The zeros of random analytic functions

白井朋之 (九大 IMI) *

1　はじめに

ランダム多項式・ランダム級数の研究の歴史は古く，Steinhaus, Paley-Zygmund, Wiener らの研究に遡る．Wiener [33] によるブラウン運動のランダム級数としての構成に始まり，伊藤-西尾の結果 [5] などを経て今日まで続くブラウン運動やガウス過程の級数論的研究 (cf.[8]) や，ランダム行列の固有値分布の研究 (cf. [15]) もランダムな特性多項式の研究としてこの一つに数えられるだろう．この講演では，特にランダム級数でかつ解析関数 (正則関数) となるランダム解析関数 (random analytic function，RAF) に焦点を絞る．RAF に話を限定しても膨大な量の研究があり，以下で紹介している内容はほんの一部に過ぎないことは言うまでもない．

RAF の零点の研究という立場では，(i) 係数 $\{a_n\}$ が i.i.d. の級数 $f(z) = \sum_n a_n z^n$ の零点，(ii) ランダム行列の特性多項式の零点 (つまりランダムな固有値) が代表的なものである．特に係数 a_n が正規分布の場合は，$f(z)$ がガウス過程となり詳しい解析が可能になるため多くの研究があり，ガウス型解析関数 (Gaussian analytic function，単に GAF) とも呼ばれる．(ii) であらわれる特性多項式の係数は，元の行列がガウス型であっても，一般に相関を持つので (i) とは性質の違う問題であるが，しばしば零点には特別な代数的な性質が引き継がれ，解析が可能になることが多い．

GAF の零点についてのパイオニア的な仕事は，Paley-Wiener [21], Kac [7], Rice [23, 24] などに遡る．Paley-Wiener [21] では，複素 Wiener 積分で与えられる複素平面内の帯状領域 $a < \mathrm{Im}\, z < b$ の GAF の零点の個数の漸近型を与えている．これは，Bohr-Jessen のリーマンゼータ関数の臨界帯 (critical strip) における概周期関数の研究に影響を受けており，そのランダム版として捉えられている．また，正規分布を係数とするランダム級数として定義される GAF の零点 (レベル集合) の個数の期待値を与える Kac-Rice 公式は，通信 (フィルター) の分野で重要な公式として知られているが，ガウス過程の large excursion の評価にも用いられる．整関数の値分布論 (Nevanlinna 理論) などの関係で，Littlewood-Offord, Sodin [28] などの零点の分布に関する大偏差型の結果も知られている．また，物理では，一次元のカオティックな古典力学系に対応する量子力学系の固有関数の Bargmann-Husimi 表現の零点についての研究もある (cf.[12]).

以下，特に GAF の零点のいくつかの話題をとりあげる．

2　ガウス型解析関数の例

最も重要な RAF の例をあげる．(RAF と GAF の定義については，７節を参照).

例 1 (ランダムべき級数). $\{\lambda_n\}_n$ は複素数列，$\{\zeta_n\}_n$ は平均 0，分散 1 の独立確率変数列とする．このとき，

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \zeta_n z^n$$

に対して，簡単な Borel-Cantelli の議論で，$a.s.$ で $X(z)$ の収束円は $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n z^n$ のものと一致することがわかる．また，各 n に対して $\zeta_n \overset{d}{=} -\zeta_n$ の意味で対称ならば，$a.s.$ で収束円は自然境界となる．

例 2 (不変性をもつ GAF). 例 1 において，$\{\zeta_n\}_n$ が i.i.d. 確率変数列で標準複素正規分布に従うときは GAF となる．特に，

$$X_L^{hyp}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{(L)_n}{n!}} \zeta_n z^n, \quad L > 0$$

$$X_L^{flat}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{L^n}{n!}} \zeta_n z^n, \quad L > 0$$

$$X_L^{ell}(z) = \sum_{n=0}^{L} \sqrt{\binom{L}{n}} \zeta_n z^n, \quad L = 1, 2, \ldots$$

は不変性をもつ GAF として重要である．ただし，$(a)_n = a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)$ は Pochhammer

*確率論シンポジウム@関西大学，Dec. 19-22, 2011.

の記号である．X_L^{hyp} は収束半径 1 で $a.s.$ で単位円板 $\mathbb{D}$ 内，X_L^{flat} は収束半径 ∞ で $a.s.$ で $\mathbb{C}$ 内，X_L^{ell} は多項式で $a.s.$ でリーマン球面上の GAF を定義する．例えば，簡単な計算により X_L^{hyp} の共分散は $S_L^{hyp}(z,w) = (1 - z\overline{w})^{-L}$ である．また，メビウス変換

$$z \mapsto T(z) := \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}, \quad |a|^2 - |b|^2 = 1$$

に関して，零点をもたない (non-random な)$h \in \mathcal{H}(D)$ が存在して

$$X_L^{hyp}(T(z)) \stackrel{d}{=} h(z) X_L^{hyp}(z)$$

という変換則をみたすことが，共分散の変換を計算することによりわかる．よって，零点の分布は $SU(1,1)$-不変である．他のものについては以下の表にあげる．ただし，$SU(2)$ は $z \mapsto \frac{az+b}{-\bar{b}z+\bar{a}}$ $(|a|^2+|b|^2=1)$, $W(1)$ は $z \mapsto az+b$ $(|a|=1)$ という写像に関する不変性である．

	D	共分散	不変測度	対称性
ell	$\overline{\mathbb{C}}$	$(1+z\overline{w})^L$	$\frac{m(dz)}{\pi(1+\|z\|^2)^2}$	$SU(2)$
flat	$\mathbb{C}$	$e^{Lz\overline{w}}$	$\frac{m(dz)}{\pi}$	$W(1)$
hyp	$\mathbb{D}$	$(1-z\overline{w})^{-L}$	$\frac{m(dz)}{\pi(1-\|z\|^2)^2}$	$SU(1,1)$

4 節で述べるように，$L=1$ の hyperbolic GAF の零点は特別な性質を持つことが Peres-Virág によって示された．さらに，その拡張が Krishnapur によって得られている．

例 3. 上半平面 $\mathbb{H}$ の Szegö 核

$$S_{\mathbb{H}}(z,w) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\overline{w}-z}.$$

を考える．対応する再生核ヒルベルト空間はハーディー空間 $H^2(\mathbb{H})$ である．セゲー核の複素ウィナー積分

$$\begin{aligned} X_{\mathbb{H}}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{\mathbb{H}}(z,t)dB(t) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t-z}dB(t), \quad z \in \mathbb{H} \end{aligned}$$

によって $\mathbb{H}$ 上の GAF が定義される．ここで，$B(t)$ は複素ブラウン運動．この $X_{\mathbb{H}}(z)$ は $SL(2,\mathbb{R})$-不変性をもち，境界過程がホワイトノイズとなる岡部の意味の hyperprocess [20] である．

3 M. Kac の結果とその幾何学的解釈

ランダム多項式の零点の研究の中でも Kac(1943) の結果は重要である．

定理 3.1. [7] $\{a_i\}_{i=0}^n$ を i.i.d. な実標準正規分布をもつ確率変数列とする．このとき，ランダム多項式 $p_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ の実零点の個数 N_n の平均は

$$E[N_n] = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\sqrt{\frac{1}{(t^2-1)^2} - \frac{(n+1)^2 t^{2n}}{(t^{2n+2}-1)^2}}dt$$

で与えられる．特に，

$$E[N_n] \sim \frac{2}{\pi}\log n + C + \frac{2}{n\pi} + O(n^{-2})$$

注意 1. この結果は，Logan-Shepp [13, 14] によって安定分布の場合に拡張されている．

この定理には幾何学的な面白い解釈がある [1]．以下，それを紹介する．

まず次のことに注意する．$\boldsymbol{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ とすると，明らかに

$$\begin{aligned} p_n(t) := \sum_{i=0}^n a_i t^i = 0 \\ \Longleftrightarrow \boldsymbol{a} \perp (1, t, t^2, \dots, t^n) \end{aligned}$$

を意味する．共に長さが 1 となるように正規化して n 次元球面 S^n に射影すると，$\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}| \in S^n$ と S^n 上の曲線 $\varphi(t) = (1,t,t^2,\dots,t^n)/\sqrt{1+t^2+\cdots+t^{2n}}$ が直交するとき，t は実零点となる．逆に言うと，$\varphi(t)$ に直交する赤道 $\varphi(t)_\perp$ が S^n 上で t を零点とする係数の集合となる．$\boldsymbol{a}$ が $(n+1)$ 次元正規分布に従っていれば，それを球面 S^n に射影した $\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|$ は S^n 上の一様分布となる．よって，

> ランダム多項式 $p_n(t)$ の実零点の個数は，一様に選んだ球面 S^n 上の点を北極としたときの S^n の赤道 (大円) と，曲線 $\varphi(t), t \in \mathbb{R}$ が交叉する回数に等しい．

よって，$\varphi(t)$ を北極とする赤道 $\varphi(t)_\perp$ が "$L = \int_{-\infty}^{\infty}\delta_{\varphi(t)_\perp}dt$" を球面上の点を何度通るかを勘定する S^n 上の測度とすると，球面の測度 $L(S^n)$ が，実零点の個数の期待値に等しい．$\{\varphi(t)_\perp, a < t < b\}$ の掃く部分の測度 (重複度も込めて) は

$$\frac{vol(\cup_{t\in[a,b]}\varphi(t)_\perp)}{vol(S^n)} = \frac{length(\varphi([a,b]))}{\pi}$$

となる．よって，ランダム多項式 $p_n(t)$ の実零点の個数の期待値は $\pi^{-1}\int_{\mathbb{R}}|\varphi'(t)|^2 dt$ で与えられる．これを具体的に計算したものが Kac の結果である．(Kac 自身の証明はこれとは異なる．)

この結果は，一般の GAF の零点の分布密度に関しての結果 (定理 4.1) に拡張される．

4 GAF の零点

$\{X(z), z\in D\}$ を D 上の GAF として，その零点を D 内の点過程とみなしてしばしば ξ_X とあらわして，X に対応する零点過程ともいう．以下で述べる点過程の相関関数や行列式点過程の定義などについては 7 節を参照のこと．

4.1 GAF の零点の相関関数

Kac の実零点の幾何学的解釈を複素で考えることにより，一般の GAF の零点過程の一点相関関数についても次のような公式が知られている．

定理 4.1 ([1])**.** $X(z)$ を D 上の GAF で共分散行列が $S(z,w)$ とする．このとき，$X(z)$ の零点過程の一点相関関数 (零点の密度) は

$$\rho_1(z)=\frac{1}{\pi}\partial_z\partial_{\bar{z}}\log S(z,z)$$

で与えられる．

注意 2. $S(z,z)=0$ のときは，X はランダムでない零点 z をもつ．つまり，一点相関測度は z でアトムをもつので，$\rho_1(z)$ は z で存在しない．

例 4. hyperbolic GAF $X_L^{hyp}(z)$ の共分散関数は $S_L^{hyp}(z,w)=(1-z\overline{w})^{-L}$ であるので，零点の一点相関関数は定理 4.1 より

$$\rho_1(z)=\frac{L}{\pi}(1-z\bar{z})^{-2}.$$

で与えられる．零点は境界 $|z|=1$ に集積している．特に境界は自然境界となる．

正則性により，共分散の対角成分 $S(z,z)$ の情報が非対角成分の性質までほぼ決定することから，以下のような性質が導かれる．

定理 4.2 (Calabi's rigidity)**.** X と Y は D 上の GAF とする．零点過程 ξ_X と ξ_Y の一点相関関数が一致するとき，零点をもたない (ランダムでない) 正則関数 h で $Y\overset{d}{=}hX$ となるものが存在する．特に，$\xi_X\overset{d}{=}\xi_Y$ である．

以下の定理は Hammersley[3] などによって調べられている．

定理 4.3. $X(z)$ は D 上の GAF で共分散関数が $S(z,w)$ であるとする．このとき，零点過程の n 点相関関数は，異なる $z_1,z_2,\ldots,z_n$ が $\det(S(z_i,z_j))_{i,j=1}^n>0$ となるとき，

$$\rho_n(z_1,z_2,\ldots,z_n)=\frac{E[|X'(z_1)\cdots X'(z_n)|^2|X(z_1)=\cdots=X(z_n)=0]}{\det(\pi(S(z_i,z_j))_{i,j=1}^n)}$$

によって与えられる．

一般に共分散 $S(z,w)$ のガウス過程 $X(z)$ に対して，

$$E[|X(z_1)\cdots X(z_n)|^2]=\mathrm{per}(S(z_i,z_j))_{i,j=1}^n$$

となることを用いると，上の式は以下のように書き換えられる．

$$\rho_n(z_1,z_2,\ldots,z_n)=\frac{\mathrm{per}(C-BA^{-1}B^*)}{\det(\pi A)}$$

ただし，$n\times n$ 行列 A,B,C は

$$\begin{aligned}A_{ij}&=E[X(z_i)\overline{X(z_j)}]=S(z_i,z_j)\\B_{ij}&=E[X'(z_i)\overline{X(z_j)}]=\partial_{z_i}S(z_i,z_j)\\C_{ij}&=E[X'(z_i)\overline{X'(z_j)}]=\partial_{z_i}\partial_{\bar{z}_j}S(z_i,z_j)\end{aligned}$$

で定める．また，$n\times n$ 行列 $A=(A_{ij})$ のパーマネントは

$$\mathrm{per}\,A=\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\prod_{i=1}^n A_{i\sigma(i)}$$

と定義される．この公式により GAF の零点過程の相関関数は「原理的には」計算可能である．

4.2 GAF の零点の線形統計量の分散

例 2 の $X_L^{flat}(z)$ の零点過程は $\mathbb{C}$ 上の平行移動と回転に関して不変である．定理 4.3 により，$X_L^{flat}(z)$ の二点相関関数 $\rho_2(z,w)$ は計算されて，$r=L|z-w|^2$ の関数

$$\rho_2(r)=\frac{1}{\pi^2}\frac{(1-e^{-r}-re^{-r})^2+e^{-r}(1-r-e^{-r})^2}{(1-e^{-r})^3}$$

となる．簡単のため，$L = 1$ のときを考える．Forrester-Honner [2], Sodin-Tsirelson [29] らによって以下のことが計算されている．$f \in C_c^2(\mathbb{R}^2)$ に対して，

$$\mathrm{Var}(\langle \xi, f(\cdot/r)\rangle) = \frac{\zeta(3)+o(1)}{16\pi r^2}\|\Delta f\|_{L^2}^2$$

また，$f = I_{D_r}$ を半径 r の円板の定義関数とすると

$$\mathrm{Var}(\langle \xi, f(\cdot/r)\rangle) = \frac{\zeta(3/2)+o(1)}{4\pi^{1/2}} r$$

上の二点相関関数の表示と (7.1) を用いればよい．また，Nazarov-Sodin [16] によって以下のことも示されている．$f \in (L^1 \cap L^2)(\mathbb{R}^2)$ として，

$$\mathrm{Var}(\langle \xi, f(\frac{\cdot}{r})\rangle) = r^2 \int_{\mathbb{C}} |\widehat{h}(\lambda)|^2 M(r^{-1}\lambda) m(d\lambda)$$

ただし，$M(z) = \pi^3 |z|^4 \sum_{k=1}^{\infty} k^{-3} e^{-\frac{\pi^2}{k}|z|^2}$ で，

$$\widehat{h}(\lambda) = \int_{\mathbb{C}} h(z) e^{-2\pi i \,\mathrm{Re}\langle \lambda, z\rangle} m(dz)$$

4.3 GAF の零点と行列式点過程

ランダム級数の零点過程の一般的な取り扱いについては Kahane [8] などに詳しいが，$X_1^{hyp}(z)$ の零点過程を行列式点過程 (DPP, determinantal point process) として特定した Peres-Virág(2005) による次の結果は重要である．

定理 4.4 ([22])**.** $\{\zeta_n\}_{n=0}^{\infty}$ を i.i.d. 標準複素ガウス確率変数列とする．ガウス型ランダムべき級数 $X_1^{hyp}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_n z^n$ の零点は，$K(z,w) = \pi^{-1}(1 - z\overline{w})^{-2}$, $\lambda(dz) = m(dz)$ に付随する $\mathbb{D}$ 上の行列式点過程となる．

さらにこの結果は Krishnapur(2009) によって行列版に拡張された．

定理 4.5 ([10])**.** $G_0, G_1, \ldots$ を $k \times k$ の Ginibre 行列の i.i.d. 列とする．Ginibre 行列とは，各要素が i.i.d. $N_{\mathbb{C}}(0,1)$ に従うものである．このとき，

$$X^{(k)}(z) = \det\left(\sum_{n=0}^{\infty} G_n z^n\right)$$

の零点は，$K^{(k)}(z,w) = \pi^{-1}(1 - z\overline{w})^{-(k+1)}$, $\lambda(dz) = k(1-|z|^2)^{k-1} m(dz)$ に付随する行列式点過程となる．

以下は定理 4.4 の $\mathbb{H}$ 版である．

命題 4.6 ([25])**.** 例 3 で定義した $\mathbb{H}$ 上の GAF $X_{\mathbb{H}}(z)$ の零点過程は，

$$K_{\mathbb{H}}(z,w) = 4\pi S_{\mathbb{H}}(z,w)^2 = \frac{-1}{\pi(\overline{w} - z)^2} \qquad (4.1)$$

とルベーグ測度に付随する $\mathbb{H}$ 上の DPP である．

5 GAF の零点に関する大偏差型評価

GAF に関しての大偏差型の評価を考える．

5.1 Offord 型の大偏差確率

以下の Sodin による結果は，線形統計量 $\langle \xi_X, \varphi\rangle = \int_D \varphi(z)\xi_X(dz)$ の大偏差に関するものである．

定理 5.1. X は $D \subset \mathbb{C}$ 内の GAF とする．ξ_X を X の零点過程とする．このとき，D 内でコンパクトな台をもつ $\varphi \in C_c^2(D)$ に対して，以下の不等式が成り立つ．$\alpha > 0$ に対して，

$$P\left(|\langle \varphi, \xi_X\rangle - \langle \varphi, \lambda_1\rangle| \geq \alpha\right) \leq 3\exp\left(-\frac{\pi\alpha}{\|\Delta\varphi\|_{L^1}}\right).$$

ただし，λ_1 は ξ_X の平均測度 (形式的には $\lambda_1 = E[\xi_X]$).

ただし，この評価自体は GAF 一般で成り立つもので，GAF によってはベストなレートを与えないこともある．また，具体的なレート関数がわかっている例もないようである．

5.2 Hole probability

半径 r の円内に零点がない事象 A_r の確率 (hole probability) を考える．これは前の定理で φ として半径 r の円の定義関数をとる場合に対応するが，φ が円の境界部分で滑らかでないので，その寄与がでてくる場合がある．ちなみに，intensity $1/\pi$ のポアソン点過程ならば，$P(A_r) = e^{-r^2}$ である．Sodin-Tsirelson [30] は平行移動不変なランダム整関数 $X_1^{flat}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta_n}{\sqrt{n!}} z^n$ の零点に関して，$-\log P(A_r) \asymp -r^4$ であることを示した．Nishry はこれを精密化して次の結果を得た．

定理 5.2 ([19])**.** $r \to \infty$ で $\log P(A_r) = -\frac{3e^2}{4} r^4 + o(r^4)$

注意 3. この結果は，一般の GAF $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \zeta_n z^n$ について，$\int_E \frac{dt}{t} < \infty$ となる例外点を除いて $\log P(A_r) = -S(r) + o(S(r))$ となるという形に Nishry によって一般化されている．ただし，$S(r) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \log^+(a_n r^n)$.

6 GAF への中心極限定理

以下の中心極限定理は簡単に示すことができるが，その系として対応する零点過程の収束定理を得る．

定理 6.1 ([25])**.** $\{\zeta_k\}_k$ は平均 0，分散 1 の i.i.d. 複素確率変数列，$\psi_k^{(n)}(z)$ は独立な RAF 列で $\{\zeta_k\}_k$ と独立とする．さらに，各 $z \in D$ に対して $\sum_k E[|\psi_k^{(n)}(z)|^2] < \infty$ と仮定する．RAF の列

$$X_n(z) = \sum_k \zeta_k \psi_k^{(n)}(z), \quad z \in D$$

を考える．以下を仮定する．
(A1) 共分散関数 $S_n(z,w) = \sum_k E[\psi_k^{(n)}(z)\overline{\psi_k^{(n)}(w)}]$ は $S(z,w)$ に各点収束する．
(A2) $\sup_n S_n(z,z)$ は局所可積分.
(A3) ある $\delta > 0$ が存在して，任意の $z \in D$ に対して $\lim_{n\to\infty} \sum_k E[|\psi_k^{(n)}(z)|^{2+\delta}] = 0$
このとき，RAF 列 $\{X_n\}$ は共分散関数 $S(z,w)$ の GAF X に分布収束する．特に，$S(z,z) \equiv 0$ でなければ，零点過程 $\{\xi_{X_n}\}$ は X の零点過程 ξ_X に分布収束する．

例 5. $\mathbb{H}$ 上の RAF $X(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\zeta_k}{k-z}$ を考える．$X(z)$ の共分散関数は

$$S^X(z,w) = S_{\mathbb{H}}(z,w)\frac{\cot\pi\overline{w} - \cot\pi z}{2i}$$

となり，特に $\zeta_k \sim N_{\mathbb{C}}(0,1)$ ならば，定理 4.1 より $y = \operatorname{Im} z \to 0$ で

$$\rho_1^X(z) = \frac{1}{4y^2} - \frac{\pi}{\sinh^2 2\pi y} \sim \frac{\pi}{3} - \frac{4\pi^3}{15}y^2 + O(y^4)$$

となる．つまり，$X(z)$ は $\mathbb{Z}$ 上に極をもち，その零点過程は実軸に集積しない．

定理 6.1 より，スケールした $X_n(z) = \sqrt{n}X(nz)$ は共分散関数 $S_{\mathbb{H}}(z,w)$ の GAF $X_{\mathbb{H}}(z)$ に収束することがわかる．特に，命題 4.6 より $X_n(z)$ の零点過程もしくは $X(z)$ の零点過程を $1/n$ に縮小したものは $K_{\mathbb{H}}(z,w) = \frac{-1}{\pi(\overline{w}-z)^2}$ に付随する DPP に収束する．

7 補遺

7.1 ランダム解析関数

$D \subset \mathbb{C}$ は開領域とする．$\mathcal{H}(D)$ を D 内の正則関数の全体とする．$\{K_j\}_{j=1}^{\infty}$ を D 内のコンパクト集合の列による D の exhaustion として，$\rho(f,g) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j}\|f-g\|_{K_j}$ によって $\mathcal{H}(D)$ 上の距離を定義する．ただし，$\|\cdot\|_K$ は K 上の一様ノルム．このとき，$(\mathcal{H}(D),\rho)$ は完備可分距離空間となる．$\mathcal{B}(\mathcal{H}(D))$ を $\mathcal{H}(D)$ のボレル集合族とする．$\mathcal{H}(D)$-値確率変数を random analytic function (RAF) という．簡単のため，RAF $\{X(z), z \in D\}$ は二乗可積分で，中心化されたもののみを考えることにする．つまり，すべての $z \in D$ に対して，$E[X(z)] = 0$，$E[|X(z)|^2] < \infty$ を仮定する．

定義 7.1 (GAF(Gaussian Analytic Function))**.** RAF $X(z)$ が複素ガウス過程であるとき，GAF であるという．つまり，任意の $n \geq 1, c_j \in \mathbb{C}, z_j \in D$ に対して，$\sum_{j=1}^n c_j X(z_j)$ が (中心化された) 複素ガウス分布に従うときをいう．

7.2 点過程と相関関数

R を可算基を持つ局所コンパクトハウスドルフ空間とし，その上の Radon 測度を $\lambda(dx)$ として，以下固定する．R 上の非負整数値 Radon 測度を R 上の局所有限な配置といい，その全体を $Q = Q(R)$ と表わす．Q には漠位相を入れる．つまり，R 上のコンパクト台をもつ連続関数 $f \in C_c(R)$ に対して，線形統計量を $\langle \xi, f\rangle = \sum_i f(x_i)$ で定義し，収束は $\langle \xi_n, f\rangle \to \langle \xi, f\rangle$ によって $\xi_n \to \xi$ と定義する．また，写像 $\xi \mapsto \langle \xi, f\rangle$ で生成される σ-加法族を $\mathcal{B}(Q)$ として，Q-値確率変数を R 上の点過程 (point process) という．Q の要素 ξ は $\xi = \sum_i \delta_{x_i}$ の形に書けることに注意しておく.（多重点がある場合は違う点だとみなして，繰り返し和に加える.）

一般に $\xi \in Q$ と台がコンパクトな連続関数 $f_n \in C_c(R^n)$ に対して，

$$\langle \xi_n, f_n\rangle = \sum_{x_1,x_2,\ldots x_n \in \xi:\text{互いに異なる}} f_n(x_1,\ldots,x_n)$$

とおく．ξ_1 は ξ とみなす.

定義 7.2. 任意の $f_n \in C_c(R^n)$ に対して，

$$E[\langle \xi_n, f_n\rangle] = \int_{R^n} \lambda_n(dx_1\cdots dx_n) f_n(x_1,\ldots,x_n)$$

を満たす R^n 上の測度 $\lambda_n(dx_1\cdots dx_n)$ が存在すれば，これを ξ の n 次相関測度と呼ぶ．特に λ_1 は平均測度ともいう．さらに，λ_n が $\lambda^{\otimes n}$ に関して絶対連続であるとき，

$$\rho_n(x_1,\dots,x_n)=\frac{d\lambda_n}{d\lambda^{\otimes n}}(x_1,\dots,x_n)$$

を n 次相関関数と呼ぶ．シンボリックには $\lambda_n = E[\xi_n]$ である．

n 次相関関数が存在すると仮定する．関数 $f:R\to\mathbb{C}$ に対する線形統計量は $\langle\xi,f\rangle=\sum_i f(z_i)$ であるから，

$$\begin{aligned}|\langle\xi,f\rangle|^2&=\sum_{i,j}f(z_i)\overline{f(z_j)}\\&=\sum_{i,j:\text{distinct}}f(z_i)\overline{f(z_j)}+\sum_i|f(z_i)|^2\\&=\langle\xi_2,f\otimes\bar{f}\rangle+\langle\xi,|f|^2\rangle\end{aligned}$$

よって，両辺平均をとって $|E[\langle\xi,f\rangle]|^2$ を引けば，2 点相関関数の定義により，$f:R\to\mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned}&\mathrm{Var}(\langle\xi,f\rangle)\\&=\int_R\rho_1(z)|f(z)|^2\lambda(dz)\\&\quad+\int_{R^2}(\rho_2(z,w)-\rho_1(z)\rho_1(w))f(z)\overline{f(w)}\lambda(dz)\lambda(dw)\end{aligned}\tag{7.1}$$

であることがわかる．

定義 7.3. $L^2(R,\lambda)$ 上の連続な積分核 $K(x,y)$ をもつ局所トレース族に属する自己共役な積分作用素 $K:L^2(R,\lambda)\to L^2(R,\lambda)$ でそのスペクトルが $[0,1]$ に含まれるものに対して，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$\rho(x_1,x_2,\dots,x_n)=\det(K(x_i,x_j))_{i,j=1}^n$$

となる点過程を行列式点過程 (determinantal point process, DPP) という．

詳細は [4, 26, 32] などを参照.

参考文献

[1] Alan Edelman and Eric Kostlan. Erratum: "How many zeros of a random polynomial are real?" [Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **32** (1995), no. 1, 1–37; MR1290398 (95m:60082)]. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 33(3):325, 1996.

[2] P. J. Forrester and G. Honner. Exact statistical properties of the zeros of complex random polynomials. *J. Phys. A*, 32(16):2961–2981, 1999.

[3] J. M. Hammersley. The zeros of a random polynomial. In *Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1954–1955, vol. II*, pages 89–111, Berkeley and Los Angeles, 1956. University of California Press.

[4] J. Ben Hough, Manjunath Krishnapur, Yuval Peres, and Bálint Virág. *Zeros of Gaussian analytic functions and determinantal point processes*, volume 51 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.

[5] Kiyosi Itô and Makiko Nisio. On the convergence of sums of independent Banach space valued random variables. *Osaka J. Math.*, 5:35–48, 1968.

[6] M. Kac. A correction to "On the average number of real roots of a random algebraic equation.". *Bull. Amer. Math. Soc.*, 49:938, 1943.

[7] M. Kac. On the average number of real roots of a random algebraic equation. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 49:314–320, 1943.

[8] Jean-Pierre Kahane. *Some random series of functions*, volume 5 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1985.

[9] Manjunath Krishnapur. Overcrowding estimates for zeroes of planar and hyperbolic Gaussian analytic functions. *J. Stat. Phys.*, 124(6):1399–1423, 2006.

[10] Manjunath Krishnapur. From random matrices to random analytic functions. *Ann. Probab.*, 37(1):314–346, 2009.

[11] Manjunath Ramanatha Krishnapur. *Zeros of random analytic functions*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2006. Thesis (Ph.D.)–University of California, Berkeley.

[12] P. Lebœuf. Random analytic chaotic eigenstates. *J. Statist. Phys.*, 95(3-4):651–664, 1999.

[13] B. F. Logan and L. A. Shepp. Real zeros of random polynomials. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 18:29–35, 1968.

[14] B. F. Logan and L. A. Shepp. Real zeros of random polynomials. II. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 18:308–314, 1968.

[15] Madan Lal Mehta. *Random matrices*, volume 142 of *Pure and Applied Mathematics (Amsterdam)*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, third edition, 2004.

[16] F. Nazarov and M Sodin. Fluctuations in random complex zeroes: asymptotic normaility revisited. *available at http://arxiv.org/abs/1003.4251.*

[17] F. Nazarov, M. Sodin, and A. Volberg. The Jancovici-Lebowitz-Manificat law for large fluctuations of random complex zeroes. *Comm. Math. Phys.*, 284(3):833–865, 2008.

[18] Fedor Nazarov, Mikhail Sodin, and Alexander Volberg. Transportation to random zeroes by the gradient flow. *Geom. Funct. Anal.*, 17(3):887–935, 2007.

[19] Alon Nishry. Asymptotics of the hole probability for zeros of random entire functions. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (15):2925–2946, 2010.

[20] Yasunori Okabe. Stationary Gaussian processes with Markovian property and M. Sato's hyperfunctions. *Japan. J. Math.*, 41:69–122, 1973.

[21] Raymond E. A. C. Paley and Norbert Wiener. *Fourier transforms in the complex domain*, volume 19 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1987. Reprint of the 1934 original.

[22] Yuval Peres and Bálint Virág. Zeros of the i.i.d. Gaussian power series: a conformally invariant determinantal process. *Acta Math.*, 194(1):1–35, 2005.

[23] S. O. Rice. Mathematical analysis of random noise. *Bell System Tech. J.*, 23:282–332, 1944.

[24] S. O. Rice. Mathematical analysis of random noise. *Bell System Tech. J.*, 24:46–156, 1945.

[25] Tomoyuki Shirai. Limit theorems for random analytic functions and their zeros. *To appear in RIMS kôkyurôku Bessatsu.*

[26] Tomoyuki Shirai and Yoichiro Takahashi. Random point fields associated with certain Fredholm determinants. I. Fermion, Poisson and boson point processes. *J. Funct. Anal.*, 205(2):414–463, 2003.

[27] M. Sodin. Zeros of Gaussian analytic functions. *Math. Res. Lett.*, 7(4):371–381, 2000.

[28] Mikhail Sodin. Zeroes of Gaussian analytic functions. In *European Congress of Mathematics*, pages 445–458. Eur. Math. Soc., Zürich, 2005.

[29] Mikhail Sodin and Boris Tsirelson. Random complex zeroes. I. Asymptotic normality. *Israel J. Math.*, 144:125–149, 2004.

[30] Mikhail Sodin and Boris Tsirelson. Random complex zeroes. III. Decay of the hole probability. *Israel J. Math.*, 147:371–379, 2005.

[31] Mikhail Sodin and Boris Tsirelson. Random complex zeroes. II. Perturbed lattice. *Israel J. Math.*, 152:105–124, 2006.

[32] A. Soshnikov. Determinantal random point fields. *Uspekhi Mat. Nauk*, 55(5(335)):107–160, 2000.

[33] N Wiener. Differential space. *J. Math. Phys*, 2:131–174, 1923.