等高線のトポロジー

２００４年８月１０日

佐伯 修（九州大学大学院数理学研究院）

ホームページ：http://www.math.kyushu-u.ac.jp/~saeki/index-j.html

要約. 地図で大活躍の等高線．平面という平らなものの上に描いてあるのに，山や谷といった凸凹がどこにあるかがよくわかりますね．本講演では，そうした等高線の形が，球面やメビウスの帯などの曲面や，ひいては高度に数学的な幾何学的対象の認識にも役立つことを，最近の研究成果なども交えながら解説してゆきます．なお,「トポロジー」というのは「位相幾何学」とも言われ，図形をゴムのようなものでできていると考えて，グニャグニャと連続的に変形できるものは同じと思う，というとても柔らかい幾何学のことです.

目 次

1 等高線とは？

まず，等高線とはどのようなものだったか復習しましょう．そしてそれが，数学的にどのように定式化されるのかについて考えてゆきます.

1.1　地形図

地形図を見てみますと，土地の起伏などを表現するために等高線が描いてありますね．これを注意深く眺めていますと（慣れてくれば）その地形の様子がだんだんわかってきます.

図 1: 地形図と実際の地形

等高線から読み取れることはいろいろありますが，たとえば次のようなものがあります.

(1) 山，谷，峠の位置.

(2) 坂での傾斜の方向.

(3) 地図上の各地点の標高（海抜）.
　……

(1), (2) は地形の様子を知るには大切なことですね．(3) は違った意味で重要です．というのは，(3) の情報がわかれば，逆に等高線が引けるからです.

では，等高線というのは数学的にはどのように理解（あるいは定式化）すれば良いのでしょうか？

1.2　関数の概念

地図上の各地点での標高がわかったとしましょう．これにより，地図上の各地点に，標高という数値を対応させることができます.

$$\text{地図上の各地点} \mapsto \text{標高（数値）}$$

(「$\mapsto$」という数学記号は，左にあるものに，右にあるものを対応させる，ということを表します.)

このように，各点に対して数値を対応させる規則のことを，数学では**関数**と言います.

では等高線はどのように引いたら良いでしょうか? **等高線**というのは，その字が表しているように，高さが等しい点をすべて集めてできる線です．言い換えれば,

等高線とは,（各地点に標高を対応させる）関数に対し，その値が一定の値になるような点を集めてできる線のこと

ということになります.

このように概念を一般化しておくと，関数としては，何も各地点に対してその標高を対応させる関数を考えなくても良いことに気づきます．たとえば，各地点に（ある時刻での）気温を対応させる関数を考えれば，等高線はいわゆる**等温線**になりますね．各地点に気圧を対応させれば**等圧線**になります．テレビなどでお馴染みの気圧配置図では等圧線が活躍しています.

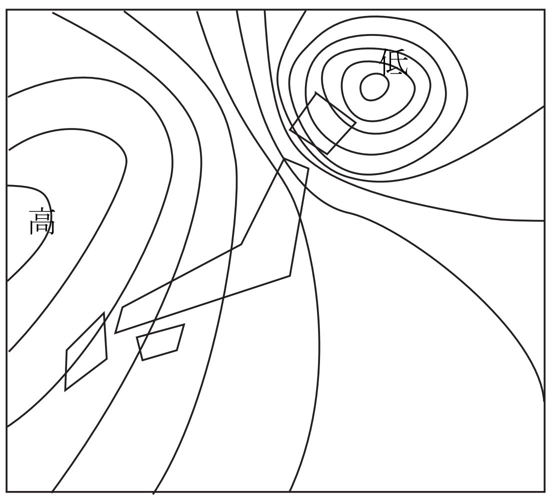

図 2: 気圧配置図

以下，本講演では，何かしらの関数が与えられたとき，その値が一定の値になる点を集めてできる線のことを**等高線**と呼ぶことにします．したがって，これから取り扱う関数は必ずしも標高を表す関数ではないかも知れません．言い換えれば，以下の話はどのような関数に対しても適用できる，というわけです.

1.3 等高線の例

では具体的な関数に対して，等高線を引いてみましょう.

以下，平面上の点を x **座標**と y **座標**という二つの数値で表すことにします．もう少し詳しく言うと，**原点**と呼ばれる，基準となる点 $\mathbf{0}$ があり，そこから右に x だけ，上に y だけ進んで到着する点のことを (x, y) で表します.（x が負の数のときは，右ではなく左に $|x|$ だけ，y が負の数のときは，上ではなく下に $|y|$ だけ進んだ点を考えます.）点 (x, y) に対し，x をその点の x 座標，y を y 座標と言います.

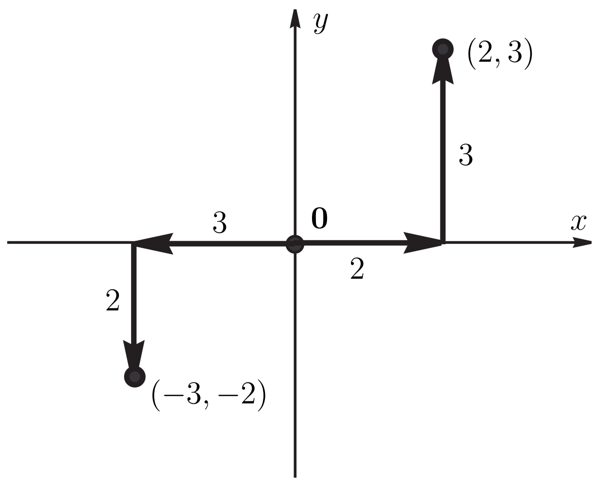

図 3: 平面上の点を座標で表す

以下，座標を使って (x, y) と表される点に対して値 $f(x, y)$ を対応させる関数

$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

を，いくつか具体的に考えてみましょう.

まず，点 (x, y) に対して，その y 座標を対応させる関数 $f(x, y) = y$ を考えてみます.

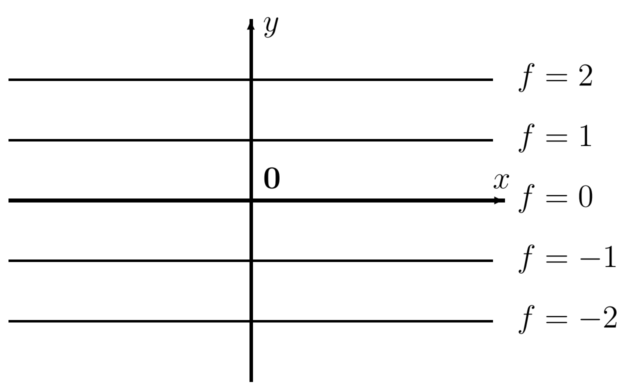

図 4: 関数 $f(x, y) = y$ の等高線

実際の地形に相当する形を描いてみると次のようになります．(y 軸の方向に登ってゆくような坂道になります．）このように，平面上の点 (x, y) に対して，そこでの値 $f(x, y)$ を縦方向（平面からの高さ）に取ってできる図を，関数の**グラフ**と言います．

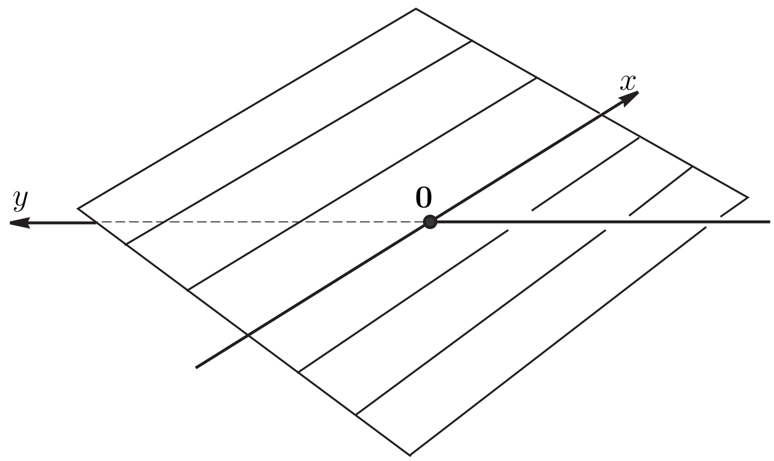

図 5: 関数 $f(x, y) = y$ のグラフ

次に，原点からの距離の二乗を表す関数 $f(x, y) = x^2 + y^2$ を考えてみましょう．

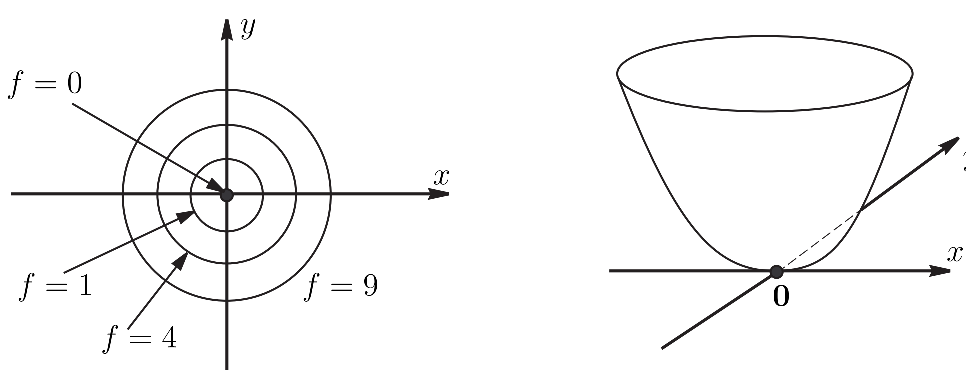

図 6: 関数 $f(x, y) = x^2 + y^2$ の等高線とグラフ

これはちょうど放物線を回転させたような面になっていることがわかりますね．原点のところが谷のようにくぼんでいることがわかっていただけると思います．言い換えれば，原点で関数の値が**最小値**を取る，というわけです．

$f(x, y) = x^2 + y^2$ のグラフを上下ひっくり返したようなグラフを持つ関数は，次のようになります．これは先の図 6 の関数の符号を変えたものに他なりません．これは原点で**最大値**を取りますね．そこが山の頂上というわけです．

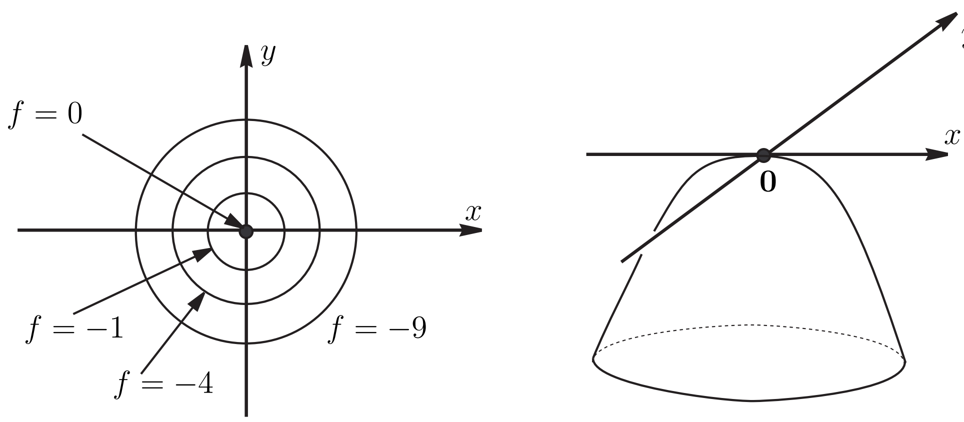

図 7: 関数 $f(x,y)=-x^2-y^2$ の等高線とグラフ

ではプラスの符号とマイナスの符号を混ぜてみたらどうなるでしょう？ このときの関数の等高線とグラフは次のようになります.

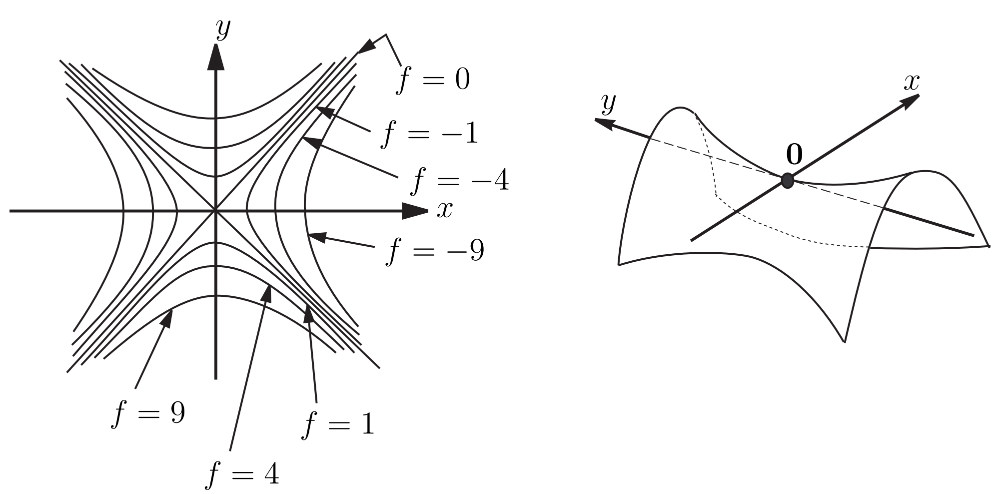

図 8: 関数 $f(x,y)=-x^2+y^2$ の等高線とグラフ

1.4　等高線の集まり方

ここでは地図上の各地点のまわりで，等高線がどのように集まっているか，ちょっと調べてみましょう．つまり，地図上の点を一つ選んできたときに，その地点のまわり（近く）で，等高線がどのようになっているか，その様子を観察してみます.

まず，その点で地面が傾いているときはどうなっているでしょうか？ 地面が傾いていますので，等高線はほとんどまっすぐに近い線が，ほぼ平行にたばになって

走っていることがわかると思います.（正確には等高線は曲がってはいますが，その点のほんの近くだけを見ればほぼまっすぐに見えるのです.）

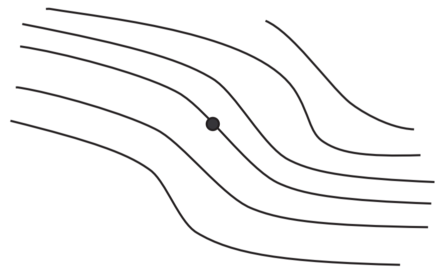

図 9: 地面が傾いている地点のまわりでの等高線の様子

では地面がまったく傾いていなかったらどうなるでしょう？ たとえば本当に水平な平面であったとしたら，等高線など引けませんね．でも現実的には完璧に水平な地面はありません（建物を建てた経験のある方は良くご存知だと思います）．したがって，その部分はちょっとした山や谷，あるいは峠になっています.

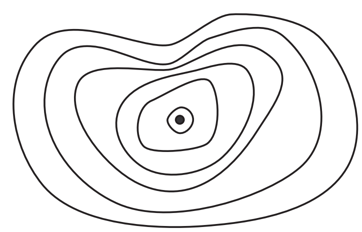

図 10: 山・谷のまわりでの等高線の様子

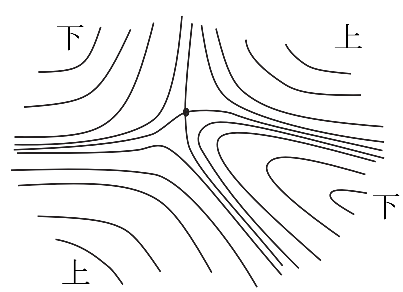

図 11: 峠のまわりでの等高線の様子

こうして見ると，地面が水平になっている地点（そのような点のことを数学では**臨界点**と言います）が，人間が形を認識する上で，大変重要な働きをしていることがわかりますね.

実は数学では次の定理が知られています.

定理 1.1 (モースの補題) 一般的な関数に対し，臨界点の近くでの関数の様子と等高線の集まり方は次の 3 種のみである.

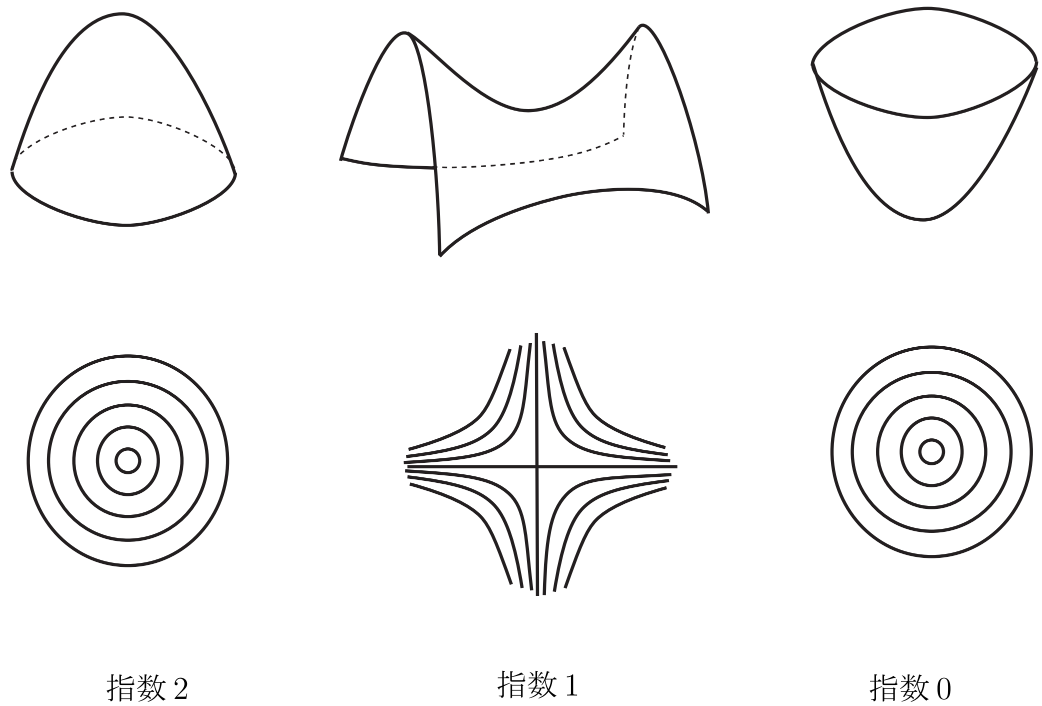

図 12: モースの補題

上の三つを区別するために，上図のように臨界点に**指数**を対応させて考えます.

なお，実際には等高線は上の図のように完全にきれいになることはなく，たとえば山や谷の近くの等高線が完璧な同心円状になることはまずあり得ません（前ページの図 10 を参照して下さい）．実は，上の定理は，図形の連続変形を許すと，等高線が上のようなきれいな形だと思って良い，と主張するものです．言い換えれば,

地図がゴムでできていると思って，グニャグニャと変形すると，等高線は上のようにきれいな形にできる

ということです.（これでは二地点間の距離も変わってしまうし，そんなことをしては地図の意味がない！と思われる方もおいででしょうが，図形の「定性的な性質」はこうした変形では保たれるのです！「定量的」な性質は保たれませんが.）

このように，**トポロジー**（topology，日本語では**位相幾何学**）では，図形をゴムのようなものでできていると思って，連続変形（途中で切ったり貼ったりしない

変形）で移り合うものは同じと考えます.（この意味で同じとき，それらの図形は**同相**であると言って,「≈」という記号で表します．下の図 13 を参照して下さい.）そのような連続変形で変わらない性質を研究する学問なわけです．柔らかい幾何学，と言っても良いと思います.

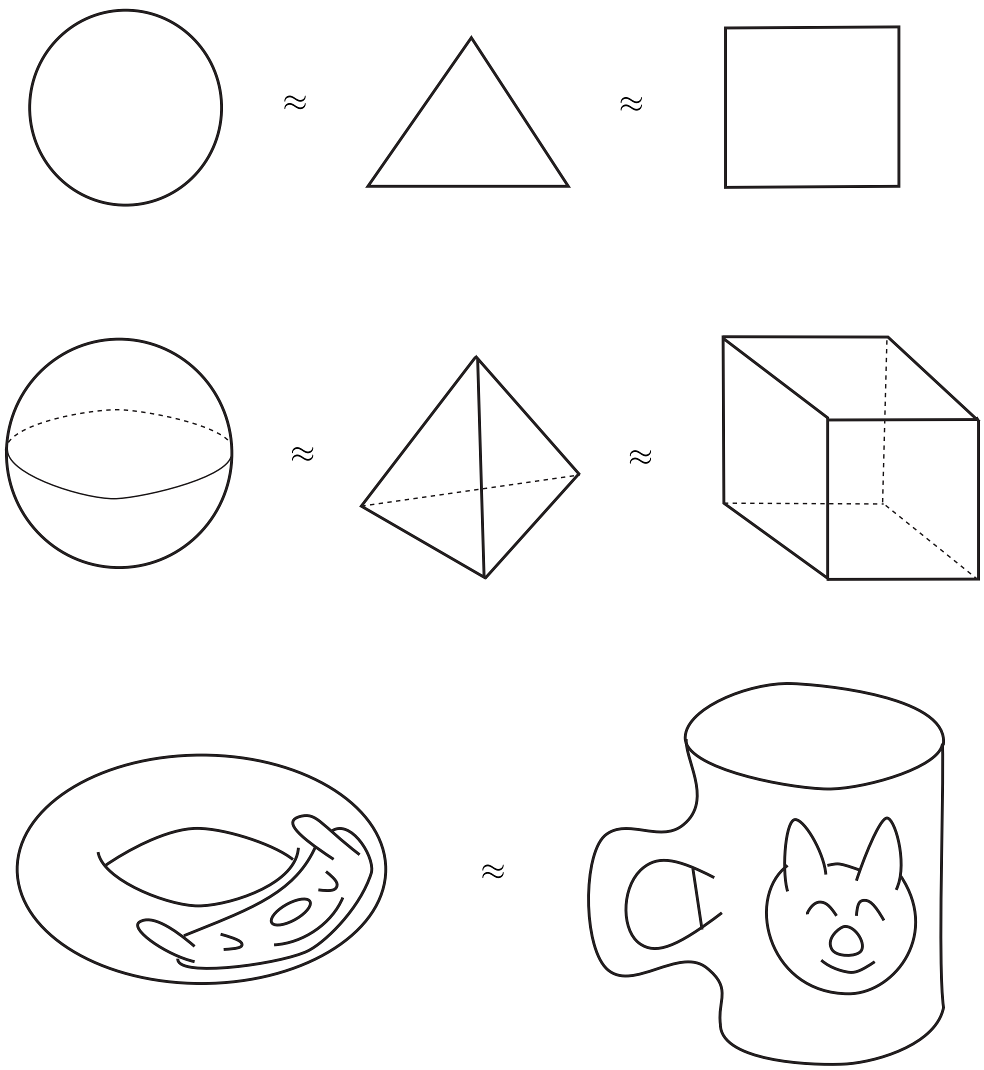

図 13: トポロジーで同じ（同相）となるものの例

2　曲面上の等高線

ここでは地図のような平らなものの上の等高線だけではなく，曲がった面，つまり曲面の上の等高線を考えてみましょう.

2.1 曲面の例

各点のまわりが円板や，半円板と同じものになっている図形のことを**曲面**と言います．たとえば，ボールや地球の表面として現われる**球面**や，ドーナツの表面として現われる**トーラス**などが代表的な例です．表と裏がないことで有名は**メビウスの帯**もその仲間です.

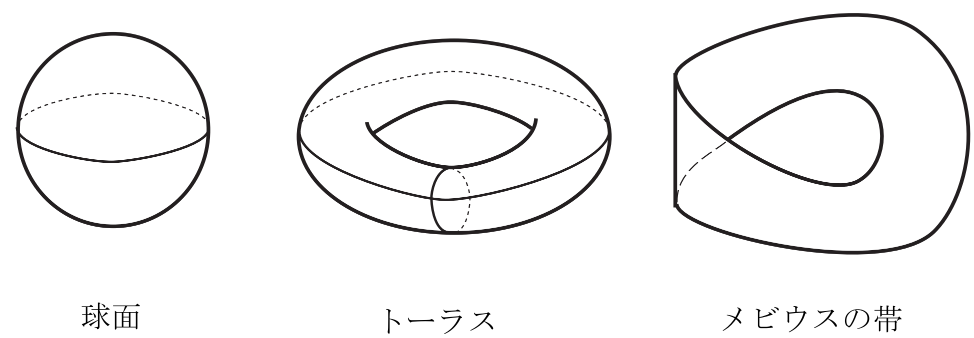

図 14: 曲面の例

なお，メビウスの帯には「ふち」があります．これは，近くが半円板のようになっている点を集めてできる線になっています．これを曲面の**境界**と言います．なお，メビウスの帯は，ちょうど一つの境界円周を持つことに注意しましょう.

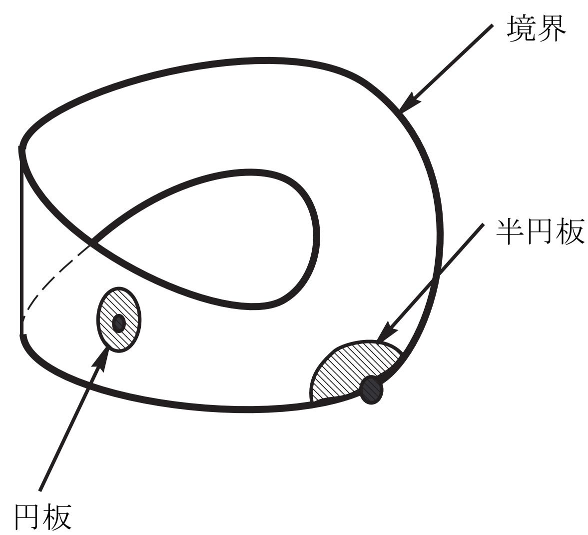

図 15: 曲面の境界

2.2 オイラー数

次の定理を皆さんはご存知でしょうか？

定理 2.1 (オイラーの多面体定理) 多面体に対して次の等式が常に成り立つ.

$$（頂点の数）-（辺の数）+（面の数）= 2.$$

なお，上の式の左辺の値（整数）を多面体の**オイラー数**と言います.

いくつかの多面体で調べてみると，確かにこの等式が成り立つことがわかります．しかし，次の多面体ではどうも成り立ちそうにありません.

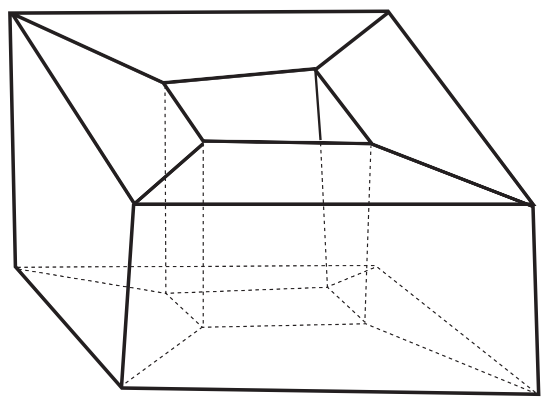

図 16: オイラーの多面体定理が成り立たない例

これはいったいどういうことでしょう？ 実は，オイラーの多面体定理は球面と同相な多面体に対してしか成り立たないのです．言い換えれば，

$$\boxed{\text{球面と同相な多面体のオイラー数は 2 である}}$$

ということになります.

より正確には次の定理が成り立ちます.

定理 2.2 同相な曲面のオイラー数は常に等しい.

したがって，オイラー数の等しくない曲面は同相でない，ということになります．特に，球面とトーラスは同相でないことになります.（これは当たり前のように思われるかも知れませんが，数学的に厳密に証明する，というのは大変なことなのです！）

実はもっと詳しいことが曲面に関してはわかっています.

定理 2.3 二つの曲面が同相であるためには，次の三つが成り立つことが必要十分である.

(1) オイラー数が等しい.

(2) 境界円周の個数が等しい.

(3) メビウスの帯を含むか，含まないかが同じ（表と裏の区別の有無が同じ）.

2.3 曲面と等高線

曲面上に関数が与えられている状況を考えてみましょう.

以下，話を簡単にするために，各境界円周上で一定の値を取る関数のみを考えます．したがって特に，各境界円周は等高線になります.

さて，曲面上に関数が与えられますと，以前と同様に等高線を引くことができます．すると，等高線はほとんどの点のまわりで普通に平行に走っていますが，臨界点のまわりでは図 12 のような集まり方をしています.

実はこの等高線の様子から曲面のオイラー数を求めることができます．今，図 12 にあるように臨界点に指数を対応させます.

定理 2.4 (モースの等式) 曲面のオイラー数は

（指数 0 の臨界点の個数）$-$（指数 1 の臨界点の個数）$+$（指数 2 の臨界点の個数）

に等しい.

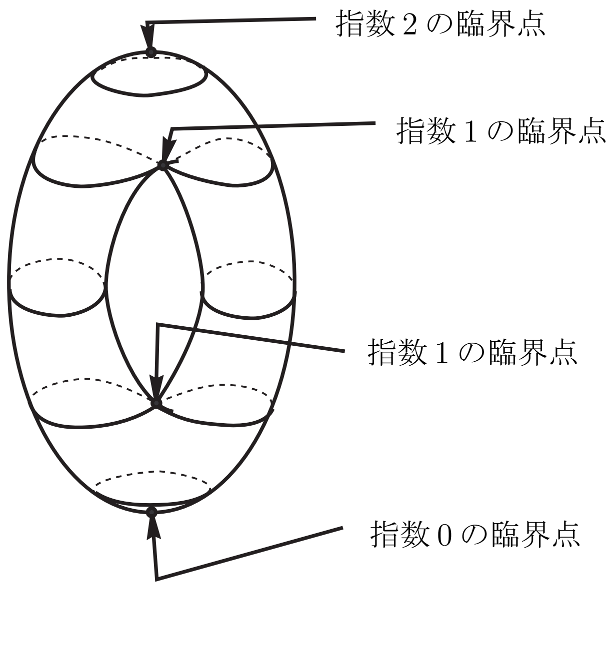

図 17: トーラス上の臨界点

2.4　等高線の形

各点のまわりでの等高線の様子は以前に見ました．では等高線は全体としてはどのような形になっているのでしょうか？

まずある高さを考えます．その高さを持つ点に，臨界点がなければ，対応する等高線は，どの点の近くでもまっすぐに近い線になっているはずです．しかし，曲面が閉じているとすると，その等高線は無限に延びているわけにはゆかず，必ず戻ってこなければなりません．よってその場合，等高線は円周のような「輪」の形になります.

一方，山や谷の近くでは，高さがそこと同じになる点はその点自身しかありません．ということは等高線は一点のみからなることになります（この場合は「線」という名前にそぐいませんが，まあまあまり気にしないことにしましょう）.

では峠を含む等高線はどうなっているでしょう．峠の点の近くでは×印のようになっていますが，この四つの端点を延ばしてゆくと，以前と同様にどこかに戻ってこなければなりません.（同じ高さに他の峠はないとして考えています.）すると，戻ってくる場所の選び方によって 2 通りの図形が現われることがわかります.

したがって次を得ます.

定理 2.5 曲面上の等高線の形は次のいずれか.

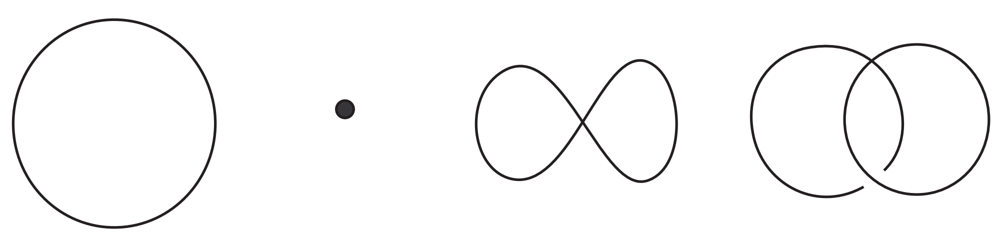

図 18: 等高線の形

なお，上の図で一番右にある等高線があると，そのまわりでは表と裏の区別がつきません．つまり，メビウスの帯のようなものになっていることがわかります.なぜかというと，一つの等高線の隣には，それより高さの高い等高線と，高さの低い等高線の二つがないといけないからです（次のページの図 19 を参照）.

次の問題を考えてみると面白いかも知れません.

問題 2.6 メビウスの帯の上に（境界円周が一つの等高線となるように）具体的に等高線を引きなさい.

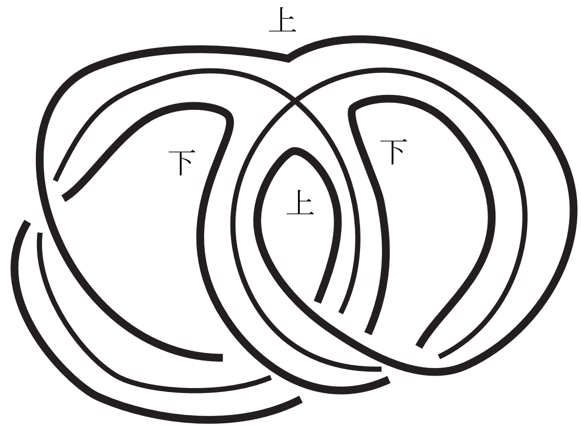

図 19: 変わった等高線

3　曲面，宇宙，多様体

さて，これまで曲面をずっと考えてきました．これは各点のまわりが円板とか半円板のようになっている図形のことでした．ということは，各点の近くには本質的に二つの方向（たとえば東西方向と南北方向）があるということです．数学的に言い換えれば，各点のまわりは二つの**座標**で記述できるということになります．

このように，各点のまわりが二つの座標で記述できるような場合，その図形の**次元**は 2 である，と考えられます．

たとえば，2 次元の世界に住む「2 次元人」がいたとしましょう．この人は曲面の表面のことしかわかりません．ですから，その曲面を外から眺めることはできません．したがって，自分が住んでいる世界が全体としていったいどういう曲面になっているか，わからないように思えます．

本当に全体像を知ることはできないのでしょうか？

実はそれができるのです．たとえば，その曲面上の関数（たとえばある一点からの距離を測る関数など）を考えて，その臨界点を調べればモースの等式（定理 2.4）より，その曲面のオイラー数がわかります．

あとは，定理 2.3 より，その世界に境界はあるか（つまり世界の「はて」はあるか），表と裏の区別がつくか（つまり，右利きだった人が，長い旅の後に左利きになって戻ってくるようなことがあるか）を調べれば，その曲面が何であるかが特定できるのです．

これではなぜこのような理論がすばらしいかわかってもらえないかも知れません．そこで，我々の住んでいる宇宙を考えてみましょう．

我々の住んでいる空間は，縦，横，高さの三つの方向を持っていますので，**3 次元空間**と考えることができます．一般に，各点のまわりが n 個の座標で記述でき

る図形のことを n **次元多様体**と言います．したがって，我々の住んでいる宇宙空間は 3 **次元多様体**である，ということができます．

この宇宙空間はどんな形をしているか，皆さんは考えたことがあるでしょうか?

上で考えた 2 次元人のことは馬鹿にできません．なぜなら我々はこの 3 次元空間の中に住んでいて，その外に出ることは（現時点の人類の知恵と技術では）できません．したがって，その全体像を外から眺めることはできません．

それで大抵の人は，この宇宙はずっと広がっていて，どこかに「はて」のようなものがあるのではないか，と漠然と考えているのではないかと思います．

これは昔，地球が平らであって，遠くの方まで旅をすると断崖絶壁のようになっている，と人々が考えていたのとまったく同じではありませんか．

たとえば，地球を出発して「まっすぐ」にロケットを飛ばすと，ずーっと長い時間の後に，反対方向から帰ってくる，ということが絶対ないと誰が断言できるでしょうか？

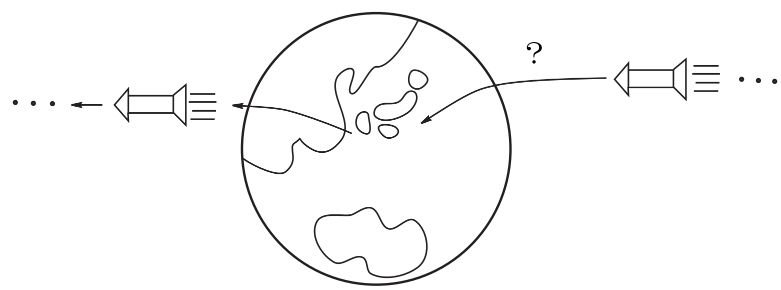

図 20: 宇宙一周旅行？

この我々が住んでいる宇宙空間が全体としていったいどのような 3 次元多様体になっているのか，実は現在盛んに研究が行われています．それには定理 2.3 のような定理が 3 次元多様体に対しても成り立つと有効です．実は現時点ではそうした定理はまだできあがっていません．近い将来にそうした定理を数学者が証明できることが期待されています．

4　n 次元球面

ここでは n 次元多様体のもっとも簡単な例である n 次元球面についての最近の研究成果をお話します．

n 次元球面はなかなかイメージするのが難しいかも知れません．たとえば，3 次元球面とはどのようなものでしょうか？

たとえば次のページの図 21 のように，一点からの距離が等しい点を集めて面を描いてみると，同心球面ができます．この半径を大きくしてゆくと，どんどん球面が大きくなってゆくのですが，3 次元球面ではこれが途中から小さくなって，あ

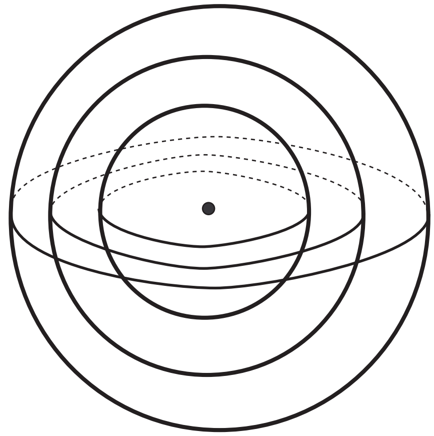

図 21: 3 次元球面内の等距離面

る値になると一点に縮んでしまいます．これは普通の球面で似たようなことを考えればわかっていただけると思います．つまり，普通の球面では，たとえば南極からの距離が一定となる点を集めてできる線は円周のような輪（緯線）になります．少しずつ北に行くと，それは南極に近いところではだんだん大きくなってゆきますが，赤道になったとき半径が最大で，それより北にゆけば半径はどんどん小さくなってゆきます．そして北極で一点に縮んでしまいます．

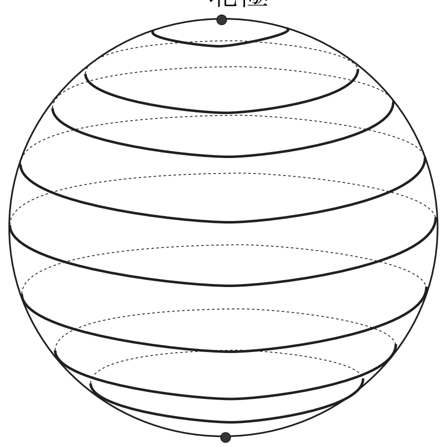

図 22: 球面上の南極からの等距離線

4.1 異種球面

20 世紀中ほどに多様体の研究が始まった頃，次の定理が知られていました．

定理 4.1 (レーブの定理) n 次元多様体の上に，各等高面が点か $n-1$ 次元球面であるような関数があれば，その多様体は n 次元球面に**同相**である.

ところで，多様体の間の関係には次の二つがあります.

（ア）**同相**：図形をゴムでできていると思って，連続的に変形してよい．なめらかさ（微分可能性）は要求しない.

（イ）**微分同相**：なめらかさも要求する.

微分同相ならば同相というのはすぐにわかりますが，その逆は成り立つのでしょうか? 多様体の研究が始まった頃は，きっと成り立つに違いないと数学者は皆思っていたようです.

ところが 1950 年代半ばにミルナーは次の衝撃的な定理を証明しました.

定理 4.2 7 次元球面に同相だが，微分同相とはならない 7 次元多様体がある.

このように，球面とは同相だが微分同相とはならない多様体のことを**異種球面**と言います．ミルナーはこの発見により，フィールズ賞（数学のノーベル賞に相当するもの）を受賞することになります.

レーブの定理が示すように，関数だけを考えていては微分同相かどうか，判定はできません．実際，異種球面の上にもレーブの定理のような関数があるのです.

4.2 関数から写像へ

各点に対して一つの値を対応させるものが関数でした．では一つと言わず，いくつかの（たとえば p 個の）数値を対応させてはどうでしょうか？

$$\text{点} \mapsto (\underbrace{\text{数値}, \text{数値}, \ldots, \text{数値}}_{p\,\text{個}}).$$

この場合，こうしたものは関数とは言わず，**写像**（正確には $\mathbf{R}^p$ への写像）と言います.

たとえば地図で言うと，各地点に，標高だけではなく，気温，気圧等も同時に考えるということです.

私（佐伯）は，関数ではわからないことも写像ではわかるには違いないと考えていました．そして割と最近，次の定理を証明することができました.

定理 4.3 n 次元多様体が n 次元球面と**微分同相**になるためには，$p = 1, 2, \ldots, n-1$ のそれぞれに対して，$\mathbf{R}^p$ への写像で，各等高線（等高面）が点か $n-p$ 次元球面となるものを持つことが必要十分である.

写像を使えば異種球面も区別できる，というわけです.

なお，現在の私の研究課題は，3 次元多様体や 4 次元多様体の構造を，等高線を用いて解明することです.

参考文献

[1] 泉屋周一，佐野貴志，佐伯修，佐久間一浩著『幾何学と特異点』特異点の数理 1，共立出版，2001.

[2] J.R. ウィークス著，三村護・入江晴栄訳『曲面と 3 次元多様体を視る』現代数学社，1996.

[3] 佐伯修『写像を使って 4 次元を見てみよう』数学の楽しみ，1997 年 10 月号，日本評論社.

[4] 佐伯修『微分位相幾何と特異点』数理科学，1998 年 6 月号，サイエンス社.

[5] 松本幸夫著『Morse 理論の基礎』岩波講座，現代数学の基礎 27，1997.