\mu(10)=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}=a$, $\mu(01)+\mu(00)=\begin{pmatrix}1-a & -b\\ 0 & 1\end{pmatrix}=1-a$ であるから

$$\mu(11)+\mu(10)+\mu(01)+\mu(00)=1$$

であることがわかる．またすべての $x_1x_2\in\{0,1\}^2$ に対して $\mu(x_1x_2)\geq 0$ となるための必要十分条件は，

$$\begin{cases}0\leq a,d\leq 1,\ bc\in\mathbf{R},\\ -\min((1-a)d,a(1-d))\leq bc\leq\min(ad,(1-a)(1-d))\end{cases}$$

である．つまり，K が上の条件を満たすとき, μ は集合 $\{0,1\}^2$ 上の確率分布を定める．このアイディアを一般の場合に拡張しよう．

2.2 離散 Fermion 測度

以下，R を高々可算な集合とし，配置空間を $Q=Q(R)=\{\xi:R\to\{0,1\}\}$ とし直積位相を入れて位相空間とみなす．ξ の台と R の部分集合との対応でしばしばべき集合 2^R と可算直積空間 Q とを同一視する．R を添字集合とする (無限次) 複素行列 $K=(K(x,y))_{x,y\in R}$ が以下の仮定を満たすとする．

仮定 2.1. 任意の互いに素な R の有限部分集合 Λ_0,Λ_1 に対して，

$$\det(P_{\Lambda_0}(I_\Lambda-K_\Lambda)+P_{\Lambda_1}K_\Lambda)=\det\begin{pmatrix}I_{\Lambda_0}-K_{\Lambda_0} & -K_{\Lambda_0\Lambda_1}\\ K_{\Lambda_1\Lambda_0} & K_{\Lambda_1}\end{pmatrix}\geq 0$$

が成り立つ．ただし，

$$\Lambda=\Lambda_0\sqcup\Lambda_1,\quad K_{\Lambda\Lambda'}:=P_\Lambda KP_{\Lambda'},\quad K_\Lambda:=K_{\Lambda\Lambda}$$

とする．

Λ_0,Λ_1 を互いに素な R の有限部分集合とする．$\xi:Q\to\{0,1\}$ に対して Λ_0 上で 0, Λ_1 上で 1 となるような関数全体からなる筒集合 $0^{\Lambda_0}1^{\Lambda_1}$ を

$$0^{\Lambda_0}1^{\Lambda_1}=\{\xi\in Q\,;\,\xi(x)=i\ \ \text{if}\ x\in\Lambda_i,\ i=0,1\}$$

とする．また Q 上の筒集合全体を $\mathcal{C}$ とする．

$\mathcal{C}$ 上の非負集合関数を

$$\begin{aligned}\mu(0^{\Lambda_0}1^{\Lambda_1}) &= \det(P_{\Lambda_0}(I_\Lambda-K_\Lambda)+P_{\Lambda_1}K_\Lambda),\\ \mu(Q) &= 1\end{aligned}$$

によって定義する．ただし，$\Lambda=\Lambda_0\sqcup\Lambda_1$．このとき次のことがわかる．

補題 2.2. $\{\mu(0^{\Lambda_0}1^{\Lambda_1})\,;\,\Lambda_0,\Lambda_1\subset R,\Lambda_0\cap\Lambda_1=\emptyset\}$ は次の意味で無矛盾：任意の互いに素な有限部分集合 $\Lambda_0,\Lambda_1\subset R$ と $\Lambda:=\Lambda_0\sqcup\Lambda_1$ に含まれない任意の $x\in R$ に対して，

$$\mu(0^{\Lambda_0\cup\{x\}}1^{\Lambda_1})+\mu(0^{\Lambda_0}1^{\Lambda_1\cup\{x\}})=\mu(0^{\Lambda_0}1^{\Lambda_1}).$$

さらに，

$$\sum_{\Lambda_0\sqcup\Lambda_1=\Lambda}\mu(0^{\Lambda_0}1^{\Lambda_1})=1. \tag{2.1}$$

証明. 証明は $N=|\Lambda|$ による帰納法．$N=0$ のときは $(1-K(x,x))+K(x,x)=1$ より明らか．また $N=|\Lambda|$ まで正しいと仮定する．$\tilde\Lambda=\Lambda\cup\{x\}$ として

$$K_{\tilde\Lambda}=\begin{pmatrix}K & b\\ {}^tc & k\end{pmatrix}$$

とかく．ただし，$K=K_\Lambda$, $k=K(x,x)$ としている．このとき行列式の多重線型性より

$$\begin{aligned}&\mu(0^{\Lambda_0\cup\{x\}}1^{\Lambda_1})+\mu(0^{\Lambda_0}1^{\Lambda_1\cup\{x\}})\\ &= \det\begin{pmatrix}P_{\Lambda_1}K+P_{\Lambda_0}(I-K) & P_{\Lambda_1}b-P_{\Lambda_0}b\\ -{}^tc & 1-k\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}P_{\Lambda_1}K+P_{\Lambda_0}(I-K) & P_{\Lambda_1}b-P_{\Lambda_0}b\\ {}^tc & k\end{pmatrix}\\ &= \det\begin{pmatrix}P_{\Lambda_1}K+P_{\Lambda_0}(I-K) & P_{\Lambda_1}b-P_{\Lambda_0}b\\ {}^t0 & 1\end{pmatrix}=\det\left(P_{\Lambda_1}K+P_{\Lambda_0}(I-K)\right)\\ &= \mu(0^{\Lambda_0}1^{\Lambda_1}).\end{aligned}$$

よって第一の主張は証明された．二つ目の主張はこのことを繰り返して用いればよい． □

注意 *2.3.* 上の補題 2.2 の式 (2.1) は次の事実の特別な場合 ($A = K,\ B = I - K$) となっている：任意の $|\Lambda| \times |\Lambda|$ 次行列 A, B に対して，

$$\sum_{\Lambda_0 \sqcup \Lambda_1 = \Lambda} \det\left(P_{\Lambda_1} A + P_{\Lambda_0} B\right) = \det(A + B)$$

が成り立つ．

補題 2.2 と Kolmogorov の拡張定理から次の結果を得る．

定理 2.4. *K は 仮定 2.1 を満たすとする．このとき，Q 上の Borel 確率測度 μ_K で有限次元分布が*

$$\mu_K(0^{\Lambda_0} 1^{\Lambda_1}) = \det(P_{\Lambda_0}(I_\Lambda - K_\Lambda) + P_{\Lambda_1} K_\Lambda)$$

によって与えられるものがただ一つ存在する．

この定理により得られる $Q = Q(R)$ 上の Borel 確率測度 μ_K を K に付随する離散 Fermion 測度とよぶことにする．

以下のことに注意しよう．

注意 *2.5.* K が 仮定 2.1 を満たせば $I - K$ も満たす．このとき μ_{I-K} は写像 $Q \ni \xi \mapsto 1 - \xi \in Q$ による μ_K の像測度になる．この事実は R が離散であることによっている．

さて筒集合の測度は別の形でも計算できる．

補題 2.6. *筒集合の測度は以下のような別表示をもつ．*

$$\begin{aligned}
\mu(0^{\Lambda_0} 1^{\Lambda_1}) &= \det(P_{\Lambda_0}(I_\Lambda - K_\Lambda) + P_{\Lambda_1} K_\Lambda) \\
&= \begin{cases} \det(J[\Lambda]_{\Lambda_1}) \det(I_\Lambda - K_\Lambda), & I_\Lambda - K_\Lambda \text{ が可逆のとき} \\ \det((J[\Lambda]^{-1})_{\Lambda_0}) \det K_\Lambda, & K_\Lambda \text{ が可逆のとき} \end{cases} \\
&= (-1)^{|\Lambda_0|} \det(K_\Lambda - P_{\Lambda_0}) \\
&= (-1)^{|\Lambda_1|} \det(I_\Lambda - K_\Lambda - P_{\Lambda_1}).
\end{aligned}$$

ただし，$J[\Lambda] = K_\Lambda (I_\Lambda - K_\Lambda)^{-1}$, $J[\Lambda]^{-1} = (I_\Lambda - K_\Lambda) K_\Lambda^{-1}$.

証明. $I_\Lambda - K_\Lambda$ は可逆であるとする．

$$\begin{aligned}
\det(P_{\Lambda_0}(I_\Lambda - K_\Lambda) + P_{\Lambda_1} K_\Lambda) &= \det(P_{\Lambda_0} + P_{\Lambda_1} J[\Lambda]) \det(I_\Lambda - K_\Lambda) \\
&= \det(P_{\Lambda_0} + P_{\Lambda_1} J[\Lambda] P_{\Lambda_1}] \det(I_\Lambda - K_\Lambda) \\
&= \det(J[\Lambda]_{\Lambda_1}) \det(I_\Lambda - K_\Lambda).
\end{aligned}$$

K_Λ が可逆の場合もまったく同様．また $(P_{\Lambda_1} - P_{\Lambda_0})^2 = I_\Lambda$ であることに注意して，

$$\begin{aligned}
\det(P_{\Lambda_0}(I_\Lambda - K_\Lambda) + P_{\Lambda_1} K_\Lambda) &= \det(P_{\Lambda_0} - P_{\Lambda_1})^2 (P_{\Lambda_0}(I_\Lambda - K_\Lambda) + P_{\Lambda_1} K_\Lambda) \\
&= \det(P_{\Lambda_1} - P_{\Lambda_0}) \det(-P_{\Lambda_0}(I_\Lambda - K_\Lambda) + P_{\Lambda_1} K_\Lambda) \\
&= (-1)^{|\Lambda_0|} \det(K_\Lambda - P_{\Lambda_0}).
\end{aligned}$$

□

例 2.7. (1) K は $\ell^2(R)$ 上の Hermite 作用素で，$O \le K \le I$ を満たすとする．このとき，補題 2.6 に注意すれば K は 仮定 2.1 を満たすことがわかる．

(2) $R=\mathbf{Z}^1$ とする．K は $\|K\|\le 1$ で，さらに totally positive であるとする．つまり，任意の $n\in\mathbf{N}$ と任意の $x_1<x_2<\cdots<x_n$ と $y_1<y_2<\cdots<y_n$ に対して

$$\det(K(x_i,y_j))_{i,j=1}^n \ge 0$$

とする．このとき K は 仮定 2.1 を満たす.
(3) (1) の特別な場合である．$R=\mathbf{Z}^d$ とする．$\widehat{k}:\mathbf{T}^d\to[0,1]$ に対して，

$$k(x)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^d\int_{\mathbf{T}^d}\widehat{k}(\theta)e^{ix\theta}d\theta,\quad x\in\mathbf{Z}^d$$

によって定義し，Toeplitz 作用素 $K:\ell^2(\mathbf{Z}^d)\to\ell^2(\mathbf{Z}^d)$ を

$$Kf(x)=\sum_{y\in\mathbf{Z}^d}k(x-y)f(y)$$

とすると仮定 2.1 の条件を満たすので，確率測度 $\mu_{\widehat{k}}$ が存在する．構成の仕方より $\mathbf{Z}^d$ の平行移動に関して不変な確率測度となる．特に $\widehat{k}\equiv\alpha$ $(0\le\alpha\le 1)$ とすると $K=\alpha I$ となり，対応する μ_K は $(\alpha,1-\alpha)$-Bernoulli 測度となる.

例 2.8. (cf.[24]) 連結有限グラフ $G=(V,E)$ が与えられときその部分グラフですべての点を含む木を全域木という．グラフ G が与えられたとき

$$M(x,e)=\begin{cases}1, & x=o(e),\\ -1, & x=t(e),\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

によって定まる $|V|\times|E|$-行列 M を接続行列という．行列 M の階数は $|V|-1$ に等しい．行列 M の 1 行から $|V|-1$ 行目までの行ベクトルで張られる線型空間 V は $\mathbf{R}^{|E|}\cong\ell^2(E)$ の部分空間をなす．$\ell^2(E)$ から V への直交射影に対する Fermion 測度はグラフ G の全域木上の一様分布とみなせる．ちなみに G の全域木の個数は行列 M の 1 行から $|V|-1$ 行目までをとりだして得られる $(|V|-1)\times|E|$-部分行列 N をもちいると $\det NN^*$ によって与えられる.

さて，ξ の Laplace 変換を計算しよう.

定理 2.9. K は 仮定 *2.1* を満たすとする.

$$\int_Q e^{-\langle\xi,f\rangle}\mu(d\xi)=\det(I-K(1-e^{-f(x)})),\tag{2.2}$$

ただし，$\operatorname{supp} f$ は有限集合で $\langle\xi,f\rangle=\sum_{x\in R}\xi(x)f(x)$ である．また $(1-e^{-f(x)})$ はかけ算作用素.

証明. $\operatorname{supp} f=\Lambda$ とする．注意 2.3 より

$$\begin{aligned}\int_Q e^{-\langle\xi,f\rangle}\mu(d\xi) &= \sum_{\Lambda_0\sqcup\Lambda_1=\Lambda} e^{-\sum_{x\in\Lambda_1}f(x)}\mu(0^{\Lambda_0}1^{\Lambda_1})\\ &= \sum_{\Lambda_0\sqcup\Lambda_1=\Lambda} e^{-\sum_{x\in\Lambda_1}f(x)}\det(P_{\Lambda_0}(I_\Lambda-K_\Lambda)+P_{\Lambda_1}K_\Lambda)\\ &= \sum_{\Lambda_0\sqcup\Lambda_1=\Lambda}\det(P_{\Lambda_0}(I_\Lambda-K_\Lambda)+P_{\Lambda_1}e^{-f}K_\Lambda)\\ &= \det(I_\Lambda-K_\Lambda+e^{-f}K_\Lambda).\end{aligned}$$

□

この Laplace 変換の式 (2.2) よりモーメントが求まる．例えば，

系 2.10. $\langle \xi, f\rangle$ の平均は

$$\int_Q \mu(d\xi)\langle \xi, f\rangle = \sum_{x\in R} K(x,x)f(x).$$

特に Λ にある 1 の個数の平均は $\mathrm{Tr}(K_\Lambda)=\sum_{x\in\Lambda}K(x,x)$ で与えられる．

証明. 式 (2.2) において f の代わりに tf として，$t=0$ で微分すればよい． $\square$

行列 K_Λ の階数は Λ 内の粒子の個数 (1 の個数) に対応し，行列 $I_\Lambda - K_\Lambda$ の階数は Λ 内の 0 の個数に対応している．

命題 2.11. *(1)* $\mathrm{rank}\, K_\Lambda = n$ とすると $\mu(\xi(\Lambda)\le n)=1$. また $\mathrm{rank}(I_\Lambda - K_\Lambda)\le m$ ならば $\mu(\xi(\Lambda)\ge N-m)=1$. ただし $\xi(\Lambda)=\langle \xi, 1_\Lambda\rangle$ で Λ 内の 1 の個数をあらわす.
(2) 特に K が $\mathrm{rank}\, K=n$ の射影であるときは，$\mu(\xi(R)=n)=1$ となる．

証明. $\mathrm{rank}\, K_\Lambda = n$ とする．$|\Lambda_1|\ge n+1$ のとき行列 $P_{\Lambda_0}(I_\Lambda - K_\Lambda)+P_{\Lambda_1}K_\Lambda$ の $|\Lambda_1|\times|\Lambda|$ 小行列 $P_{\Lambda_1}K_\Lambda$ の中にかならず一次従属なベクトルが存在する．よって行列式は 0 となり，$\mu(0^{\Lambda_0}1^{\Lambda_1})=0$ となる．つまり $\mu(\xi(\Lambda)\ge n+1)=0$ であるから主張を得る．後半もまったく同様. $\square$

上の命題は次の事実からも従う.

命題 2.12. 任意の $\Lambda\subset R(|\Lambda|=n)$ と $k\ge 0$ に対して，

$$\begin{aligned}\mu(\xi(\Lambda)=k) &= \det(I_\Lambda - K_\Lambda)\,\mathrm{Tr}(\wedge^k J[\Lambda]) \\ &= \sum_{J\subset\{1,2,\ldots,n\}}\prod_{j\in J}\lambda_j\prod_{j\in J^c}(1-\lambda_j)\end{aligned}$$

ここで $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ は K_Λ の固有値である．$I_\Lambda - K_\Lambda$ が可逆でないときは 2 行目の意味で理解する．特に

$$\mu(\xi(\Lambda)=0)=\det(I_\Lambda - K_\Lambda).$$

統計物理でよく知られているように Fermion は Pauli の排他律にしたがい，二つの粒子が同じ状態に入ることは禁じられる．このことから Fermion 測度はその条件付き確率がまた Fermion 測度となるという著しい性質をもつ.

定理 2.13. A は R の有限部分集合とする．$\mu(1^A)>0$ とする.

$$\mu^A(\cdot)=\mu(\cdot\mid 1^A)=\mu(\cdot\mid \xi\equiv 1\ on\ A)$$

は以下に定義する行列 K^A に対する *Fermion* 測度となる．$A=\{x_1,\ldots,x_n\}$ とすると

$$\begin{aligned}K^A(x,y) &= \left(\det(K(x_i,x_j))_{i,j=1}^n\right)^{-1} \\ &\quad\times\det\begin{pmatrix} K(x,y) & K(x,x_1) & \cdots & K(x,x_n) \\ K(x_1,y) & K(x_1,x_1) & \cdots & K(x_1,x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(x_n,y) & K(x_n,x_1) & \cdots & K(x_n,x_n)\end{pmatrix} \\ &= K(x,y)-\langle K(x,\cdot), K_A^{-1}K(\cdot,y)\rangle.\end{aligned}$$

ただし，$K(x,\cdot)=(K(x,x_i))_{i=1}^n$，$K(\cdot,y)=(K(x_i,y))_{i=1}^n$ である．

補題 2.14. $\{0,1\}^R$ 上の確率測度 μ に対して，ある行列 K が存在して任意の R の有限部分集合 $\Lambda \subset R$ に対して

$$\rho(\Lambda) := \mu(1^\Lambda) = \det(K(x,y))_{x,y\in\Lambda}$$

が成り立つとする．このとき，μ は行列 K に対する *Fermion* 測度となる．

証明．補題 2.2 の証明と同様に関係

$$\det\begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} A & b \\ -c & 1-d \end{pmatrix} = \det A$$

を繰り返せばすべての筒集合の確率が矛盾なく定義できる． □

定理 *2.13* の証明．$A = \{a\}$ の場合だけ示す．A と互いに素な Λ に対して，

$$\mu(1^{\Lambda\cup\{a\}}) = \det(K(x,y))_{x,y\in\Lambda\cup\{a\}}$$

である．このとき，$\mu(1^A) = K(a,a) > 0$ であることに注意して第 a 行に $K(x,a)/K(a,a)$ をかけて第 x 行から引くと，行列の (x,y) 成分は $K^a(x,y)$ となり，(x,a) 成分は (a,a) 成分以外すべて 0 になる．よって

$$\mu(1^{\Lambda\cup\{a\}}) = \det(K^a(x,y))_{x,y\in\Lambda}\cdot K(a,a) = \det(K^a(x,y))_{x,y\in\Lambda}\cdot\mu(1^{\{a\}})$$

であるから補題 2.14 を用いると結論を得る． □

2.3 Fermion 測度に関する相関不等式

以下では K は Hermite 作用素であることを仮定する．筒集合の測度に関して以下のような相関不等式が成り立つ．

命題 2.15. *(1)* A, B は互いに素な有限集合とすると

$$\mu(1^{A\cup B}) \le \mu(1^A)\cdot\mu(1^B).$$

もっと一般に A, B は任意の有限集合とすると

$$\mu(1^{A\cup B})\mu(1^{A\cap B}) \le \mu(1^A)\cdot\mu(1^B).$$

(2) 以下の不等式がなりたつ．

$$\mu(0^{\Lambda_0})\mu(1^{\Lambda_1}) \le \mu(0^{\Lambda_0}1^{\Lambda_1}) \le \{\mu(0^{\Lambda_0})\mu(1^{\Lambda_1})\}^{1/2}.$$

証明．命題の不等式の証明には以下のような行列式に関する不等式を用いればよい：行列 A, C は非負定値であるとすると

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} \le \det A \det C, \quad \det\begin{pmatrix} A & B \\ -B^* & C \end{pmatrix} \ge \det A \det C$$

が成り立つ． □

注意 *2.16.* K が Toeplitz 行列で定まるときはシフトのエントロピーが

$$\lim_{\Lambda\to R} -\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{\Lambda_0\sqcup\Lambda_1=\Lambda}\mu(0^{\Lambda_0}1^{\Lambda_1})\log\mu(0^{\Lambda_0}1^{\Lambda_1})$$

によって定義されるが，命題 2.15(2) の不等式から $K \neq O, I$ ならば正のエントロピーをもつことが示される [24, 25, 36].

ところで Q の元は R 上の $\{0,1\}$-値関数であったから自然な順序で Q は半順序集合になる．$A \in \mathcal{B}(Q)$ に対して，$\xi \in A$ かつ $\xi \le \eta$ ならば $\eta \in A$ となるとき，A は increasing であるという．また μ, ν は Q 上の確率測度とする．任意の increasing な A に対して，$\mu(A) \le \nu(A)$ となるとき，$\mu \le \nu$ とかく．

命題 2.17 ([38]). μ, ν は Q 上の確率測度とする．$\mu \le \nu$ であるための必要十分条件は，μ と ν の単調なカップリングが存在することである．ただし，カップリング P が単調であるとは $\mathrm{supp}\, P \subset \{(\xi,\eta) \in Q \times Q\,;\, \xi \le \eta\}$ となるときをいう．

さて例 2.7 の Toeplitz 行列の場合を考えよう．$\widehat{k} : \mathbf{T}^d \to [0,1]$ から定まる Fermion 測度を $\mu_{\widehat{k}}$ とかく．このとき以下のことが知られている [24].

命題 2.18. $0 \le \widehat{k}_1 \le \widehat{k}_2 \le 1$ ならば $\mu_{\widehat{k}_1} \le \mu_{\widehat{k}_2}$.

このことから $0 \le \widehat{k}_1 \le \widehat{k}_2 \le 1$ ならば $\mu_{\widehat{k}_1}$ と $\mu_{\widehat{k}_2}$ との単調なカップリングが存在する．例えば，$0 \le p \le 1$ とし $\widehat{k}_1 = p\widehat{k}_2$ とする．このとき以下のようにしてカップリングを構成できる．$\xi, \eta : \Omega \to Q$ を Q 上の分布がそれぞれ $(p, 1-p)$-ベルヌイと $\mu_{\widehat{k}}$ である確率変数とする．このとき，$\min(\xi,\eta) = \xi \cdot \eta$ (各点での min をとる) の分布は $\mu_{p\widehat{k}}$ に等しい．

問題 2.19. $0 \le \widehat{k}_1 \le \widehat{k}_2 \le 1$ のとき，一般に $\mu_{\widehat{k}_1}$ と $\mu_{\widehat{k}_2}$ との単調なカップリングを構成できるか？

3 Fermion 測度と Boson 測度とその一般化

3.1 一般の空間における Fermion 測度

R を可算基を持つ局所コンパクトハウスドルフ空間とし，その上の Radon 測度を $\lambda(dx)$ として，以下固定する．R 上の非負整数値 Radon 測度を R 上の局所有限な配置といい，その全体を $Q = Q(R)$ と表わす．Q には漠位相をいれ $\mathcal{B}(Q)$ は位相的 Borel 集合体とする．Q の要素 ξ は $\xi = \sum_i \delta_{x_i}$ の形に書けることに注意しておく.（多重点がある場合は違う点だとみなして，繰り返し和に加える.）μ を $(Q, \mathcal{B}(Q))$ 上の確率測度とするとき，$(Q, \mathcal{B}(Q), \mu)$ を点過程またはランダム場という

$\xi \in Q$ と台がコンパクトな連続関数 $f \in C_c(R)$ に対して，

$$\langle \xi, f \rangle = \int_R f(x)\xi(dx) = \sum_{x \in \xi} f(x)$$

とおく．また一般に $\xi \in Q$ と台がコンパクトな連続関数 $f_n \in C_c(R^n)$ に対して，

$$\langle \xi_n, f_n \rangle = \sum_{x_1, x_2, \dots x_n \in \xi: \text{互いに異なる}} f_n(x_1, \dots, x_n)$$

とおく．ξ_1 は ξ とみなす.

定義 3.1. 任意の $f_n \in C_c(R^n)$ に対して，

$$\int_Q \mu(d\xi) \langle \xi_n, f_n \rangle = \int_{R^n} \lambda_n(dx_1 \cdots dx_n) f_n(x_1, \dots, x_n)$$

を満たす R^n 上の測度 $\lambda_n(dx_1 \cdots dx_n)$ が存在すれば，これを ξ の n 次相関測度と呼ぶ．特に Λ_1 は平均測度ともいう．さらに，λ_n が $\lambda^{\otimes n}$ に関して絶対連続であるとき，

$$\rho_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{d\lambda_n}{d\lambda^{\otimes n}}(x_1, \dots, x_n)$$

を n 次相関関数と呼ぶ．シンボリックには

$$\lambda_n = \int_Q \mu(d\xi) \xi_n$$

である．ここで，定義した相関関数は (1.2) で定義したものと一致する．

点過程は Laplace 変換

$$L_\mu(f) = \int_Q \mu(d\xi)\exp(-\langle \xi, f\rangle) \quad f \in C_c^+(R)$$

によって一意に決定される．よく知られているように平均測度 ν のポアソン点過程 Π_ν の Laplace 変換は

$$\int_Q \Pi_\nu(d\xi)\exp(-\langle \xi, f\rangle) = \exp\left(-\int_R (1-e^{-f(x)})\nu(dx)\right) \tag{3.1}$$

さて定理 2.9 の Laplace 変換の形を考慮して以下のような結果を得る．

定理 3.2 ([34, 35, 37]). $L^2(R, d\lambda)$ 上の積分作用素 K は局所トレース族かつ自己共役で $O \le K \le I$ を満たすものとする[1]．このとき *Laplace* 変換が

$$\int_Q \mu_K(d\xi)\exp(-\langle \xi, f\rangle) = \mathrm{Det}(I - K_\varphi) \tag{3.2}$$

となる $Q = Q(R)$ 上の確率測度 μ_K が唯一存在する．ただし，$f \in C_c^+(R)$ はコンパクトな台をもつ任意の非負連続関数，$\varphi = 1 - \exp(-f)$, $K_\varphi = \sqrt{\varphi}K\sqrt{\varphi}$．また右辺は積分作用素 K_φ の *Fredholm* 行列式．さらに，n 次の相関関数は以下で与えられる．

$$\begin{aligned} \rho_n(x_1, \ldots, x_n) &= \det(K(x_i, x_j))_{i,j=1}^n \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma) K(x_1, x_{\sigma(1)}) \cdots K(x_n, x_{\sigma(n)}). \end{aligned}$$

注意 *3.3.* ここで得られた確率測度を [26, 27] に従って Fermion 点過程もしくは Fermion 測度と呼ぶ[2]．もちろん離散 Fermion 測度はこの定理の特別な場合である．

証明は以下のようにして Kolmogorov の拡張定理による (cf.[21])．まず有界集合 Λ 上の配置空間を $Q(\Lambda)$ とすると $Q(\Lambda)$ は $\cup_{n=0}^\infty \Lambda^n/\sim$ と同一視される．ここで $\sim$ は座標の置換に関する同値関係をあらわす．さて $\bigcup_{n=0}^\infty \Lambda^n$ 上の対称関数 $\sigma_{\Lambda,K}$ を

$$\begin{aligned} \sigma_{\Lambda,K}(x_1, \ldots, x_n) &= \mathrm{Det}(I - K_\Lambda)\det(J[\Lambda](x_i, x_j))_{i,j=1}^n \text{ on } \Lambda^n, \\ \sigma_{\Lambda,K}(\emptyset) &= \mathrm{Det}(I - K_\Lambda) \text{ on } \Lambda^0 = \{\emptyset\}, \end{aligned}$$

によって定義する．ただし，$J[\Lambda] = K_\Lambda(I - K_\Lambda)^{-1}$ とする．このとき，$Q(\Lambda)$ 上の確率測度 $\mu_{\Lambda,K}$ を

$$\begin{aligned} &\int_{Q(\Lambda)} \mu_{\Lambda,K}(d\xi)\exp(-\langle \xi, f\rangle) \\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\int_{\Lambda^n} \sigma_{\Lambda,K}(x_1, \ldots, x_n)\exp\left(-\sum_{k=1}^n f(x_k)\right)\lambda^{\otimes n}(dx_1 \cdots dx_n) \end{aligned}$$

とする．$J[\Lambda]$ が非負定値であることから $\sigma_{\Lambda,K} \ge 0$ は明らかである．このとき以下の補題が成り立つ．

補題 3.4. f が R 上のコンパクト台をもつ非負連続関数とする．$\mathrm{supp}\, f \subset \Lambda$ とすると

$$\int_{Q(\Lambda)} \mu_{\Lambda,K}(d\xi)\exp(-\langle \xi, f\rangle) = \mathrm{Det}(I - K_\varphi). \tag{3.3}$$

ただし，$\varphi = 1 - e^{-f}$.

[1] K が局所トレース族であるとは，任意のコンパクト集合 $\Lambda \subset R$ に対して，$K_\Lambda = 1_\Lambda K 1_\Lambda$ がトレース族作用素であることと定義する．

[2] Determinantal 測度と呼んでいる文献も多い．

証明．$\mathrm{supp}\, f \subset \Lambda$ とすると．

$$\begin{aligned}
\mathrm{Det}(I-K_\varphi) &= \mathrm{Det}(I-K_\Lambda)\,\mathrm{Det}(I+(J[\Lambda])_{e^{-f}}) \\
&= \mathrm{Det}(I-K_\Lambda) \\
&\quad \times \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\Lambda^n} \det \Big((J[\Lambda])_{e^{-f}}(x_i,x_j) \Big)_{i,j=1}^{n} \lambda^{\otimes n}(dx_1\cdots dx_n) \right\} \\
&= \mathrm{Det}(I-K_\Lambda) \\
&\quad \times \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\Lambda^n} \det(J[\Lambda](x_i,x_j))_{i,j=1}^{n} \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \right) \lambda^{\otimes n}(dx_1\cdots dx_n) \right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\Lambda^n} \sigma_{\Lambda,K}(x_1,\ldots,x_n) \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \right) \lambda^{\otimes n}(dx_1\cdots dx_n) \\
&= \int_{Q(\Lambda)} \mu_{\Lambda,K}(d\xi) \exp(-\langle \xi, f\rangle).
\end{aligned}$$

□

任意のコンパクト台をもつ非負連続関数 f に対して $\mathrm{supp}\, f \subset \Lambda \subset \Lambda'$ ならば，

$$\int_{Q(\Lambda')} \mu_{\Lambda',K}(d\xi) \exp(-\langle \xi, f\rangle) = \int_{Q(\Lambda)} \mu_{\Lambda,K}(d\xi) \exp(-\langle \xi, f\rangle) = \mathrm{Det}(I-K_\varphi)$$

となることより，確率測度の系 $\{\mu_{\Lambda,K}\}$ は無矛盾である．よって Kolmogorov の拡張定理により定理を得る (cf.[21])．以上の証明は K_Λ が固有値 1 をもたないことを仮定しているが，例えば sK_Λ を考えて $s \uparrow 1$ の極限を考えればよい．

例 3.5. 1 節であげた GUE と Laguarre ensemble の行列サイズ N が無限大で表われる 3 つの積分核はそれぞれ $\mathbf{R}$ 上の Fermion 点過程を定義し重要である．$K_{sine}(x,y)$ の場合は平行移動不変な点過程になる．さらに $K_{Airy}(x,y)$ の場合は確率 1 で最右端の粒子が存在し，GUE の最大固有値に対応するものである．さらに $K_{Bessel}(x,y)$ の場合は $(-\infty, 0)$ に粒子は存在しない．

例 3.6. $R = \sqcup_{i=1}^{N} E_i$ とする．簡単のために $E_i \cong E$ とする．K は $L^2(R) \cong \bigoplus_{i=1}^{N} L^2(E)$ 上の局所トレース族の積分作用素とする．積分核は行列形 $K(x,y) = (K_{rs}(x,y))_{1\le r,s\le N}, x, y \in E$ になり，相関関数は

$$\begin{aligned}
\rho_n(x_1^{(1)},\ldots,x_{k_1}^{(1)},\ldots,x_1^{(N)},\ldots,x_{k_N}^{(N)}) &= \rho_{k_1,\ldots,k_N}(x_1^{(1)},\ldots,x_{k_1}^{(1)},\ldots,x_1^{(N)},\ldots,x_{k_N}^{(N)}) \\
&= \det(K_{rs}(x_{i_r}^{(r)}, x_{j_s}^{(s)})_{1\le r,s\le N, 1\le i_r\le k_r, 1\le j_s\le k_s}
\end{aligned}$$

によって与えられる．ただし，$k_1 + k_2 + \cdots + k_N = n$.

問題 3.7. 微小な独立確率変数の和が Poisson 分布に収束するという Poisson の少数法則と同様の定理を相関のある場合に K_{sine} に対応する Fermion 測度への極限定理として定式化できるか？

3.2 Boson 測度と α-Boson 測度

Laplace 変換の形に注目して Fermion 測度は以下のような形で Boson 測度に拡張される．

定理 3.8 ([35]). $L^2(R, d\lambda)$ 上の積分作用素 K は局所トレース族かつ自己共役で $K \ge O$ を満たすものとする．コンパクトな台をもつ任意の非負連続関数 $f \in C_c^+(R)$ に対して *Laplace* 変換が

$$\int_Q \mu(d\xi) \exp(-\langle \xi, f\rangle) = \mathrm{Det}(I+K_\varphi)^{-1} \tag{3.4}$$

となる $Q=Q(R)$ 上の確率測度が唯一存在する．さらに，n 次の相関関数は以下で与えられる．

$$\begin{aligned}\rho_n(x_1,\dots,x_n) &= \operatorname{per}(K(x_i,x_j))_{i,j=1}^n \\ &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} K(x_1,x_{\sigma(1)})\cdots K(x_n,x_{\sigma(n)}).\end{aligned}$$

Laplace 変換の形から自然に次のように問題を一般化することが考えられる [35].

問題 3.9. $L^2(R,d\lambda)$ 上の積分作用素 K は局所トレース族かつ自己共役で $K\geq O$ を満たすものとする．このとき次の形の Laplace 変換

$$\int_Q \mu_{\alpha,K}(d\xi)\exp(-\langle\xi,f\rangle)=\det(I+\alpha K_\varphi)^{-1/\alpha}. \tag{3.5}$$

を持つ $Q=Q(R)$ 上の確率測度は存在するか？もし存在すれば n 次の相関関数は以下で与えられる．

$$\begin{aligned}\rho_n(x_1,\dots,x_n) &= \det{}_\alpha(K(x_i,x_j))_{i,j=1}^n \\ &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \alpha^{d(\sigma)}K(x_1,x_{\sigma(1)})\cdots K(x_n,x_{\sigma(n)}).\end{aligned}$$

ただし，$d(\sigma)$ は置換 σ を互換の積としてあらわすのに必要な互換の最小の個数[3]．特に

$$\det{}_{-1}A=\det A,\quad \det{}_0 A=\prod_{i=1}^n a_{ii},\quad \det{}_1 A=\operatorname{per}A.$$

もし $\mu_{\alpha,K}$ が存在するときには α-Boson 測度とよぶことにする．もちろん，$\alpha=\pm1$ のときは Fermion 測度と Boson 測度に対応して，$\alpha=0$ のときは極限をとったものとみなせば Poisson 測度に対応する．

R が一点からなる場合は (3.5) の右辺は一般化された二項分布の Laplace 変換を与える．よって，(3.5) の右辺が確率分布の Laplace 変換になるための必要十分条件は，$\alpha\in\{-1/m\,;\,m\in\mathbf{N}\}\cup[0,\infty)$ である．以降はおもに $\alpha>0$ について考えることにする．

さて $J_\alpha[\Lambda]=K_\Lambda(I+\alpha K_\Lambda)^{-1/\alpha}$ とし，

$$\begin{aligned}\sigma_{\Lambda,\alpha,K}(x_1,\dots,x_n) &= \operatorname{Det}(I+\alpha K_\Lambda)^{-1/\alpha}\det{}_\alpha(J_\alpha[\Lambda](x_i,x_j))_{i,j=1}^n \text{ on } \Lambda^n, \\ \sigma_{\Lambda,\alpha,K}(\emptyset) &= \operatorname{Det}(I+\alpha K_\Lambda)^{-1/\alpha} \text{ on } \Lambda^0=\{\emptyset\}.\end{aligned}$$

によって定義する．$Q(\Lambda)$ 上の測度 $\mu_{\Lambda,\alpha,K}$ を

$$\begin{aligned}&\int_{Q(\Lambda)}\mu_{\Lambda,\alpha,K}(d\xi)\exp(-\langle\xi,f\rangle) \\ &= \sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n!}\int_{\Lambda^n}\sigma_{\Lambda,\alpha,K}(x_1,\dots,x_n)\exp\left(-\sum_{k=1}^n f(x_k)\right)\lambda^{\otimes n}(dx_1\cdots dx_n).\end{aligned}$$

とする．

Fredholm 行列式について以下の展開公式がなりたつ．これは $(1-x)^{-\alpha}$ の展開公式の無限次元への一般化である．

定理 3.10. J は $L^2(R,\lambda)$ 上のトレース族の積分作用素とする．$\|\alpha J\|<1$ ならば

$$\operatorname{Det}(I-\alpha J)^{-1/\alpha}=\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n!}\int_{R^n}\det{}_\alpha\left(J(x_i,x_j)\right)_{i,j=1}^n\lambda^{\otimes n}(dx_1\cdots dx_n), \tag{3.6}$$

$\alpha\in\{-1/m\,;\,m\in\mathbf{N}\}$ のときは $\|\alpha J\|<1$ の条件なしで *(3.6)* は成り立つ．

[3] $d(\sigma,\eta)=d(\sigma^{-1}\eta)$ とおくと $\mathcal{S}_n$ 上の距離となる．

このことに注意すると，

$$\int_{Q(\Lambda)} \mu_{\Lambda,\alpha,K}(d\xi)\exp(-\langle \xi, f\rangle) = \mathrm{Det}(I+\alpha K_\varphi)^{-1/\alpha}$$

となる．つまり，Fermion 測度の場合と同様にして $\sigma_{\Lambda,\alpha,K}(x_1,\ldots,x_n)$ の非負性が保証されれば Q 上の確率測度 $\mu_{\alpha,K}$ が存在することがわかる．例えば $\det_\alpha$ の定義より $J_\alpha[\Lambda]$ が非負行列であれば上の非負性はあきらかである．

上の関係を考慮すると以下のような問題が考えられる．

問題 3.11. $\alpha > 0$ とする．以下の同値な 2 条件が成立するような α の範囲は？

$\mu_{\alpha,K}$ が任意の $K \geq O$ に対して存在する $\Longleftrightarrow \det_\alpha A \geq 0$ が任意の $A \geq O$ に対して成り立つ

$\alpha = \pm 1$ のときは線型代数的な性質 ($\mathrm{per}\, A \geq \det A \geq 0,\ \forall A \geq O$) から確率測度 $\mu_{\pm 1,K}$ の存在がわかり，Laplace 変換の形とその性質から $\alpha \in \{\pm 1/m, ; m \in \mathbf{N}\}$ のときは $\mu_{\pm 1,K}$ の畳み込みとして確率測度 $\mu_{\pm 1/m,K}$ が構成されて線型代数の問題が肯定的に解ける．

注意 *3.12.* 上の考察と次節の結果をあわせると現在のところ $\alpha \in \{-1/m\,; m \in \mathbf{N}\} \cup \{0\} \cup \{2/m\,; m \in \mathbf{N}\}$ の場合について問題 3.11 が肯定的に解決されている．負の場合については $\alpha \in \{-1/m\,; m \in \mathbf{N}\}$ 以外は否定的に結論される．

3.3 Gauss 場と Boson 測度

さて $\alpha = 2$ の場合を考えよう．この場合は Gauss 場と密接な関係がある [9, 35].

定理 3.13. $\{X(x)\}_{x \in R}$ は平均 0, 共分散 K の *Gauss* 場とすると

$$E[\Pi_{X^2}(d\xi)] = \mu_{2,K}(d\xi) \tag{3.7}$$

となる．ただし，Π_{X^2} は *intensity* $X(x)^2 \cdot \lambda(dx)$ の Q 上の *Poisson* 測度であり，E は *Gauss* 場 $X(x)$ による平均をあらわす．

証明. (3.1) に注意して Laplace 変換を計算すると以下のようになることから定理は示される．

$$\begin{aligned} E\left[\int_Q \Pi_{X^2}(d\xi)\exp\left(-\langle \xi, f\rangle\right)\right] &= E\left[\exp - \int_R (1-e^{-f(x)})X(x)^2\lambda(dx)\right] \\ &= \mathrm{Det}(I + 2(1-e^{-f})K)^{-1/2}. \end{aligned}$$

□

系 3.14. n 次非負定値行列 A に対して平均 0 で共分散行列が A である *Gauss* 確率変数を $(Z_1,\ldots,Z_n)$ とすると

$$\det{}_2 A = E[Z_1^2 \cdots Z_n^2] \geq 0$$

である[4].

[4]記号がよくないがここでの $\det_2$ は regularized determinant ではなく，$\det_\alpha$ の $\alpha = 2$ の場合である．

参考文献

[1] R. J. Adler, *An Introduction to Continuity, Extrema, and Related Topics for General Gaussian Processes*, Lecture Notes-Monograph Series Vol. 12, Institute of Mathematical Statistics, 1990.

[2] R. Bhatia, *Matrix Analysis*, Graduate Texts in Mathematics **169**, Springer Verlag, 1997.

[3] A. Borodin, A. Okounkov and G. Olshanski, *Asymptotics of Plancherel measures for symmetric groups*, *J. Amer. Math. Soc.* **13** (2000), 481–515.

[4] A. Borodin and G. Olshanski, *Point processes and the infinite symmetric group part III: fermion point processes*, available via http://xxx.lanl.gov/abs/math.RT/9804088.

[5] A. Borodin and G. Olshanski, *Harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group and determinantal point processes*, available via http://xxx.lanl.gov/abs/math.RT/0109194.

[6] M. -F. Bru, Diffusions of perturbed principal component analysis, J. Multivariate Anal. **29** (1989), 127–136.

[7] M. -F. Bru, Wishart processes, J. Theo. Probab. **4** (1991), 725–751.

[8] P. Diaconis and S. N. Evans, *Immanants and finite point processes*, In memory of Gian-Carlo Rota. J. Combin. Theory Ser. A **91** (2000), 305–321.

[9] D. J. Daley and D. Veres-Jones, *An Introduction to the Theory of Point Processes*, Springer Verlag, 1988.

[10] E. B. Dynkin, *Gaussian and Non-Gaussian random fields associated with Markov processes*, J. Funct. Anal. **55** (1984), 344–376.

[11] P. J. Forrester, The spectrum edge of random matrix ensemble, Nucl. Phys. **B402** (1993), 709–728.

[12] R. C. Griffiths and R. K. Milne, *A class of infinitely divisible multivariate negative binomial distributions*, J. Multivariate Anal. **22** (1987), 13–23.

[13] G. James, *Permanents, immanants, and determinants*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. **47** (1987), 431–436.

[14] S.P.Hastings and J.B.McLeod, *A boundary value problem associated with the second Painlevé transcendenta and the Korteweg-de Vries equation*, Arch. Rat. Mech. Anal. **73** (1980) 31–51.

[15] K. Johansson, *Discrete polynuclear growth and determinantal processes*, available via http://xxx.lanl.gov/abs/math.PR/0206208.

[16] M. Kac, *Toeplitz matrices, translation kernel and a related problem in probability theory*, Duke Math. J. **21** (1954), 501–509.

[17] S. Karlin and J. McGregor, *Coincidence properties of birth and death processes*, Pacific J. Math. **9** (1959), 1109–1140

[18] S. Karlin and J. McGregor, *Coincidence probabilities*, Pacific J. Math. **9** (1959), 1141–1164

[19] M. Katori and H. Tanemura, *Functional central limit theorems for vicious walkers*, available via http://xxx.lanl.gov/abs/math.PR/0203286.

[20] N. N. Lebedev, Special Functions & Their Applications, Dover Publications, Inc., New York, 1972.

[21] A. Lenard, *States of Classical Statistical Mechanical Systems of infinitely many particles. I*, Arch. Ratina. Mech. Anal. **59** (1975), 219–239.

[22] E. H. Lieb, *Proofs of some conjectures on permanents*, J. Math. and Mech. **16** (1966), 127–134.

[23] D. E. Littlewood, The Theory of Group Characters and Matrix Representations of Groups, 2nd edition, Oxford University Press, London, 1958.

[24] R. Lyons, *Determinantal probability measures*, preprint.

[25] R. Lyons and J. E. Steif, *Stationary Determinantal processes: phase multiplicity, Bernoullicity, entropy, and domination*, preprint.

[26] O. Macchi. *The coincidence approach to stochastic point processes*, Adv. Appl. Prob. **7** (1975), 83–122

[27] O. Macchi, *The fermion process – a model of stochastic point process with repulsive points*, Transactions of the Seventh Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes and of the Eighth European Meeting of Statisticians (Tech. Univ. Prague, Prague, 1974), Vol. A, pp. 391–398.

[28] I. G. McDonald, Symmetric functions and Hall polynomials. 2nd ed., Clarendon Press, 1995

[29] M. L. Mehta: Random matrices, Second Edition, Academic Press, 1991.

[30] R. J. Muirhead, Aspects of Multivariate statistical Theory, John Wiley, 1982

[31] H. Osada, *Dirichlet form approach to infinite-dimensional Wiener processes with singular interactions*, Comm. Math. Phys. **176** (1996), 117–131.

[32] M. Prähofer and H. Spohn, *Scale invariance of the PNG droplet and the Airy kernel*, J. of Stat. Phys. **108** (2002), 1071–1106.

[33] I. Schur, *Über endiche Gruppen und Hermitische Formen*, Math. Z. **1** (1918), 184-207.

[34] T. Shirai and Y. Takahashi, *Fermion process and Fredholm determinant*, Proceedings of the Second ISAAC Congress 1999 Vol.1, (Eds.) H.G.W. Begehr, R.P. Gilbert and J. Kajiwara, 15–23, (2000), Kluwer Academic Publ.

[35] T. Shirai and Y. Takahashi, *Random point fields associated with certain Fredholm determinant I: Fermion, Poisson and Boson processes*, to appear in J. of Funct. Anal.

[36] T. Shirai and Y. Takahashi, *Random point fields associated with certain Fredholm determinant II : fermion shifts and their ergodic and Gibbs properties*, Annals of Prob. **31** (2003), 1533–1564.

[37] A. Soshnikov, *Determinantal random point fields*, Russian Math. Surveys **55** (2000), 923–975.

[38] V. Strassen, *The existence of probability measures with given marginals*, Ann. Math. Statist., **36**, 423–439.

[39] G. Szegö, Orthogonal Polynomials, American Mathematical Society, 1959, New York.

[40] A. Takemura, Zonal polynomials, IMS Lec. Notes vol.4, ed. S.S.Gupta, 1984.

[41] C. A. Tracy and H. Widom, *Level-Spacing Distributions and the Airy Kernel*, Commun.Math.Phys. **159** (1994) 151–174.

[42] C. A. Tracy and H. Widom, *Level-Spacing Distributions and the Bessel Kernel*, Commun.Math.Phys. **161** (1994) 289–310.

[43] D. Vere-Jones, *A generalization of permanents and determinants*, Linear Algebra Appl. **111** (1988), 119–124.

[44] A. M. Vershik and S. V. Kerov: Asymptotics of the Plancherel measure of the symmetric group and the limiting form of Young tables, Soviet Math. Dokl., **18** (1977), 527–531.

[45] E. P. Wigner: On the distribution of the roots of certain symmetric matrices, Annals of Math., **67** (1958), 325–327.