Limit theorems for random analytic functions and their zeros

Tomoyuki SHIRAI (IMI, Kyushu University) *

平成 23 年 6 月 3 日

1 はじめに

ランダム多項式の零点の研究は，Pólya, Littlewood-Offord などに遡るが，Kac(1943) の結果はその中でも重要である．

定理 1.1. [4] $\{a_i\}_{i=0}^n$ を i.i.d. な実標準正規分布をもつ確率変数列とする．このとき，ランダム多項式 $p_n(x) = \sum_{i=0}^n a_n x^n$ の実零点の個数の平均 N_n は

$$N_n = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{R}} \sqrt{\frac{1}{(t^2-1)^2} - \frac{(n+1)^2 t^{2n}}{(t^{2n+2}-1)^2}} dt$$
$$= \frac{4}{\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{(1-t^2)^2} - \frac{(n+1)^2 t^{2n}}{(1-t^{2n+2})^2}} dt$$

で与えられる．特に，

$$N_n \sim \frac{2}{\pi} \log n + C + \frac{2}{n\pi} + O(n^{-2})$$

この定理は幾何学的確率論からの面白い解釈がある [1].

その後，多くの研究がなされたが，ランダムべき級数の零点過程を行列式点過程 (DPP, determinantal point process) として特定した Peres-Virág(2005) による次の結果は重要である．

定理 1.2 (Peres-Virág(2005))**.** $\{\zeta_n\}_{n=0}^\infty$ を i.i.d. 標準複素ガウス確率変数列とする．ガウス型ランダムべき級数 $X(z) = \sum_{n=0}^\infty \zeta_n z^n$ の零点は，$K(z,w) = \pi^{-1}(1-z\overline{w})^{-2}$, $\lambda(dz) = m(dz)$ が D 上のルベーグ測度に付随する行列式点過程となる．

さらにこの結果は行列版に拡張された．

定理 1.3 (Krishnapur (2009))**.** G_n を $k \times k$ の Ginibre 行列とする．つまり，各要素が i.i.d. $N_{\mathbf{C}}(0,1)$ に従うものとする．このとき，

$$X^{(k)}(z) = \det \left(\sum_{n=0}^\infty G_n z^n \right)$$

の零点は，$K^{(k)}(z,w) = \pi^{-1}(1-z\overline{w})^{-(k+1)}$, $\lambda(dz) = k(1-|z|^2)^{k-1} m(dz)$ に付随する行列式点過程となる．

また，ガウス分布から行列式点過程があらわれる重要な例は，GUE や Ginibre アンサンブルなどの固有値，つまり特性多項式の零点が DPP になるというものである．特性多項式は係数がガウス確率変数の多項式になっている点で，係数が線形である Peres-Virág の GAF とは違うが，Krishnapur のものには近い．さらにランダムではないが，Montgomery, Odlyzko, Rudnick-Sarnak，Keating-Snaith らの研究で知られているように，リーマンゼータ関数の非自明零点は DPP のように振る舞うという状況証拠がいくつも得られている．

この講演では，複素型のランダム解析関数についての中心極限定理とその零点過程に対する極限定理を議論することにより，DPP が極限定理としてあらわれる例を与える．

2 ガウス型解析関数への中心極限定理

2.1 ランダム解析関数

$D \subset \mathbf{C}$ は開領域とする．$\mathcal{H}(D)$ を D 内の正則関数の全体とする．$\mathcal{H}(D)$ 上の距離を，$\{K_j\}_{j=1}^\infty$ は D 内のコンパクト集合の列による D の exhaustion に対して

$$\rho(f,g) = \sum_{j=1}^\infty 2^{-j} \|f-g\|_{K_j}$$

によって定義する．$\|\cdot\|_K$ は K 上の一様ノルム．このとき，$(\mathcal{H}(D), \rho)$ は完備可分距離空間となる．$\mathcal{B}(\mathcal{H}(D))$ を $\mathcal{H}(D)$ のボレル集合族とする．

定義 2.1. $\mathcal{H}(D)$-値確率変数を random analytic function (RAF) という．

*Kyushu probability seminar on 2011/6/3

以後，RAF は二乗可積分で，中心化されたもののみを考えることにする．つまり，すべての $z \in D$ に対して，

$$E[X(z)] = 0, \quad E[|X(z)|^2] < \infty.$$

を仮定する．

命題 2.2. $\{\psi_n(z)\}$ は RAF の列で，

$$\sum_n E[|\psi_n(z)|^2] < \infty$$

とする．このとき，

$$X(z) = \sum_n \psi_n(z)$$

は，また RAF を定義する．

証明．1°) Kolmogorov の 1 級数定理により，各 $z \in D$ に対して，$X(z)$ は a.s. で収束する．上の主張は $\mathcal{H}(D)$ において a.s. で収束することを示す．特に有限次元分布は収束する．

2°) Montel の定理[1]より，実確率変数列 $\{\|X_n\|_K\}_n$ の tightness が，$\{\mu_{X_n}\}_n$ の tightness を導く．さらに，$\{\|X_n\|_K\}_n$ の可積分性は，$\{X(z)\}$ の局所二乗可積分性より従う． □

例 1 (ランダムべき級数)**.** $\{\lambda_n\}_n$ は複素数列，$\{\zeta_n\}_n$ は平均 0，分散 1 の独立確率変数列とする．このとき，$X(z) = \sum_n \lambda_n \zeta_n z^n$ に対して

$$\sum_n E[|\lambda_n \zeta_n z^n|^2] = \sum_n |\lambda_n|^2 |z|^{2n} < \infty$$

となるのは，z が $f(z) = \sum_n \lambda_n z^n$ の収束円内にあるときでそのときに限る．よって，$a.s.$ で $X(z)$ の収束円は $f(z)$ のものと一致する．

定義 2.3 (GAF(Gaussian Analytic Function))**.** RAF $X(z)$ が複素ガウス過程であるとき，GAF であるという．つまり，任意の $n \geq 1, c_j \in \mathbf{C}, z_j \in D$ に対して，$\sum_{j=1}^n c_j X(z_j)$ が (中心化された) 複素ガウス分布に従うときをいう．

例 2 (hyperbolic GAF)**.** 例 1 において，$\{\zeta_n\}_n$ が i.i.d. 確率変数列のとき GAF となる．特に，

$$X_L^{hyp}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{(L)_n}{n!}} \zeta_n z^n, \quad L > 0$$

は収束半径 1 であるから，$a.s.$ で $\mathbb{D}$ の GAF を定義する．簡単な計算により共分散は $S(z,w) = (1 - z\overline{w})^{-L}$ である．また，メビウス変換

$$z \mapsto T(z) := \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}, \quad |a|^2 - |b|^2 = 1$$

に関して，零点をもたない (non-random) な $h \in \mathcal{H}(D)$ が存在して

$$X_L^{hyp}(T(z)) \stackrel{d}{=} h(z) X_L^{hyp}(z)$$

という変換則をみたす．よって，零点の分布は $SU(1,1)$-不変である．

特に，$L = 1$ の零点は特別な性質を持つことははじめに述べたように Peres-Virág によって示された．さらに，その拡張が Krishnapur によって得られている．

2.2 ポアソン点過程と行列式点過程

R を可算基をもつ局所コンパクトハウスドルフ空間とする．ここでは，$\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^n$ の部分集合や可算集合とする．$Q = Q(R)$ は非負整数値のラドン測度とする．このとき，$\xi \in Q$ は

$$\xi = \sum_i \delta_{x_i}$$

の形であらわすことができる．R 上のコンパクト台をもつ連続関数 $f \in C_c(R)$ に対して

$$\langle \xi, f \rangle = \sum_i f(x_i)$$

とする．$\xi \mapsto \langle \xi, f \rangle$ で生成される σ-加法族を $\mathcal{B}(Q)$ とする．

定義 2.4. Q-値確率変数を点過程 (point process) という．

点過程の中でもっとも重要なものはポアソン点過程である．

例 3. R 上の非負ラドン測度 λ を固定する．任意の互いに素な $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(R)$ に対して

$$P(\xi(A_i) = k_i, i = 1, 2, \dots, n) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda(A)^{k_i}}{k_i!} e^{-\lambda(A_i)}$$

となる点過程を平均測度 λ のポアソン点過程という．特に，コンパクト集合 A に対して，$\xi(A) < \infty$ $a.s.$ で，$P(\xi(A) = n) = \frac{\lambda(A)^n}{n!} e^{-\lambda(A)}$ であるが，条件付き測度 $P(\cdot|\xi(A) = n)$ は $\lambda^{\otimes n}$ を A^n 上に制限して正規化した確率測度である．

[1] Montel の定理の主張は「正則関数の族は，局所一様有界ならば正規族となる」ことである．

例 4 (行列式点過程 (DPP)). λ は R 上の非負ラドン測度を固定する．$K : L^2(R,\lambda) \to L^2(R,\lambda)$ は連続な積分核をもつ積分作用素で，(i) $O \le K \le I$, (ii) 局所トレース族，つまり任意のコンパクト集合 Λ への制限 K_Λ がトレース族であるとする．このとき，R 上の点過程を以下のような条件付き測度で定義することができる．

トレース族作用素 K_Λ を考えるが，簡単のために，一部 Λ の依存性を省略する．

1°) 仮定より，K_Λ の固有値は $0 \le \lambda_i \le 1$ をみたし，対応する固有関数を φ_i とする．このとき，

$$K_\Lambda(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \varphi_i(x)\varphi_i(y)$$

とスペクトル分解できる．ただし，$\{\varphi_i\}_i$ は固有関数からなる正規直交基底.

2°) $\xi_i \sim Be(\lambda_i)$ をみたす独立確率変数列に対して，ランダムな集合 $I \subset \{1,2,\dots\}$ を

$$I = \{i \in \{1,2,\dots\}; \xi_i = 1\}$$

と定義する．

$$E|I| = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = \mathrm{Tr}(K_\Lambda) < \infty$$

であるから，$|I| < \infty$ a.s. である．

3°) $n = |I|$ として，

$$\Phi_I(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{n!}\left|\det(\varphi_i(x_j))_{i\in I, j=1,\dots,n}\right|^2$$

と R^n 上の $\lambda^{\otimes n}$ に対する確率密度関数を定義する．

こうやって定義される $\sum_{n=0}^{\infty} \Lambda^n$ 上の確率測度が (K_Λ, λ) に付随する行列式点過程 $\mu_{K_\Lambda,\lambda}$ である．さらに，$\{\mu_{K_\Lambda,\lambda}\}_\Lambda$ の無矛盾性から $Q(R)$ 上の確率測度 $\mu_{K,\lambda}$ に一意的に拡張される．これを，(K,λ) に付随する行列式点過程 (determinantal point process, DPP) という．

2.3 相関関数

点過程の相関関数の定義をしておく．R は可算基をもつ局所コンパクトハウスドルフ空間とする．$\xi = \xi(\omega)$ を R 上の点過程とする．R 上の非負ラドン測度 λ を一つ固定する．任意の $\varphi \in C_c(R)$ に対して，

$$E[\langle \xi, \varphi\rangle] = E[\int_R \varphi(x)\xi(dx)] = \int_R \varphi(x)\lambda_1(dx)$$

となるラドン測度 $\lambda_1(dx)$ が存在するとき，一点相関測度という．形式的には $\lambda_1 = E[\xi]$ である．さらに，λ_1 が λ に関して絶対連続ならば，その Radon-Nikodym 密度

$$\rho_1(x) := \frac{d\lambda_1}{d\lambda}(x)$$

を (λ に関する) 一点相関関数という．定義より，$\rho_1(x)$ は点 x における平均密度をあらわす．また，ξ から R^n 上のラドン測度 ξ_n を

$$\xi_n = \sum_{\substack{x_1,\dots,x_n \in \xi \\ \text{distinct}}} \delta_{x_1,\dots,x_n}.$$

と定義するとき，任意の $\varphi \in C_c(R^n)$ に対して，

$$\begin{aligned} E[\langle \xi_n, \varphi\rangle] &= E[\int_{R^n} \varphi(x_1,\dots,x_n)\xi_n(dx_1\dots dx_n)] \\ &= \int_{R^n} \varphi(x_1,\dots,x_n)\lambda_n(dx_1\dots dx_n) \end{aligned}$$

をみたすラドン測度 $\lambda_n(dx)$ を n 点相関測度という．λ_n が $\lambda^{\otimes n}$ に関して絶対連続のとき，その Radon-Nikodym 密度

$$\rho_n(x_1,\dots,x_n) := \frac{d\lambda_n}{d\lambda^{\otimes n}}(x_1,\dots,x_n)$$

を ($\lambda^{\otimes n}$ に関する) n 点相関関数という．

例 5. ポアソン点過程のときは，一点相関測度が λ_1 が λ に関して絶対連続ならば，

$$\rho_n(x_1,\dots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} \rho_1(x_i)$$

となる．

例 6. (K,λ) に付随する DPP のときは，

$$\rho_n(x_1,\dots,x_n) = \det(K(x_i,x_j))_{i,j=1}^n$$

となる．

$$\rho_n(x_1,\dots,x_n) \le \prod_{i=1}^{n} \rho_1(x_i)$$

となり，負の相関をもつ．

2.4 GAF の性質

定理 2.5 (Edelman-Kostlan). $X(z)$ を D 上の GAF で共分散行列が $S(z,w)$ とする．このとき，$X(z)$ の零点過程の一点相関関数 (零点の密度) は

$$\rho_1(z) = \frac{1}{\pi}\partial_z \partial_{\bar{z}} \log S(z,z)$$

で与えられる．

注意 1. $S(z,z)=0$ のときは，X はランダムでない零点 z をもつ．つまり，一点相関測度は z でアトムをもつから，$\rho_1(z)$ は z で存在しない．

例 7. hyperbolic GAF $X_L^{hyp}(z)$ の共分散関数は $S_L^{hyp}(z,w)=(1-z\overline{w})^{-L}$ であるので，零点の一点相関関数は定理 2.5 より

$$\rho_1(z)=\frac{L}{\pi}(1-z\overline{z})^{-2}.$$

で与えられる．零点は境界 $|z|=1$ に集積している．特に境界は自然境界となる．

定理 2.6 (Calabi's rigidity)**.** X と Y は D 上の GAF とする．零点過程 ξ_X と ξ_Y の一点相関関数が一致するとき，零点をもたない (ランダムでない) 正則関数 h で $Y\overset{d}{=}hX$ となるものが存在する．特に，$\xi_X\overset{d}{=}\xi_Y$ である．

定理 2.7. $X(z)$ は D 上の GAF で共分散関数が $S(z,w)$ であるとする．このとき，零点過程の n 点相関関数は，異なる $z_1,z_2,\dots,z_n$ が $\det(S(z_i,z_j))_{i,j=1}^n>0$ となるとき，

$$\begin{aligned}&\rho_n(z_1,z_2,\dots,z_n)\\&=\frac{E[|X'(z_1)\cdots X'(z_n)|^2|X(z_1)=\cdots=X(z_n)=0]}{\det(\pi(S(z_i,z_j))_{i,j=1}^n)}\end{aligned}$$

によって与えられる．

一点相関関数の場合の証明のラフなアイデアは以下の通りである．

$X:D\to\mathbf{C}$ が $1:1$ だとすると変数変換公式

$$\int_{X(D)}g(w)m(dw)=\int_D g(X(z))|X'(z)|^2m(dz)$$

に注意する．一般の X に対しては形式的に

$$\begin{aligned}&\int_D\varphi(z)\delta_0(X(z))|X'(z)|^2m(dz)\\&=\sum_i\int_{X(D)}\varphi(X_i^{-1}(w))\delta_0(w)m(dw)\\&=\langle\xi_X,\varphi\rangle.\end{aligned}$$

ここで，$X_i^{-1}(w)$ は X の逆写像の分枝．よって，

$$E[\langle\xi_X,\varphi\rangle]=\int_D\varphi(z)E[|X'(z)|^2\delta_0(X(z))]m(dz)$$

であるから，

$$\rho_1(z)=E[|X'(z)|^2\delta_0(X(z))]$$

2.5 正則関数と零点の収束

$f\in\mathcal{H}(D)$ に対して $\xi_f=\sum_i\delta_{z_i}$ を f の零点 $z_1,\dots$ を多重度分だけ書いたものとする．f の零点は離散であるから，ξ_f は $Q(D)$ の元を定める．

補題 2.8. f_n が $f\not\equiv 0$ に局所一様収束するならば，ξ_{f_n} は ξ_f に漠収束する．

命題 2.9. RAF X_n が $X(\not\equiv 0\ a.s.)$ に分布収束するならば，ξ_{X_n} は ξ_X に分布収束する．

証明は，以下の Skorohod の表現定理と Hurwitz の定理とその系をあわせて得られる．

定理 2.10 (Skorohod)**.** μ_n,μ は完備可分距離空間上の確率測度で，μ_n は μ に弱収束しているとする．このとき，ある確率空間上に X_n,X を μ_n は X_n の分布，μ は X の分布，$X_n\to X$ $a.s.$ となるように定義できる．

定理 2.11 (Hurwitz)**.** f_n は $f(\not\equiv 0)$ に局所一様収束して，$B(a,R)\subset D$ は D 内に含まれる a の R-近傍で，$\xi_f(\partial B(a,R))=0$ であるとする．このとき，ある $n_0\in\mathbf{N}$ が存在して，$\forall n\ge n_0$ に対して

$$\xi_{f_n}(B(a,R))=\xi_f(B(a,R)).$$

補題 2.8 は Hurwitz の定理の言い換えである．

2.6 関数型中心極限定理

定理 2.12. $\{\zeta_k\}_k$ は平均 0，分散 1 の i.i.d. 複素確率変数列，$\psi_k^{(n)}(z)$ は独立な RAF 列で $\{\zeta_k\}_k$ と独立とする．さらに，各 $z\in D$ に対して $\sum_k E[|\psi_k^{(n)}(z)|^2]<\infty$ と仮定する．RAF の列

$$X_n(z)=\sum_k\zeta_k\psi_k^{(n)}(z),\quad z\in D$$

を考える．以下を仮定する．
(A1) 共分散関数 $S_n(z,w)\sum_k E[\psi_k^{(n)}(z)\overline{\psi_k^{(n)}(w)}]$ は $S(z,w)$ に各点収束する．
(A2) $\sup_n S_n(z,z)$ は局所可積分．
(A3) ある $\delta>0$ が存在して，任意の $z\in D$ に対して $\lim_{n\to\infty}\sum_k E[|\psi_k^{(n)}(z)|^{2+\delta}]=0$
このとき，RAF 列 $\{X_n\}$ は共分散関数 $S(z,w)$ の GAF X に分布収束する．特に，$S(z,z)\equiv 0$ でなければ，零点過程 $\{\xi_{X_n}\}$ は X の零点過程 ξ_X に分布収束する．

例 8. $\mathbb{D}$ 上の Szegö 核 $S_{\mathbb{D}}(z,w)=(1-z\overline{w})^{-1}$ に対して，

$$X_n(z)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\zeta_k S_{\mathbb{D}}(z,e^{i\theta_k})=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\zeta_k}{1-ze^{-i\theta_k}}$$

を定義する．ただし，$\{\zeta_k\}_{k=0}^{\infty}$ は平均 0，分散 1 の i.i.d. 確率変数列とする．さらに，$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\delta_{\theta_k}$ は一様分布に弱収束しているとする．例えば，(i) $\theta_k=\frac{2\pi k}{n}, k=0,1,\ldots,n-1$ や (ii) $\{\theta_k\}\sim U([0,2\pi])$ は i.i.d. このとき，$S^{X_n}(z,w)$ は $S_{\mathbb{D}}(z,w)$ に各点収束して，さらに

$$\sum_{k=0}^{n-1}E\Big[|\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{1-ze^{-i\theta_k}}|^{2+\delta}\Big]\le n^{-\delta/2}\left(\frac{1}{1-|z|}\right)^{2+\delta}\to 0.$$

このとき，$\{X_n\}$ は hyperbolic GAF $X_1^{hyp}(z)$ に分布収束して，対応する零点過程 $\{\xi_{X_n}\}$ は Bergman 核 $K_{\mathbb{D}}(z,w)=\frac{1}{\pi(1-z\overline{w})^2}$ に付随する DPP に収束する．

例 9. $\mathbb{H}$ 上の RAF

$$X(z)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\zeta_k S_{\mathbb{H}}(z,k)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\frac{\zeta_k}{k-z}$$

を考える．ただし，

$$S_{\mathbb{H}}(z,w)=\frac{1}{2\pi i(\overline{w}-z)}$$

は $\mathbb{H}$ に対する Szegö 核である．簡単な計算により

$$\begin{aligned}S^X(z,w)&:=E[X(z)\overline{X(w)}]\\&=S_{\mathbb{H}}(z,w)\frac{\cot\pi\overline{w}-\cot\pi z}{2i}\\&=S_{\mathbb{H}}(z,w)\frac{\sin\pi(z-\overline{w})}{2i\sin\pi z\cdot\sin\pi\overline{w}}.\end{aligned}$$

となることわかる．$\zeta_k\sim N_{\mathbf{C}}(0,1)$ ならば，定理 2.5 より $y=\operatorname{Im}z\to 0$ で

$$\rho_1^X(z)=\frac{1}{4y^2}-\frac{\pi}{\sinh^2 2\pi y}\sim\frac{\pi}{3}-\frac{4\pi^3}{15}y^2+O(y^4)$$

となる．つまり，$X(z)$ は $\mathbf{Z}$ 上に極をもち，その零点過程は実軸に集積しない．

定理 2.12 より，スケールした $X_n(z)=\sqrt{n}X(nz)$ は共分散関数 $S_{\mathbb{H}}(z,w)$ の GAF $X_{\mathbb{H}}(z)$ に収束する．特に，後に示す定理 2.14 より，$X_n(z)$ の零点過程もしくは $X(z)$ の零点過程を $1/n$ に縮小したものは $K_{\mathbb{H}}(z,w)=\frac{-1}{\pi(\overline{w}-z)^2}$ に付随する DPP に収束する．

証明．$S^{X_n}(z,w)=nS^X(nz,nw)$，$nS_{\mathbb{H}}(nz,nw)=S_{\mathbb{H}}(z,w)$ に注意すると

$$\begin{aligned}&|S^{X_n}(z,w)-S_{\mathbb{H}}(z,w)|\\&=|S_{\mathbb{H}}(z,w)|\cdot\left|\frac{\sin\pi n(z-\overline{w})}{2i\sin\pi nz\sin\pi n\overline{w}}-1\right|\\&=|S_{\mathbb{H}}(z,w)|\cdot\left|\frac{e^{2i\pi nz}+e^{-2i\pi n\overline{w}}-2e^{2i\pi n(z-\overline{w})}}{(1-e^{2i\pi nz})(1-e^{-2i\pi n\overline{w}})}\right|\\&\le|S_{\mathbb{H}}(z,w)|\frac{e^{-2\pi na}+e^{-2\pi nb}+2e^{-2\pi n(a+b)}}{(1-e^{-2\pi na})(1-e^{-2\pi nb})},\end{aligned}$$

ただし，$a=\operatorname{Im}z$，$b=\operatorname{Im}w$ である．よって，$S^{X_n}(z,w)$ は $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ 上 $S_{\mathbb{H}}(z,w)$ に局所一様収束する．特に，(A1) と (A2) が成り立つ．また，(A3) については，$\delta>0$

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\left|\sqrt{n}S_{\mathbb{H}}(nz,k)\right|^{2+\delta}&=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\left|\frac{\sqrt{n}}{2\pi(k-nz)}\right|^{2+\delta}\\&=\frac{1}{(2\pi\sqrt{n})^{2+\delta}}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\left|\frac{1}{\frac{k}{n}-z}\right|^{2+\delta}\\&=O(\frac{1}{n^{\delta/2}}).\end{aligned}$$

より結論を得る． □

2.7 複素ウィナー積分と DPP

$\{X(z),z\in D\}$ は共分散関数 $S(z,w)$ をもつ中心化された GAF とする．S から定まる再生核ヒルベルト空間を H_S とする．$S(\alpha,\alpha)>0$ である $\alpha\in D$ に対して，$X(\alpha)=0$ という条件付きの下での $\{X(z),z\in D\}$ の共分散の

$$S^{\alpha}(z,w)=S(z,w)-\frac{S(z,\alpha)S(\alpha,w)}{S(\alpha,\alpha)}$$

となり，その再生核ヒルベルト空間 H_{S^α} は $f(\alpha)=0$ となる関数のなす H_S の部分空間である．$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in D$ に対して，帰納的に $S^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ を

$$S^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(z,w):=(S^{\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}}(z,w))^{\alpha_n}$$

と定義する．ただし，$\det(S(\alpha_j,\alpha_k))_{j,k=1}^n>0$ とする．この定義は $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ の順序にはよらない．このとき，$X(\alpha_1)=X(\alpha_2)=\cdots=X(\alpha_n)=0$ のもとでの GAF $\{X(z),z\in D\}$ の共分散は $S^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ になる．一方，$X'(z)$ の共分散は $\partial_z\partial_{\overline{w}}S(z,w)$ である．これらの事実と定理 2.7 より次を得る．

命題 2.13. 共分散関数 $S(z,w)$ の GAF の n 点相関関数は以下の公式で与えられる．

$$\rho_n(z_1,z_2,\ldots,z_n) = \frac{\operatorname{per}(\partial_z\partial_{\overline{w}}S^{z_1,z_2,\ldots,z_n}(z_j,z_k))_{j,k=1}^n}{\det(\pi S(z_j,z_k))_{j,k=1}^n}$$

ここで，$z_1,z_2,\ldots,z_n \in D$ は異なる n 点で，$\det(S(z_j,z_k))_{j,k=1}^n > 0$ とする．また，$\operatorname{per} A$ は $n\times n$ 行列 $A=(a_{jk})_{j,k=1}^n$ のパーマネントで

$$\operatorname{per} A = \sum_{\sigma\in\mathscr{S}_n}\prod_{j=1}^n a_{j\sigma(j)},$$

と定義される．$\mathscr{S}_n$ は n 次対称群.

証明. 共分散行列が A である複素ガウスベクトル $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ に対して，

$$E[|X_1X_2\cdots X_n|^2] = \operatorname{per} A$$

となることに注意すれば，定理 2.7 と上の注意より結果を得る． □

上半平面 $\mathbb{H}$ の Szegö 核

$$S_{\mathbb{H}}(z,w) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\overline{w}-z}.$$

を考える．対応する再生核ヒルベルト空間はハーディー空間 $H^2(\mathbb{H})$ である．Szegö 核は局所一様収束する級数によって

$$S_{\mathbb{H}}(z,w) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n(z)\overline{e_n(w)}$$

と展開できる．ただし，

$$e_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{1-iz}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n, \quad n\geq 0.$$

$\{e_n(z)\}$ は $H^2(\mathbb{H})$ の正規直交基底をなす．GAF をセゲー核の複素ウィナー積分によって

$$\begin{aligned} X_{\mathbb{H}}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{\mathbb{H}}(z,t)dB(t) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t-z}dB(t), \quad z\in\mathbb{H}\end{aligned}$$

と定義する．ここで，$B(t)$ は複素ブラウン運動．これは，$\{e_n(z), n\geq 0\}$ を用いると

$$X_{\mathbb{H}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\xi_n e_n(z),$$

と展開されて，$\xi_n = \int_{\mathbf{R}}\overline{e_n(t)}dB(t)$, $n\geq 0$ は i.i.d. 標準複素ガウス確率変数となる．命題 2.2 より $X_{\mathbb{H}}(z)$ は RAF として定義される．

定理 2.14. GAF $X_{\mathbb{H}}(z)$ の零点過程は，

$$K_{\mathbb{H}}(z,w) = 4\pi S_{\mathbb{H}}(z,w)^2 = \frac{-1}{\pi(\overline{w}-z)^2} \tag{2.1}$$

とルベーグ測度に付随する $\mathbb{H}$ 上の DPP である．

この定理は定理 1.2 の $\mathbb{H}$ 版である．実際，

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{\mathbb{D}}(z,w) &= \frac{1}{2\pi}S_{\mathbb{D}}(z,w) = \frac{1}{2\pi(1-z\overline{w})} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(z)\overline{\varphi_n(w)}\end{aligned}$$

とすると，$\{\varphi_n(z) = \frac{z^n}{\sqrt{2\pi}}\}_{n=0}^{\infty}$ は $H^2(\mathbb{D})$ の正規直交基底となり，

$$\tilde{S}_{\mathbb{D}}(z,w) = \sqrt{T_i(z)\overline{T_i(w)}}S_{\mathbb{H}}(T_i(z),T_i(w)),$$

という関係がある．ここで，$\beta\in\mathbb{H}$ に対して $T_\beta(z) = \frac{z-\beta}{z-\overline{\beta}}$ と定義した．特に $\beta = i(=\sqrt{-1})$ のときは，$T_i(z)$ は $\mathbb{H}$ を $\mathbb{D}$ に写すケーリー変換である．

それでは，以下の形で定理を示そう．

定理 2.15. $v\geq 0$ とする．$X_v(z)$ は共分散関数が

$$\begin{aligned} S_v(z,w) &:= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{i(z-\overline{w})\lambda}e^{-v\lambda}d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{v-i(z-\overline{w})}, \quad z,w\in\mathbb{H}\end{aligned}$$

の GAF とする．GAF $X_v(z)$ の零点過程は

$$K_v(z,w) = 4\pi S_v(z,w)^2 = \frac{1}{\pi(v-i(z-\overline{w}))^2}$$

に付随する $\mathbb{H}$ 上の DPP である．

$S_v(z,w) = S_{\mathbb{H}}(z+iv/2, w+iv/2)$ という関係に注意すると，$S_v(z,w)$ は平行移動 $X_{\mathbb{H}}(\cdot+iv/2)$ の共分散関数であることがわかる．$X_v(z)$ の零点過程は，$X_{\mathbb{H}}(z)$ の $\operatorname{Im} z > v/2$ における零点過程と等しいことがわかる．定理 2.14 を認めると，DPP のある領域への制限がまた DPP になることから，定理 2.15 はしたがう．ここでは，[8] の証明の方針で定理 2.15 を示しておく．

補題 2.16. $z_1,z_2,\ldots,z_n,z,w\in\mathbb{H}$ に対して，

$$S_v^{z_1,\ldots,z_n}(z,w) = S_v(z,w)\gamma_n(z)\overline{\gamma_n(w)}$$

となる．ただし，$\gamma_n(z) = \prod_{k=1}^n h_{z_k}(z)$ かつ $h_a(z) = 2\pi(z-a)S_v(z,a)$ $(a\in\mathbb{H})$ である．

証明. 以下のことに注意すればよい.
(1) $S_v^a(z,w) = S_v(z,w)h_a(z)\overline{h_a(w)}$ $\forall a \in \mathbb{H}$
(2) ある Q と g に対して $L(z,w) = Q(z,w)g(z)\overline{g(w)}$ ならば, $L^a(z,w) = Q^a(z,w)g(z)\overline{g(w)}$. □

ここで, Cauchy's determinant identity と Borchardt's identity を思いだしておく. 証明は, 例えば [2] を参照のこと.

命題 2.17. $p_j, q_j, j = 1,2,\ldots,n$ は複素数で, すべての j,k について $p_j \neq q_k$ とする.

$$\det\left(\frac{1}{p_j - q_k}\right)_{j,k=1}^{n} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{\prod_{1\le j<k\le n}(p_j - p_k)(q_j - q_k)}{\prod_{1\le j,k\le n}(p_j - q_k)}$$

$$\det\left(\frac{1}{(p_j - q_k)^2}\right)_{j,k=1}^{n} = \mathrm{per}\left(\frac{1}{p_j - q_k}\right)_{j,k=1}^{n} \det\left(\frac{1}{p_j - q_k}\right)_{j,k=1}^{n}$$

定理 *2.15* の証明. $h_a(a) = 0$, $h'_a(a) = 2\pi S_v(a,a)$, $S_v(z,w) = S_0(z+iv/2, w+iv/2)$ となることに注意すると, Cauchy's determinant identity より,

$$\prod_{j=1}^{n} |\gamma'_n(z_j)|^2 = \{\det(2\pi S_v(z_j,z_k))_{j,k=1}^{n}\}^2.$$

また, $\gamma_n(z_j) = 0$ $\forall j = 1,2\ldots,n$ であるから

$$\partial_z \partial_{\overline{w}} S_v^{z_1,\ldots,z_n}(z_j,z_k) = S_v(z_j,z_k)\gamma'_n(z_j)\overline{\gamma'_n(z_k)}$$

よって, Borchardt's identity より

$$\mathrm{per}(\partial_z \partial_{\overline{w}} S_v^{z_1,\ldots,z_n}(z_j,z_k)) = \mathrm{per}(S_v(z_j,z_k))_{j,k=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} |\gamma'_n(z_j)|^2 = \det(K_v(z_j,z_k))_{j,k=1}^{n} \det(\pi S_v(z_j,z_k))_{j,k=1}^{n}$$

命題 2.13 より

$$\rho_n(z_1,z_2,\ldots,z_n) = \det(K_v(z_j,z_k))_{j,k=1}^{n}$$

を得る. □

参考文献

[1] A. Edelman and E. Kostlan, How many zeros of a random polynomial are real?', Bull. Amer. Math. Soc. **32** (1995), 1–37.

[2] J. B. Hough, M. Krishnapur, Y. Peres and B. Virág, Zeros of Gaussian Analytic Functions and Determinantal Point Processes, University Lecture Series, 51. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.

[3] K. Itô and M. Nisio, On the convergence of sums of independent Banach space valued random variables, Osaka J. Math. **5** (1968), 35–48.

[4] M. Kac, On the average number of real roots of a random algebraic equation, Bull. Amer. Math. Soc. **49** (1943), 314–320.

[5] J. P. Kahane, Some random series of functions, Heath, Lexington, 1968.

[6] M. Krishnapur, From random matrices to random analytic functions, Ann. Probab. **37** (2009), 314–346.

[7] A. Ledoan, and M. Merkli and S. Starr, *A Note on Universality of Gaussian Analytic Functions on Symmetric Spaces*, arXiv:1003.1951v1.

[8] Y. Peres and B. Virág, *Zeros of the i.i.d. Gaussian power series: a conformally invariant determinantal process*, Acta Math. **194** (2005), 1–35.

[9] S. O. Rice, Mathematical theory of random noise, Bell. System Tech. J. **25** (1945), 46–156.

[10] T. Shirai, *Limit theorems for random analytic functions and their zeros*, preprint.

[11] T. Shirai and Y. Takahashi, *Random point fields associated with certain Fredholm determinants I: Fermion, Poisson and Boson processes*, J. Funct. Anal. **205** (2003), 414–463.

[12] M. Sodin, *Zeros of Gaussian analytic functions*, Math. Res. Lett. **7** (2000), 371–381.

[13] M. Sodin, *Zeros of Gaussian analytic functions*, European Congress of Mathematics, 445–458, Eur. Math. Soc., Zürich, 2005.

[14] A. Soshnikov, *Determinantal random point fields*, Russian Math. Surveys **55** (2000), 923–975.