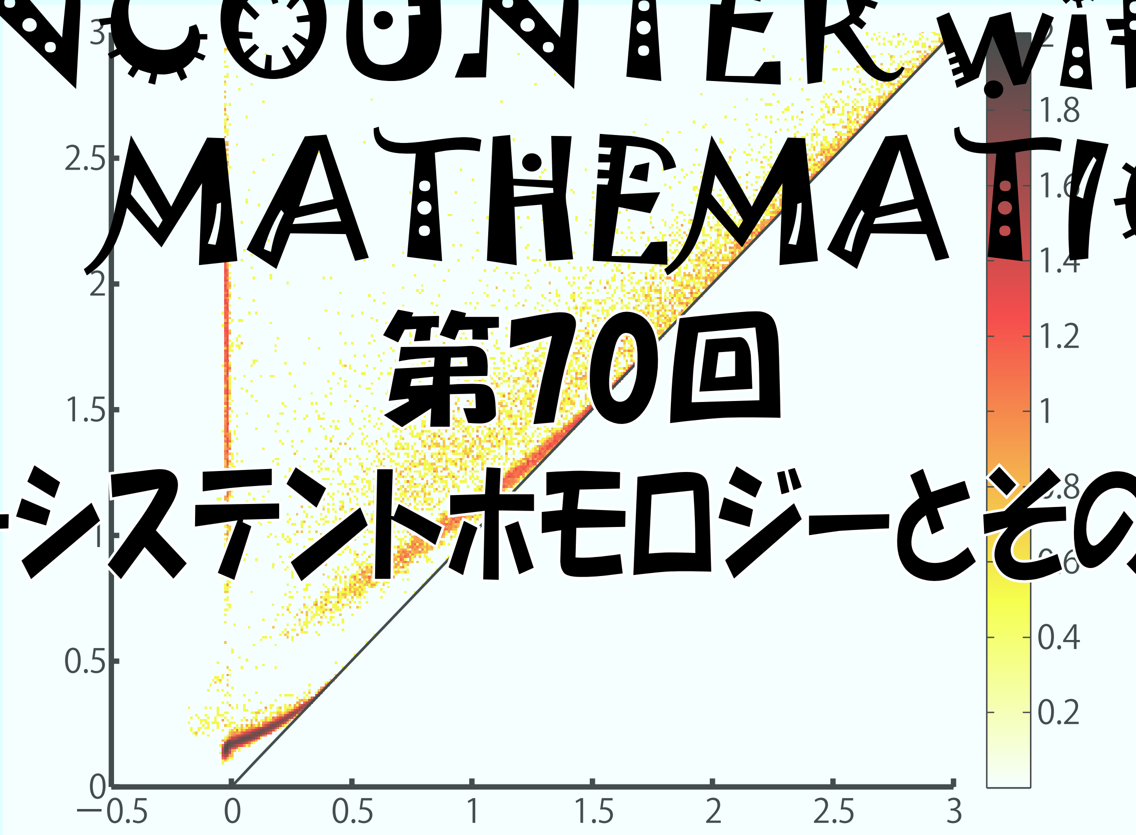
ENCOUNTER with MATHEMATICS



第70回
パーシステントホモロジーとその周辺

2017年12月22日(金) 14:40 〜 12月23日(土)

於：東京都 文京区 春日 1-13-27　中央大学理工学部5号館

12月22日(金)

14:40〜16:10	**パーシステントホモロジーとその応用**	**：平岡 裕章氏 (東北大・AIMR)**
16:30〜18:00	**クイバーの表現論とパーシステントホモロジー**	**：浅芝 秀人氏 (静岡大・理)**

12月23日(土)

10:30〜12:00	**確率論とパーシステントホモロジー**	**：白井 朋之氏 (九州大・IMI)**
13:40〜15:10	**パーシステント図に対する統計的機械学習**	**：福水 健次氏 (統数研)**
15:30〜17:00	**位相的データ解析ソフトウェアHomCloudの紹介 およびパーシステント図の逆問題について**	**：大林 一平氏 (東北大・AIMR)**
17:30〜	**ワインパーティー（懇親会）**	

別紙の趣旨に沿った集会の第70回を以上のような予定で開催いたします．非専門家向けに入門的な講演をお願い致しました．多くの方々のご参加をお待ちしております．講演者による講演内容へのご案内を添付いたしますので御覧下さい．

尚、この集会は、科学研究費補助金 基盤研究(B)「結び目理論とその諸科学への応用の研究」課題番号：16H03928 代表：下川 航也(埼玉大・理工)、科学研究費補助金 基盤研究(B)「3・4・5次元上の葉層・接触・シンプレクティック構造の研究」課題番号：17H02845 代表：三松 佳彦(中央大・理工)、JST CREST 課題「ソフトマター記述言語の創造に向けた位相的データ解析理論の構築」代表者：平岡 裕章(東北大・AIMR)からの支援を受けています．

連絡先：112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 中央大学理工学部数学教室: 03-3817-1745
ENCOUNTER with MATHEMATICS: homepage：http://www.math.chuo-u.ac.jp/ENCwMATH
三松 佳彦：yoshi@math.chuo-u.ac.jp　/　高倉 樹：takakura@math.chuo-u.ac.jp

画像提供：平岡 裕章氏 (東北大・AIMR)

パーシステントホモロジーとその応用

平岡裕章（東北大 AIMR）

この講演ではパーシステントホモロジーに関わる数学および応用事例について解説する．ここでパーシステントホモロジーとは，理論および応用の両側面で現在活発に研究が進められている数学概念であり，位相的データ解析（Topological Data Analysis, TDA）と呼ばれる分野の代表的な手法として知られている．パーシステントホモロジーは，数学的には位相空間のフィルトレーションに対する次数付き加群としてのホモロジーで定式化されるが，クイバー（Quiver）の表現論を用いた一般化をはじめ，確率論，統計・機械学習，逆問題，最適輸送などへ急速に展開している．またパーシステントホモロジーは諸科学の問題へも実際に応用されており，その適用範囲は材料科学，生命科学，脳科学，ソーシャルネットワーク，医療，金融など多岐にわたる．たとえばパーシステントホモロジーの代数的定式化で重要な貢献をしている Gunnar Carlsson（Stanford 大，AYASDI）は「Data has Shape, Shape has Meaning, Meaning drives Value」というスローガンのもと，ベンチャー企業 AYASDI を立ちあげ成功をおさめている．

ここではパーシステントホモロジーの歴史的経緯や上に挙げた様々な数学的な広がりを解説することで，多くの方にその面白さが伝われば幸いである．また，材料科学を中心に，実際にパーシステントホモロジーが現場で使われている例も紹介し，トポロジーに基礎をおく新たな応用数学手法としての魅力も伝えたい．

参考文献

[1] 平岡裕章．位相的データ解析とパーシステントホモロジー．日本数学会『数学』68, 361–380 (2016).

クイバーの表現とパーシステントホモロジー

浅芝 秀人
(静岡大学・理学部)

平岡による，Auslander-Reiten 理論の簡単な導入と有限型 commutative ladder についての解説に続いて，この講演では，commutative ladder の行列問題，加群の分解理論 ([1]), bocs を使った今後の展開などについて解説する。

これまでの persistent homology を用いた手法は，point cloud の情報を A_n 型クイバーの表現に翻訳し，その同型のもとでの完全不変量である直既約分解 (= persistence diagram) を用いて point cloud を研究するものであった。これは静止した状況の分析に主に使われていたが，タンパク質のフォールディングの研究のように，応用上，動きのある point cloud も考える必要がある。Point cloud に動きが加わると，可換関係を入れた $A_n \times A_m$ 型のクイバーの表現の問題となる。最初のステップとして，$m = 2$ の場合を考える。このときこの関係付きクイバーを commutative ladder (可換梯子) CL_n とよぶ。Point cloud の persistent homology による分析問題は，代数的には，commutative ladder の表現を直既約分解する問題となる。

昨年，一般の関係付きクイバー A の表現について，A の AR-クイバーの情報を用いて，直既約分解に現れる直既約因子の個数を，行列の階数によって与える公式を [1] で与えた。$n \leq 4$ の場合，CL_n は有限表現型であるため，この公式を用いてこの問題を解くことができる。$n \geq 5$ の場合，無限表現型となり，その場合は，テストすべき直既約加群が無限個あるため，このままでは有限回の操作で分解を求めることはできない。各表現について，その直既約因子の属する有限個のリストを求めなければならない。

一般の場合，これを CL_n の表現の標準形を求める問題（行列問題）と見なす。行列問題は，bocs の表現として定式化され [3]，bocs の reductions [2] を用いて，原理的には解くことができる。

References

[1] Asashiba, H.; Nakashima, K.; Yoshiwaki, M.: *Decomposition theory of modules: the case of Kronecker algebra*, Japan J. Indust. Appl. Math. **34** (2), 489-507, (2017).

[2] Crawley-Boevey, W.: *On tame algebras and bocses*, Proc. London Math. Soc. (3) 56, no. 3, 451–483, (1988).

[3] Rojter, A. V.: *Matrix problems and representations of BOCSs*, Representation theory, I (Proc. Workshop, Carleton Univ., Ottawa, Ont., 1979), 288–324, Lecture Notes in Math., 831, Springer, Berlin-New York, (1980).

確率論とパーシステントホモロジー

白井朋之 (九大 IMI)

Atiyah-Singer は 2004 年のアーベル賞受賞後のインタビューの中で,「今後数学のどの分野で最も重要な進展があると思いますか」という質問を受けているが，以下はこの質問に対する Singer の答えの一部である[1].

> I predict a new subject of statistical topology. Rather than count the number of holes, Betti numbers, etc., one will be more interested in the distribution of such objects on noncompact manifolds as one goes out to infinity. — I. Singer

これは色々な意味で解釈できると思うが，何かしらのランダムネスのもと Betti 数やホモロジー群を確率変数とみなすというのも一つの解釈としてあるだろう．確率論では古くからパーコレーションの問題としてランダムグラフやランダム幾何的グラフの連結性 (0 次ホモロジー) が研究されているが，高次のホモロジーについてはあまり研究はなされていなかった．2006 年の論文で Linial-Meshulam は Erdős-Rényi グラフで知られていた連結性の相転移の問題をランダム複体について論じた．これ以降最近にいたるまで徐々にそのような研究は増えつつある．本講演では，パーシステントホモロジーの視点がこれらの問題にどのように関わるかを述べつつ，最近得られた結果を紹介する予定である．

[1] `http://www.ams.org/notices/200502/comm-interview.pdf`

パーシステント図に対する統計的機械学習

福水健次（統計数理研究所）

パーシステントホモロジーを使った位相的データ解析の方法論では，データの位相的・幾何的情報をパーシステント図などの視覚的手段を使って表現してデータ解析に用います．しかしながら，パーシステント図を如何にデータ解析に用いるかについては，必ずしも定まった方法が確立しているわけではありません．本講演では，統計科学あるいは機械学習的な方法を用いてパーシステント図をデータ解析する研究に関してお話しします．

ここで，データとは，ある集合上の有限点集合のことと仮定し，そのような点集合が多数与えられる状況を考えます．それぞれの点集合（データ）に対してパーシステント図を計算すると多数のパーシステント図が得られます．統計的な枠組みでは，多数のデータセットが，ある機構に従って統計的に（すなわち，ある確率分布のサンプルとして）与えられると仮定して，得られた多数のパーシステント図から，データを生成した機構に関して推論を行うという問題を考えます．

本講演では，統計的方法の一般的な考え方に関する説明にも時間を割き，そのような考え方に基づいて，計算されたパーシステント図の統計的な揺らぎを推定する方法（[1]）や，パーシステント図を関数空間のベクトルに写像することによって，ベクトルデータに対して適用可能な標準的な統計的データ解析手法を適用する最近の研究（[2]）に関して紹介します．

参考文献

[1] B.T. Fasy, F. Lecci, A. Rinaldo, L. Wasserman, S. Balakrishnan, and A. Singh. Confidence sets for persistence diagrams. Annals of Statistics, 42(6):2301-2339, 2014.

[2] Genki Kusano, Kenji Fukumizu, Yasuaki Hiraoka. (2017) Kernel method for persistence diagrams via kernel embedding and weight factor. arXiv:1706.03472 [stat.ML]

位相的データ解析ソフトウェア HomCloud の紹介およびパーシステント図の逆問題について

大林一平（東北大 AIMR）

本講演ではパーシステントホモロジーを用いたデータ解析ソフトウェア Homcloud を紹介し、またこのソフトウェアの特徴的機能の 1 つであるパーシステント図の逆問題 (逆解析) の理論について紹介する。

Homcloud は講演者が中心となって開発している位相的データ解析のためのソフトウェアで、主に材料科学への応用を主眼としている。パーシステントホモロジーによるデータ解析ソフトウェアは、最近様々な研究グループで開発が進められているが、どちらかと言うとアルゴリズムや理論に関する部分が先行している。Homcloud はデータからパーシステント図 (パーシステントホモロジーの情報を可視化したもの) を計算するアルゴリズムなどはこのような既存のソフトウェアを活用し、可視化のような応用的な方面を重点的に開発している。本講演では Homcloud の概要や開発の方向性について解説し、ソフトウェアのデモを行う。

また、「パーシステント図の逆問題」と呼ばれる問題について解説を行い、最新の研究について紹介する。パーシステントホモロジーを用いたデータ解析ではデータからパーシステント図を計算し、データの構造について解析を行う。そのときにパーシステント図が持つ情報が入力データのどのような形状を表しているのかを知ることは実用上非常に重要である。この問題をここでは「パーシステント図の逆問題」と呼ぶことにする。この逆問題関連の機能は Homcloud の重要な特徴である。このようなパーシステント図の逆問題をどのように定式化しそれを計算機上でどのように解くのか、といった問題について解説する。