α-行列式とその周辺の話題

白井朋之 (九大 IMI) *

n 次正方行列 $A=(a_{ij})_{i,j=1}^n$ に対して，α-行列式 ($\alpha \in \mathbb{R}$) は

$$\det_\alpha A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \alpha^{d(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$$

と定義される．ここで，$d(\sigma)$ は置換 σ を互換の積で表すために必要な最小の互換の個数である．特に，$\alpha=-1$ の場合は行列式，$\alpha=1$ の場合はパーマネント，$\alpha=0$ の場合は行列の対角線の積に等しい．非負定値行列 $A \succeq O$ に対して，不等式

$$\operatorname{per} A \geq \prod_{i=1}^n a_{ii} \geq \det A \geq 0$$

が知られており (Lieb の不等式, Fischer-Hadamard の不等式)，特に $A \succeq O$ ならば $\alpha = \pm 1, 0$ の場合，任意の $A \succeq O$ に対して $\det_\alpha A \geq 0$ である．[1] において，集合

$$Pos(\mathbb{R}) = \{\alpha \in \mathbb{R} \;;\; \det_\alpha A \geq 0 \text{ for every real symmetric } A \succeq O\ \}$$

について考察したが (エルミート行列に対しても同様に $Pos(\mathbb{C})$ が定義される)，$\det_\alpha A$ の正値性の問題はある確率場の存在 (存在する場合は α-行列式点過程と呼ぶ) と関係があり，

$$Pos(\mathbb{R}) \supset \{-\frac{1}{n} \;;\; n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \cup \{\frac{2}{n} \;;\; n \in \mathbb{N}\}$$

を示した．本講演では，この問題の確率論からの動機と関連結果を概観する．

キーワード：α-行列式の定義と性質，α-行列式の正値性，点過程の相関関数としての α-行列式，Wishart 行列と α-行列式，マルコフ過程のグリーン核に付随する α-行列式点過程のループ測度による表現.

参考文献

[1] Y. Takahashi and T. Shirai, Random point fields associted with certain Fredholm determinants (I): fermion, Poisson and boson point processes, J. Funct. Anal. **205** (2003), 414–463.

[2] T. Shirai, Remarks on the positivity of α-determinants, Kyushu J. Math. **61** (2007), 169–189.

[3] T. Osogami, T. Shirai and H. Waki, Remarks on positivity of α-determinants via SDP relaxation, J. Math-for-Industry **5** (2013A-1), 1–10.

*研究集会「第 9 回代数・解析・幾何学セミナー」@鹿児島大学, Feb. 17-20, 2014