ガウス型べき級数の実零点過程の相関関数とパフィアン

松本 詔 (名古屋大・多元数理),　白井朋之（九州大 IMI）

Kac [2] は実確率変数を係数にもつランダム多項式 $f_n(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ ($\{a_k\}_{k=0}^n$ は i.i.d. な実標準正規分布をもつ確率変数列) の実零点の個数の期待値について，その積分表示を与えることにより Littlewood-Offord らの得た結果を精密化した．さらに，Shepp-Vanderbei [4] は $f_n(t)$ の複素零点の分布を調べている．本講演では，Kac の多項式 f_n において $n = \infty$ としたべき級数

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad (|z| < 1)$$

の零点過程についての結果を述べる．関連する研究として, Peres-Virág [3] は $f_{\mathbb{C}}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_k z^k$ ($\{\zeta_k\}_{k=0}^{\infty}$ は i.i.d. な複素標準正規分布をもつ確率変数列) の零点が，Bergman 核に付随する複素単位円板上の行列式点過程を定めることを示している．

まず，$f(z)$ の実零点について述べる．以下，$I = (-1, 1)$ とする．$\{f(t)\}_{t \in I}$ は実ガウス過程でその共分散核は $\sigma(s,t) := \mathbb{E}[f(s)f(t)] = \frac{1}{1-st}$ となる．結果を述べるためにパフィアンの定義を思い出しておこう．$2n \times 2n$ 交代行列 $B = (b_{ij})_{1 \le i,j \le 2n}$ のパフィアン $\mathrm{Pf}\, B$ は

$$\mathrm{Pf}\, B = \sum_{\eta \in \mathcal{F}_n} \epsilon(\eta) b_{\eta(1)\eta(2)} b_{\eta(3)\eta(4)} \cdots b_{\eta(2n-1)\eta(2n)}$$

と定義される．ただし，$\epsilon(\eta)$ は置換 η の符号，また

$$\mathcal{F}_n := \{\eta \in \mathcal{S}_{2n} \mid \eta(2i-1) < \eta(2i)(i = 1, 2, \ldots, n),\ \eta(1) < \eta(3) < \cdots < \eta(2n-1)\}.$$

次の定理 1 は，f の実零点過程がパフィアン点過程となることを述べている．

定理 1. f の実零点過程のルベーグ測度に関する n 点相関関数 $\rho_n(t_1, \ldots, t_n)$ は，次のようにパフィアンで与えられる．$t_1, t_2, \ldots, t_n \in I$ に対し,

$$\rho_n(t_1, \ldots, t_n) = \pi^{-n}\, \mathrm{Pf}(\mathbb{K}(t_i, t_j))_{1 \le i,j \le n}.$$

各 $\mathbb{K}(s,t)$ は 2×2 行列で以下で与えられ，$(\mathbb{K}(t_i, t_j))_{1 \le i,j \le n}$ は $2n \times 2n$ 交代行列となる．

$$\mathbb{K}(s,t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\mathbb{K}_{22}(s,t) & \frac{\partial}{\partial s}\mathbb{K}_{22}(s,t) \\ \frac{\partial}{\partial t}\mathbb{K}_{22}(s,t) & \mathbb{K}_{22}(s,t) \end{pmatrix}, \quad \mathbb{K}_{22}(s,t) = \mathrm{sgn}(t-s) \arcsin \frac{\sigma(s,t)}{\sqrt{\sigma(s,s)\sigma(t,t)}}$$

ただし，$\mathrm{sgn}\, t$ は $t > 0$ で $\mathrm{sgn}\, t = +1$，$t < 0$ で $\mathrm{sgn}\, t = -1$，$t = 0$ のときは $\mathrm{sgn}\, 0 = 0$ と定める．$\mathbb{K}(s,t)$ の成分を具体的に書き下すと,

$$\mathbb{K}_{11}(s,t) = \frac{s-t}{\sqrt{(1-s^2)(1-t^2)(1-st)^2}}, \qquad \mathbb{K}_{12}(s,t) = \sqrt{\frac{1-t^2}{1-s^2}} \frac{1}{1-st},$$

$$\mathbb{K}_{21}(s,t) = -\sqrt{\frac{1-s^2}{1-t^2}} \frac{1}{1-st}, \qquad \mathbb{K}_{22}(s,t) = \mathrm{sgn}(t-s) \arcsin \frac{\sqrt{(1-s^2)(1-t^2)}}{1-st}.$$

RIMS 研究集会「確率論シンポジウム」, Dec. 18-21, 2012.

定理 1 の証明は，次の絶対値のモーメント $E[|f(t_1)f(t_2)\cdots f(t_n)|]$ を求める問題に帰着される．

定理 2. $t_1, t_2, \ldots, t_n \in I$ が互いに異なるとき，

$$E[|f(t_1)f(t_2)\cdots f(t_n)|] = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} (\det \Sigma)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{Pf}(\mathbb{K}(t_i, t_j))_{1\le i,j\le n}$$

が成り立つ．ここで，$\Sigma = (\sigma(t_i, t_j))_{1\le i,j\le n}$ とした．

また，次のように $f(t)$ の符号の偶数次モーメント $E[\operatorname{sgn} f(t_1)\cdots \operatorname{sgn} f(t_{2n})]$ もパフィアンで書ける．なお，n が奇数の場合，$E[\operatorname{sgn} f(t_1)\cdots \operatorname{sgn} f(t_n)]$ は恒等的に零である．

定理 3. $t_1, t_2, \ldots, t_{2n} \in I$ が互いに異なるとき，

$$E[\operatorname{sgn} f(t_1) \operatorname{sgn} f(t_2)\cdots \operatorname{sgn} f(t_{2n})] = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n} \prod_{1\le i<j\le 2n} \operatorname{sgn}(t_j - t_i) \cdot \operatorname{Pf}(\mathbb{K}_{22}(t_i, t_j))_{1\le i,j\le 2n}$$

が成り立つ．

また，$f(z)$ の複素零点もまたパフィアン点過程となる．

定理 4. $z_1, z_2, \ldots, z_n$ は $|z_i| < 1, \Im z_i > 0$ をみたす複素数とする．$f(z)$ の複素零点の n 点相関関数は

$$\rho_n^c(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{(\pi\sqrt{-1})^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{|1 - z_j^2|} \cdot \operatorname{Pf}(\mathbb{K}^c(z_i, z_j))_{1\le i,j\le n}.$$

で与えられる．ただし，$\mathbb{K}^c(z, w)$ は 2×2 行列核で

$$\mathbb{K}^c(z, w) = \begin{pmatrix} \frac{z-w}{(1-zw)^2} & \frac{z-\bar{w}}{(1-z\bar{w})^2} \\ \frac{\bar{z}-w}{(1-\bar{z}w)^2} & \frac{\bar{z}-\bar{w}}{(1-\bar{z}\bar{w})^2} \end{pmatrix}$$

定理 1 と定理 4 については，独立に Forrester [1] がランダム行列の方法で示している．われわれはランダム行列理論を経由せず，ガウス過程の零点の相関関数に関する公式と，石川・川向・岡田によるパフィアンに関する等式を用いた．定理 2 と定理 3 はその副産物である．

参考文献

[1] P. J. Forrester, The limiting Kac random polynomial and truncated random orthogonal matrices, available at `http://arxiv.org/abs/1009.3066`

[2] M. Kac, On the average number of real roots of a random algebraic equation, Bull. Amer. Math. Soc. **49** (1943), 314–320.

[3] Y. Peres and B. Virág, *Zeros of the i.i.d. Gaussian power series: a conformally invariant determinantal process*, Acta Math. **194** (2005), 1–35.

[4] L.A. Shepp and R.J.Vanderbei, The complex zeros of random polynomials, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), 4365–4384.