モース関数の特異ファイバーと曲面束の特性類

佐伯修（九大数理）

山本卓宏氏（北大理）
との共同研究

§1. S^1束

$$\begin{array}{l} E \\ \pi \downarrow \\ B \end{array} \quad \text{oriented } S^1\text{-bundle}$$

$B \leftarrow C^\infty$ manifold

Kazarian ('96ころ)

$f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ "generic"

$y \in B$

$$f_y := f|_{\pi^{-1}(y)} : \pi^{-1}(y) \cong S^1 \to \mathbb{R}$$

fは $y \in B$ でパラメータづけられた関数族ともみなせる。

f が generic でも f_y は

Morse fct とは限らない。

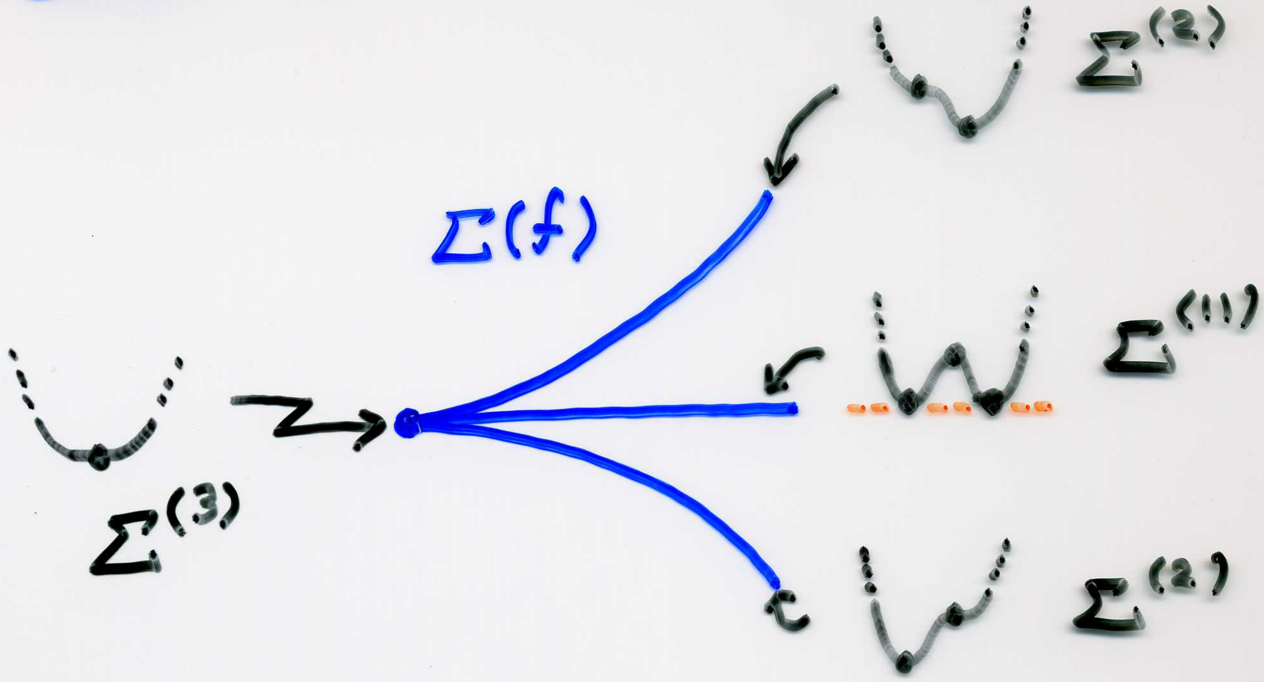
↑

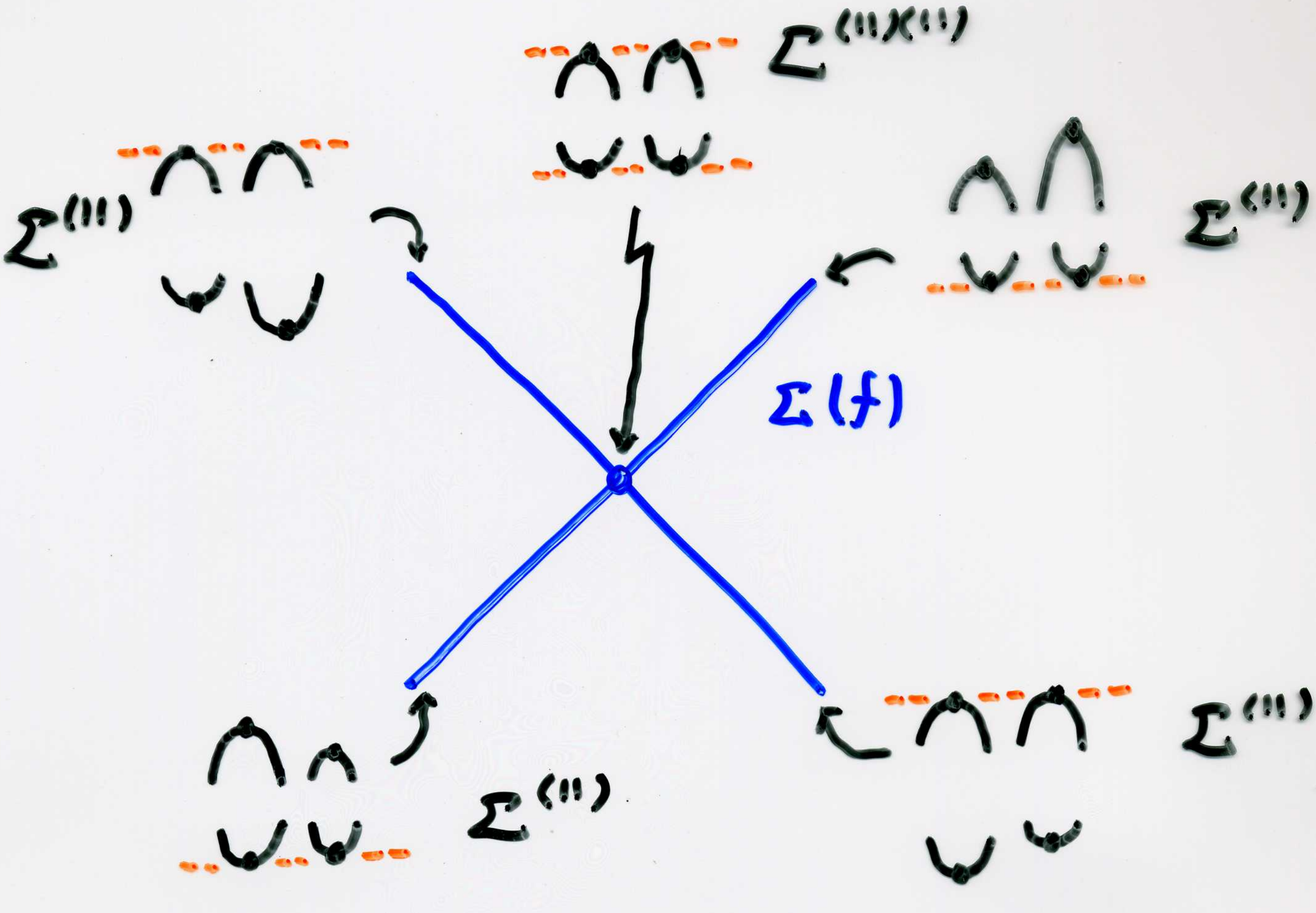
(crit. pts are non-deg. and have distinct values)

$$\Sigma(f) := \{ y \in B \mid f_y \text{ is NOT Morse} \}$$

bifurcation diagram of f

例 (dim B = 2 のとき)


$\Sigma^{(2)}$
$\Sigma(f)$
$\Sigma^{(11)}$
$\Sigma^{(3)}$
$\Sigma^{(2)}$


$\Sigma^{(11)(11)}$
$\Sigma^{(11)}$
$\Sigma^{(11)}$
$\Sigma(f)$
$\Sigma^{(11)}$
$\Sigma^{(11)}$

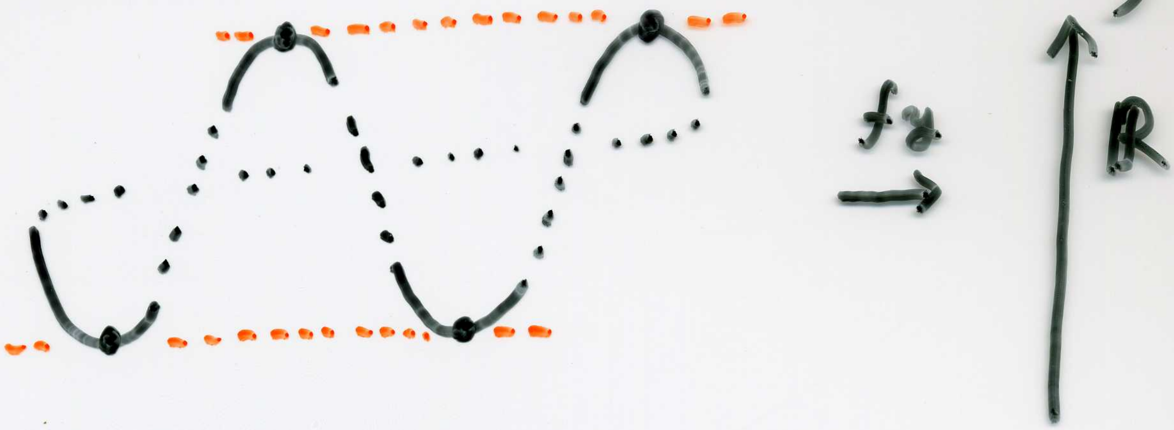
$$\Sigma^{(11)(11)}_{extr} := \{ y \in \Sigma(f) \mid$$

f_y は

最大値を取る点がちょうど2コ,

最小値を取る点もちょうど2コ,

それらは S^1 上互い違い $\}$



$\dim B = 2$, B : oriented

$\Rightarrow$ $\Sigma^{(11)(11)}_{extr}$ の各点に符号 ± 1

が定義できる

Thm (Kazarian)

Closed oriented surface 上の oriented S^1-bundle の Euler number は、$\Sigma^{(11)(11)}_{extr}$ の点の符号の総和に等しい。

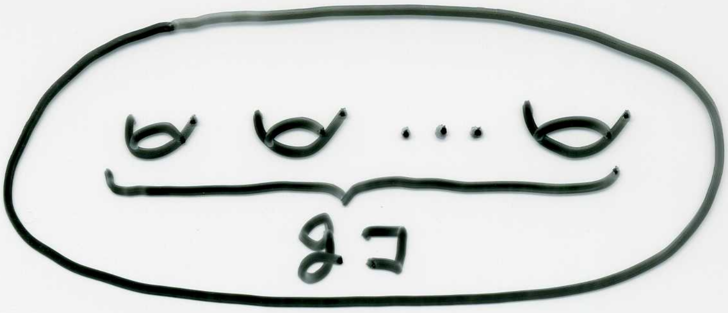
注 $\Sigma^{(11)(11)}_{extr} \subset B$ は f の選び方によるが、その符号の総和は f によらない！

注 (1) B が一般次元の多様体でも同様の主張が成立。

(2) Euler class e に対し、e^n を与える公式（漸化式）もある。

問 曲面束ではどうか？

§2. 曲面束



Σ_g

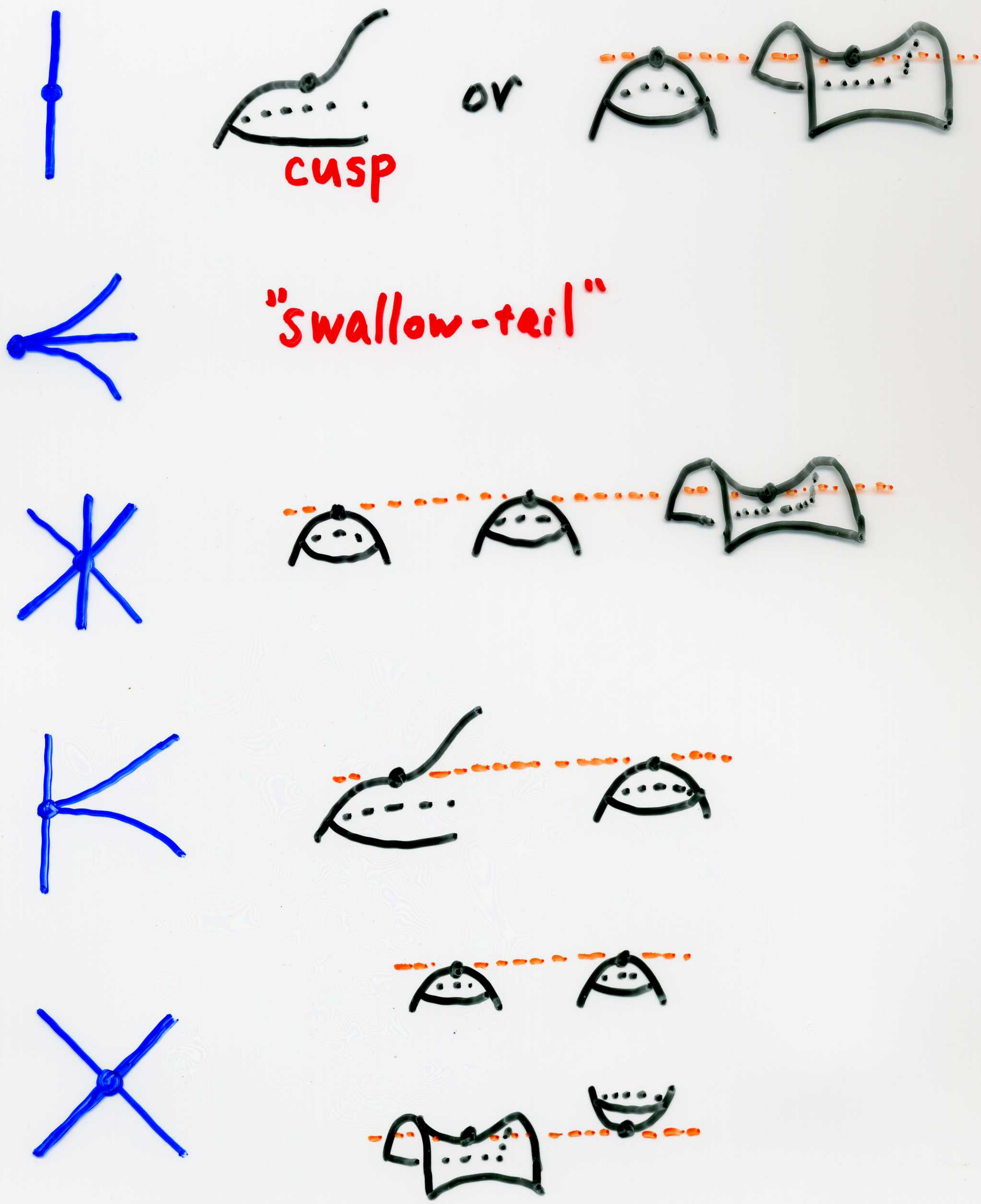
$(g \geq 0)$

$$\begin{array}{ll} E & \text{oriented } \Sigma_g\text{-bundle} \\ \pi \downarrow & \\ B & \leftarrow C^\infty \text{ manifold} \end{array}$$

$$f : E \to \mathbb{R} \quad \text{"generic"}$$

$$\Sigma(f) := \{ y \in B \mid f_y : \pi^{-1}(y) \cong \Sigma_g \to \mathbb{R} \text{ is NOT Morse} \}$$

$\dim B = 2$ のとき、$\Sigma(f)$ の local な形は以下のいずれか。



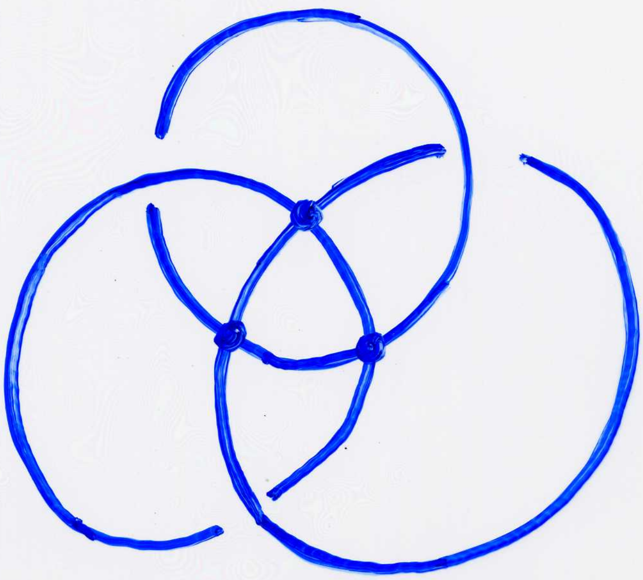
$\Sigma^T := \{ y \in \Sigma(f) \mid$

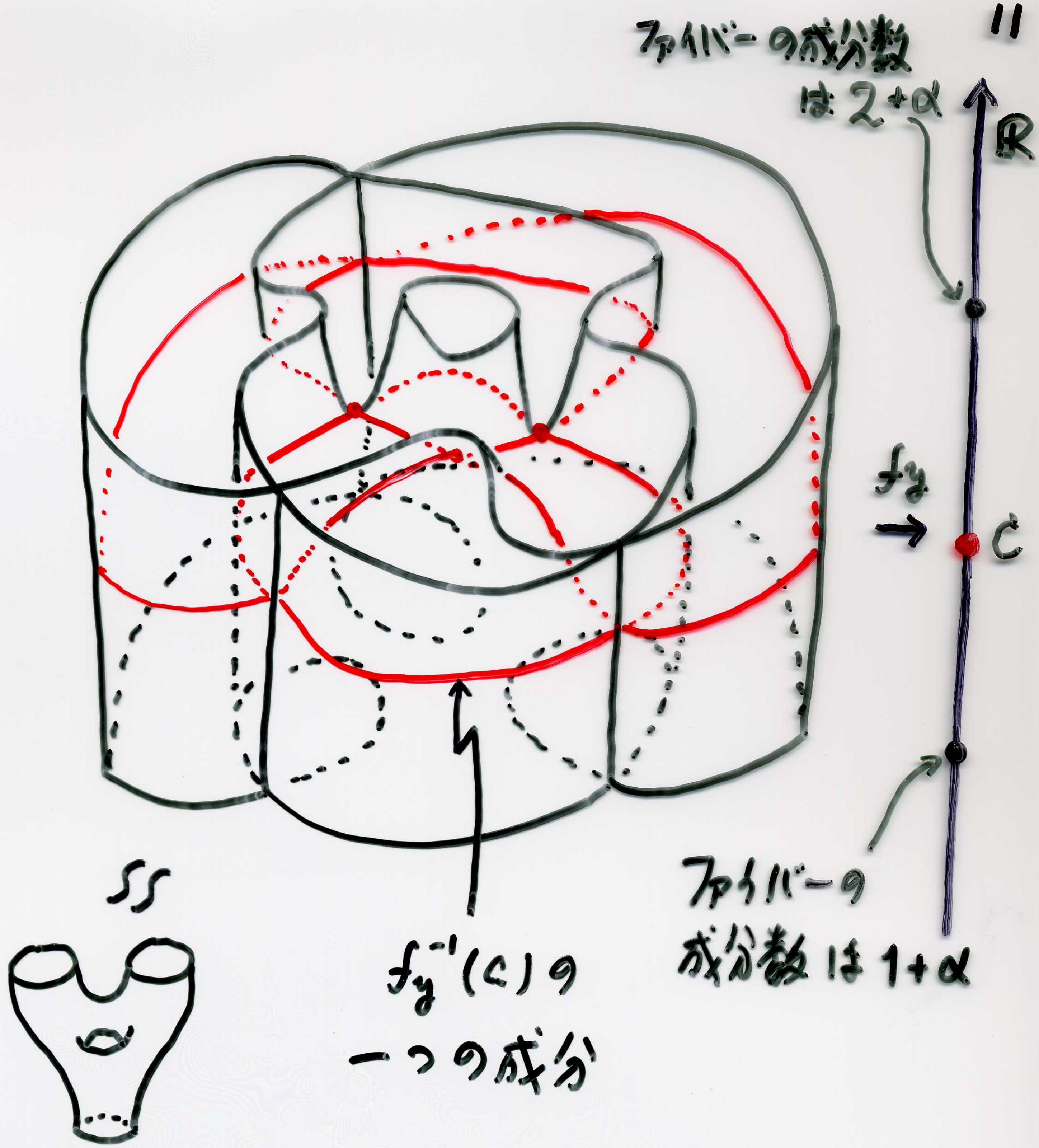
f_y の各 crit. pt は

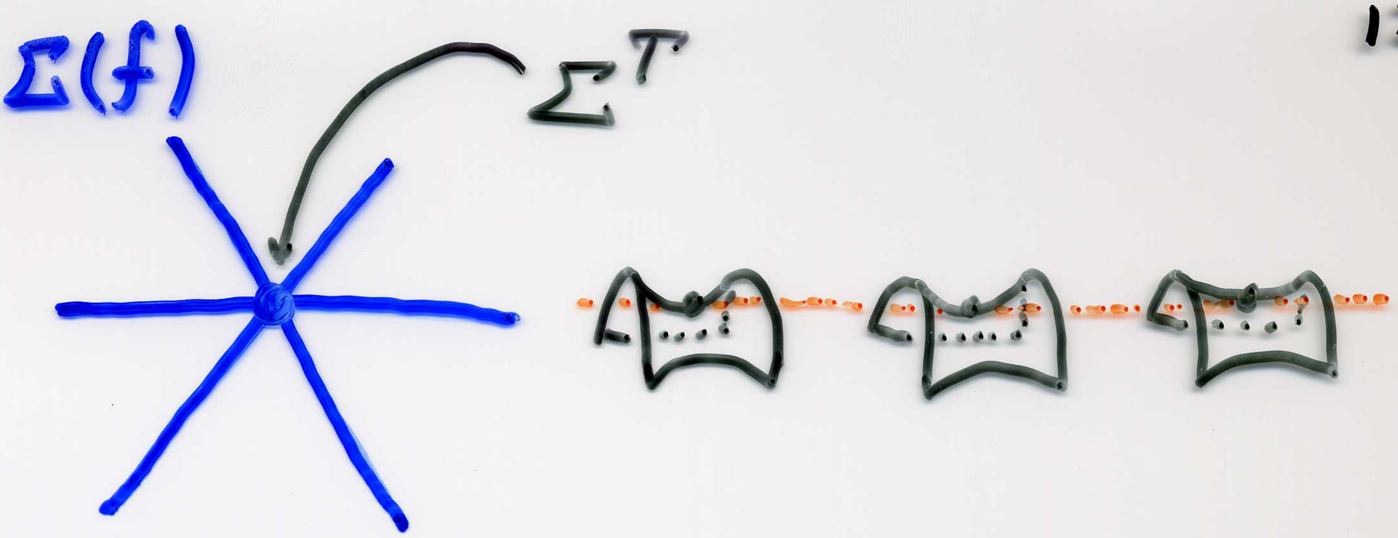
non-deg. で、次の

"特異ファイバー" を

ちょうど一つ持つ $\}$




ファイバーの成分数は2+α
ℝ
f_y
c
ファイバーの成分数は1+α
$f_y^{-1}(c)$の一つの成分



以下 $\dim B = 2$,

B : oriented とする。

Σ^T の各点 y に、Σ_g-fiber の向きと B の向きを使って符号 $\mathrm{sign}(y) = \pm 1$ を次のように定義する。

1° $f^{-1}(c-\varepsilon)$ の成分数

$> f^{-1}(c+\varepsilon)$ の成分数

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}$ には通常の向き

そうでないなら通常と逆の

向きを入れる。

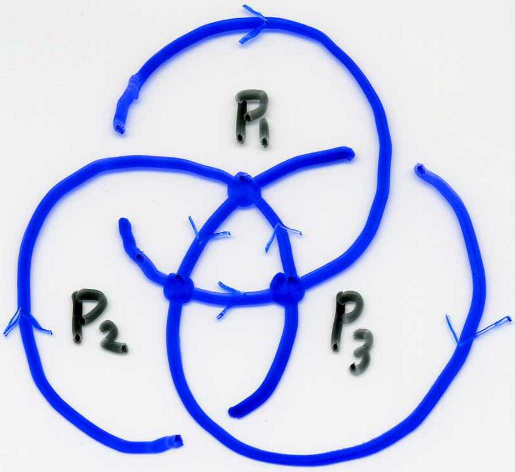
2° $\pi^{-1}(y) \cong \Sigma_g$ の向きを

使って、$f_y^{-1}(c)$ の regular part

に向きが入る。

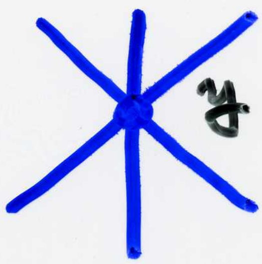
$$\left(\begin{array}{c} \langle f_y^{-1}(c) \text{の向き}, \mathbb{R} \text{の向き} \rangle = \langle \Sigma_g \text{の向き} \rangle \\ f_y : \Sigma_g \to \mathbb{R} \ni c \end{array} \right)$$

3°



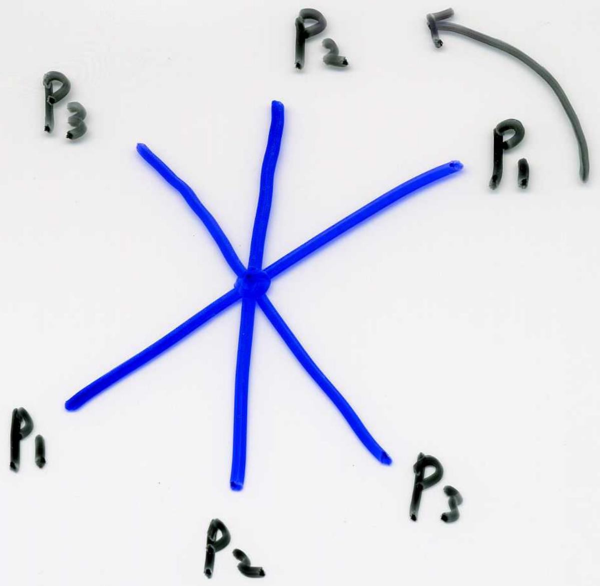
$f_y^{-1}(c)$ 上の 3つの crit. pts P_1, P_2, P_3 に cyclic order が決まる。

4° $\Sigma(f)$ は y の近くで



の形。

各 P_i はこのうちの1本の arc に対応。(たとえば、P_1 は、P_2 と P_3 で同じ値を取る関数に対応。)



$P_1 \to P_2 \to P_3$ の向きが B の
向きと一致していれば
$\mathrm{sign}(\gamma) = +1$,
そうでなければ $\mathrm{sign}(\gamma) = -1$
とする。

注 Σg-fiber の向きを逆にすると
-1 倍, B の向きを逆にしても
-1 倍される。

Thm 1 (T. Yamamoto - S)

Closed oriented surface B 上の oriented Σ_g-bundle π に対し、

$$\langle e_1(\pi), [B] \rangle \in \mathbb{Z}$$

は、Σ^T の点の符号の総和の 3 倍に等しい。

$$e_1(\pi) \in H^2(B; \mathbb{Z})$$

1st Mumford-Morita-Miller class

一般に、

$$\begin{array}{c} E \\ \pi \downarrow \\ B \end{array} \quad \text{oriented } \Sigma_g\text{-bundle}$$

に対し、

ξ : vertical tangent bundle

↑ori. $\mathbb{R}^2$-bundle over E

$e \in H^2(E;\mathbb{Z})$: ξ の Euler class

$$e_i(\pi) := \pi_!(e^{i+1}) \in H^{2i}(B;\mathbb{Z})$$

π の i-th MMM 類

($\pi_! : H^{2i+2}(E;\mathbb{Z}) \to H^{2i}(B;\mathbb{Z})$
Gysin 準同型)

Σ_g-bundle の特性類

(自然性が成立)

§3. Thm 1 の証明

$$\begin{array}{ccc} E^4 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \\ B^2 & & \end{array}$$

$$F := (\pi, f) : E^4 \to B^2 \times \mathbb{R}$$
$$\quad\quad\quad\quad\quad\quad x \mapsto (\pi(x), f(x))$$

f が generic ならば，F は

いわゆる 安定写像

(stable map)

Thm 2 (T. Yamamoto - S)

$F : M^4 \to N^3$ stable map
↑ closed oriented

各  型 特異ファイバー

に符号 $(=\pm 1)$ が付けられ、

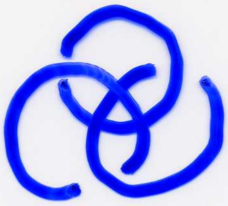
その符号の総和は M^4 の

signature $\mathrm{sign}(M^4)$ に

等しい。

一方、

$F=(\pi,f) : E^4 \to B^2 \times \mathbb{R}$

の各  型ファイバーは、

符号も込めて Σ^T の点と

1対1に対応する。

Fact (folklore)

$$\langle e_1(\pi), [B^2] \rangle = 3\ \mathrm{sign}(M^4)$$

$$\Downarrow$$

$$\langle e_1(\pi), [B^2] \rangle = 3 \times$$

( 型ファイバーの符号和)

//

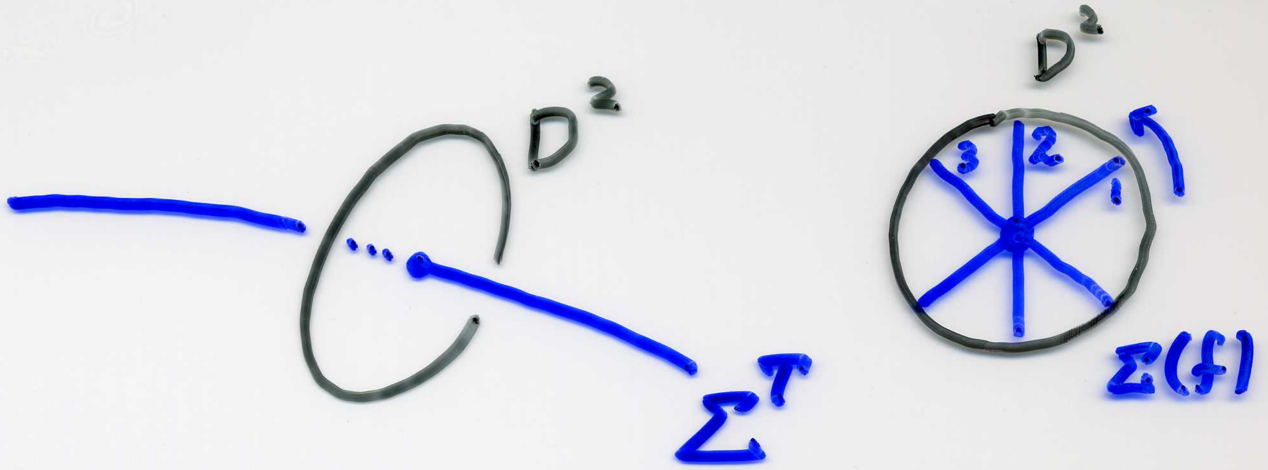
base B が一般次元の多様体の場合：

$f : E \to \mathbb{R}$ generic

$\Rightarrow$ Σ^T : codim. 2 smooth submanifold of B

しかも $\Sigma^T \subset B$ の normal bundle は oriented

(co-oriented という)



$\pi|_{\pi^{-1}(D^2)} : \pi^{-1}(D^2) \longrightarrow D^2$ Σ_g-bdle

D^2の中心の、Σ^Tの点としての符号が$+1$となるように、

D^2に向きをつける。

Thm 3

$\overline{\Sigma^T}$ は (closed supportの) co-oriented cycle in B をなし、その Poincaré 双対

$$[\overline{\Sigma^T}]^* \in H^2(B;\mathbb{Z})$$

($\overline{\Sigma^T}$ との 交点数 をとることによって定まる cohomology class)

に対し、

$$3[\overline{\Sigma^T}]^* = e_1(\pi) \quad \text{in } H^2(B;\mathbb{Z})$$

modulo torsion

が成り立つ。

§4. 一般論 I

S^1-bundle に対する $\Sigma^{(11)(11)}_{\mathrm{extr}}$

Σg-bundle に対する Σ^{T}

どうやってみつけたら良い？

M : C^∞ manifold

$$C^\infty(M,\mathbb{R}) := \{ f : M \to \mathbb{R}\ C^\infty \}$$
$$\cup$$
$\mathcal{G}$: generic functions

重要!

$\mathcal{G}$ の元に対する equiv. relation を一つ用意（たとえば、同じ特異ファイバーを持つ、等）。

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "\pi"'] \\ B \end{tikzcd}$$

M-bundle

B ← C^∞ manifold

$E \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ "generic"

$\alpha \subset \mathcal{G}$: equiv. class

$$\alpha(f) := \{ y \in B \mid f_y = f|_{\pi^{-1}(y)} \in \alpha \}$$

B a smooth submanifold, constant codim.

$\kappa(\alpha)$ と書く。

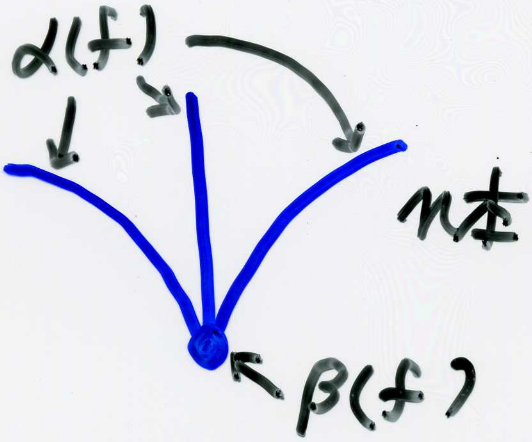
Bは、$\alpha(f)$達に分割(stratify)される。

普遍複体

C^k : codim. k の equiv. classes で張られる、形式的な $\mathbb{Z}_2$-module

$\delta : C^k \longrightarrow C^{k+1}$ homo.

$$\begin{array}{ccc} C^k & \longrightarrow & C^{k+1} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \alpha & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k(\beta)=k+1} [\alpha:\beta]\,\beta \end{array}$$



$[\alpha:\beta] \equiv n \pmod 2$

$\delta \circ \delta = 0$ が確かめられる。

$C^*: \ 0 \to C^0 \xrightarrow{\delta} C^1 \xrightarrow{\delta} C^2 \xrightarrow{\delta} \cdots$

cochain complex

universal complex という。

(Kazarian が $M = S^1$ のときに考えたものの単純な一般化)

H^* : C^* の cohomology

H^* の幾何学的な意味は？

$\underline{c \in C^k}$

$$c = \sum_{k(\alpha)=k} n_\alpha \cdot \alpha \quad (n_\alpha \in \mathbb{Z}_2)$$

$$\begin{array}{lll} E & \xrightarrow{f} \mathbb{R} & \text{"generic"} \\ \pi \downarrow & \leftarrow C^\infty \text{ M-bundle} & \\ B & \leftarrow C^\infty \text{ manifold} & \\ \cup & & \end{array}$$

$$\underline{C(f)} := \{ y \in B \mid f_y = f|_{\pi^{-1}(y)} \in \alpha, \; n_\alpha \neq 0 \}$$

$\uparrow$

codim. k の submanifolds

の和集合

Lemma

(1) $c \in C^k$: cocycle ($\delta(c)=0$)

$\Rightarrow \overline{c(f)}$ は B の codim. k

の $\mathbb{Z}_2$-cycle

(2) $[\overline{c(f)}]_2 \in H_{\dim B - k}(B;\mathbb{Z}_2)$

は $[c] \in H^*$ のみによる。

$[c] \in H^*$

$E \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ generic

$\Downarrow$

ポアンカレ双対

$[\overline{c(f)}]_2^* \in H^k(B;\mathbb{Z}_2)$

well-defined

Lemma

(1) $[\overline{c(f)}]_2^*$ は f の選び方によらず、M-bundle π の同型類のみによる。

$\rightsquigarrow$ $[c](\pi)$ と書く。

(2)
$$\begin{tikzcd} E_0 \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] \arrow[d, "\pi_0"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & E_1 \arrow[d, "\pi_1"] \\ B_0 \arrow[r, "\varphi"] & B_1 \end{tikzcd}$$
束写像

$$[c](\pi_0) = \varphi^*([c](\pi_1))$$

$\left(\varphi^* : H^k(B_1; \mathbb{Z}_2) \to H^k(B_0; \mathbb{Z}_2) \right)$

"自然性"

つまり、universal complex

の cohomology H^* の元は、

M-bundle の特性類を

induce する！

注　M, $\mathfrak{g}$ $(\subset C^\infty(M,\mathbb{R}))$,

equiv. relation によっては

$\alpha(f)$ の normal bundle に

向きがつけられることがある。

そうしたものだけを用いると、

上の議論はすべて $\mathbb{Z}$-係数で OK。

例 (曲面束)

$$M = \Sigma_g$$

$C^\infty(\Sigma_g, \mathbb{R}) \supset \mathcal{G}$ "generic"

$f, h \in \mathcal{G}$ が equiv.

DEF.

$\Leftrightarrow$ $\{f_t\}_{t \in D^k}$: f を含む generic family $(f_0 = f)$

$\{h_s\}_{s \in D^l}$: h を含む generic family $(h_0 = h)$

のとき、$k = l$ かつ

$F : \Sigma_g \times D^k \to \mathbb{R} \times D^k$ と

$(x, t) \mapsto (f_t(x), t)$

$H : \Sigma_g \times D^l \to \mathbb{R} \times D^l$ は

$(x, s) \mapsto (h_s(x), s)$

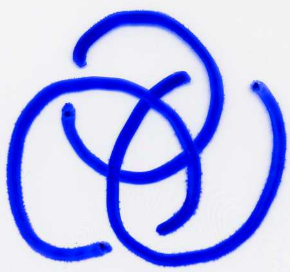
$\mathbb{R} \times \{0\}$ 上 "同じ特異ファイバー" を持つ。

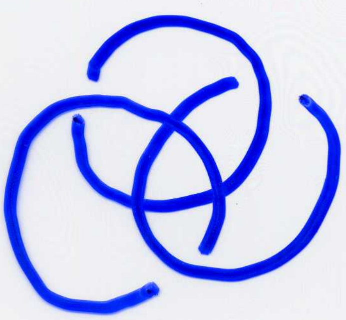
この状況で、co-orientable なものを $\mathbb{Z}$-係数で考えると次を得る。

Prop.

$H^1 = 0$

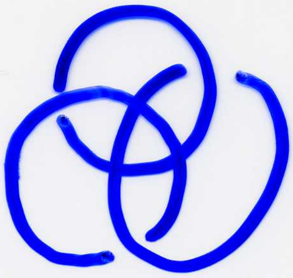
$H^2 \cong \mathbb{Z}$

generated by 

 はこうして見つけられる。

そして実際

$$\left[\right] \in H^2$$



は 1-st MMM類

の "$\frac{1}{3}$倍" を

induce する。

脱線

特異点 と 特性類 は

もともと相性が良い。

Poincaré-Hopf

ベクトル場の特異点での

index の総和 = Euler 数

特性類 の ルーツ は

特異点 にあり!!

特異点解消の障害類 → 特性類

- ベクトル束の Euler 類

  (section と zero section の交点数)

  section をとるたびに決まる

  ↓

  section のとり方によらない

  ↓

  自然性

- Univ. Complex の Cohomology 類

  f をとるたびに定義できる

  ↓

  f のとり方によらない

  ↓

  自然性

§5. 一般論 II

(joint with 大本亨氏 (北大理))

base B が 多様体でなく、

一般の空間のときは、

どう formulate したら

よいか？

M : C^∞ manifold

$G = \mathrm{Diff}\, M$

M の diffeo. group

$EG \curvearrowleft G$ (右から作用)

$\downarrow$ universal principal G-bundle

BG

$\uparrow$

classifying space

一方、

$$C^\infty(M,\mathbb{R}) = \{ f : M \to \mathbb{R} \ C^\infty \}$$

$$G \curvearrowright C^\infty(M,\mathbb{R}) \quad \text{(左から作用)}$$
$$\begin{array}{ccc} \Psi & & \Psi \\ \varphi & & f \end{array}$$

$$(\varphi, f) \longmapsto f \circ \varphi^{-1}$$

$$\underline{BC^\infty(M,\mathbb{R})} := \underline{EG \times_G C^\infty(M,\mathbb{R})}$$

$$\Big\downarrow$$

$$BG$$

← $\underline{C^\infty(M,\mathbb{R})\text{をファイバー}}$とするファイバー束

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "\pi"'] \\ B \end{tikzcd}$$

M をファイバーとする

ファイバー束,

Str. Group $= G \ (= \mathrm{Diff}\, M)$

B: top. space

$$\boxed{f : E \to \mathbb{R} \quad \text{各ファイバー上 } C^\infty}$$

$$\rightsquigarrow$$

$$\begin{tikzcd}
 & BC^\infty(M, \mathbb{R}) \arrow[d] \\
B \arrow[ur, dashed, "\exists\, \widetilde{b_f}"] \arrow[r, "b"', "\text{classifying map}"'] \arrow[ur, phantom, shift right=4, "\circlearrowright"] & BG
\end{tikzcd}$$

$y \in B$ に対し,

$f_y = f|_{\pi^{-1}(y)} : \pi^{-1}(y) \cong M \to \mathbb{R}$

($C^\infty(M, \mathbb{R})$ の元と見なせる)

を"対応"させる写像

が $\widetilde{b_f}$.

$C^\infty(M, \mathbb{R})$ は contractible

ゆえ,

$BC^\infty(M, \mathbb{R}) \simeq BG$

homotopy equiv.

よって、

$$\underline{\widetilde{b_f}^*} : H^*(BC^\infty(M,\mathbb{R})) = \underline{H^*(BG)} \to \underline{H^*(B)}$$

characteristic classes of M-bundles

$\underline{H^*(BC^\infty(M,\mathbb{R}))}$ の元は

<u>M-bundle の特性類を</u>

誘導する。

$$BC^\infty(M,\mathbb{R}) = EG \times_G C^\infty(M,\mathbb{R})$$

$C^\infty(M,\mathbb{R})$ の (finite codim. の) "strata" から成る G-invariant "cycle" の dual が

$H^*(BC^\infty(M,\mathbb{R}))$ の元

を定める。

[どうやってそうした cycle をさがしたら良いか?]

H^* : §4 での

universal complex の

cohomology

$$H^* \longrightarrow H^*(BC^\infty(M,\mathbb{R}))$$

∃自然な homo.

具体的な (co-)cycle

をさがす、一つの方法

を与える！

注 上のことは、

$C^\infty(M, \mathbb{R})$ を $C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$

でおきかえてもOK。

例 $M = \Sigma_g$, oriented

$G = \mathrm{Diff}^+ \Sigma_g$

$C^\infty(\Sigma_g, \mathbb{R}^n)$, $\quad n \geqq 2$

$$\mathcal{E} := \{ f \in C^\infty(\Sigma_g, \mathbb{R}^n) \mid \Sigma_g \ni {}^\exists x \text{ s.t. } df_x = 0 \}$$

$$\operatorname{codim} \mathcal{E} = 2n-2$$

$$[\mathcal{E}]^* \in H^{2n-2}(BC^\infty(\Sigma_g, \mathbb{R}^n))$$

$\|$ ← 大本 $\qquad\qquad \|$

$$e_{n-1} \in H^{2n-2}(B\mathrm{Diff}^+\Sigma_g)$$

↑

$(n-1)$-th MMM class

問題 1

向き付け不可能な曲面をファイバーとする曲面束の特性類の、特異点論的構成？

問題 2

ファイバー束でなく、
(たとえば Lefschetz
fibration のような) 特異
ファイバー束に対しても
似たような議論は
可能か?

問題3

Igusa, Klein

(higher Franz-Reidemeister torsion)

Bismut, Lott, Goette

(higher analytic torsion)

らの M-bundle の特性類

の理論との関係は？