多値関数データのための
位相に基づく視覚的データ解析

佐伯　修　（九大数理）

2011 年 3 月 7 日

多値関数データのための
位相に基づく視覚的データ解析

佐伯　修　（九大数理）

2011 年 3 月 7 日

専門

多値関数データのための
位相に基づく視覚的データ解析

佐伯　修　（九大数理）

2011 年 3 月 7 日

専門

数学 ＞ トポロジー ＞ 微分トポロジー

多値関数データのための
位相に基づく視覚的データ解析

佐伯　修　（九大数理）

2011 年 3 月 7 日

専門

数学 ＞ トポロジー ＞ 微分トポロジー ＞ 写像の特異点論

§1. スカラ関数データの可視化

Level set

M^n : n 次元可微分多様体（もしくは $\mathbf{R}^n$ の領域）

Level set

M^n : n 次元可微分多様体（もしくは $\mathbf{R}^n$ の領域）

定義 1.1 $f : M^n \to \mathbf{R}$: 可微分関数（スカラ関数）

Level set

M^n : n 次元可微分多様体（もしくは $\mathbf{R}^n$ の領域）

定義 1.1 $f : M^n \to \mathbf{R}$: 可微分関数（スカラ関数）
$c \in \mathbf{R}$ に対して,

$$f^{-1}(c) = \{x \in M^n \mid f(x) = c\}$$

を **level set** という.

Level set

M^n : n 次元可微分多様体（もしくは $\mathbf{R}^n$ の領域）

定義 1.1 $f : M^n \to \mathbf{R}$: 可微分関数（スカラ関数）
$c \in \mathbf{R}$ に対して,

$$f^{-1}(c) = \{x \in M^n \mid f(x) = c\}$$

を **level set** という.

一般に level set は $n-1$ 次元（ただし，多様体とは限らない）

Level set

M^n : n 次元可微分多様体（もしくは $\mathbf{R}^n$ の領域）

定義 1.1 $f : M^n \to \mathbf{R}$: 可微分関数（スカラ関数）
$c \in \mathbf{R}$ に対して,

$$f^{-1}(c) = \{x \in M^n \mid f(x) = c\}$$

を **level set** という.

一般に level set は $n-1$ 次元（ただし，多様体とは限らない）
$n = 2$ のときは曲線，$n = 3$ のときは曲面,...

Level set

M^n : n 次元可微分多様体（もしくは $\mathbf{R}^n$ の領域）

定義 1.1 $f : M^n \to \mathbf{R}$: 可微分関数（スカラ関数）
$c \in \mathbf{R}$ に対して,

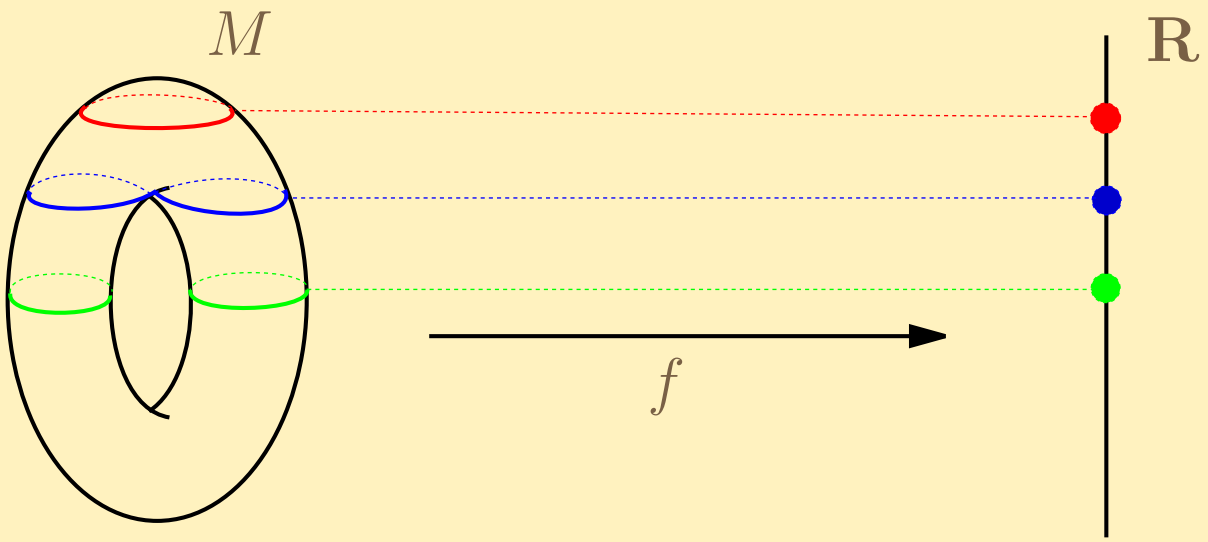
$$f^{-1}(c) = \{x \in M^n \mid f(x) = c\}$$

を **level set** という.

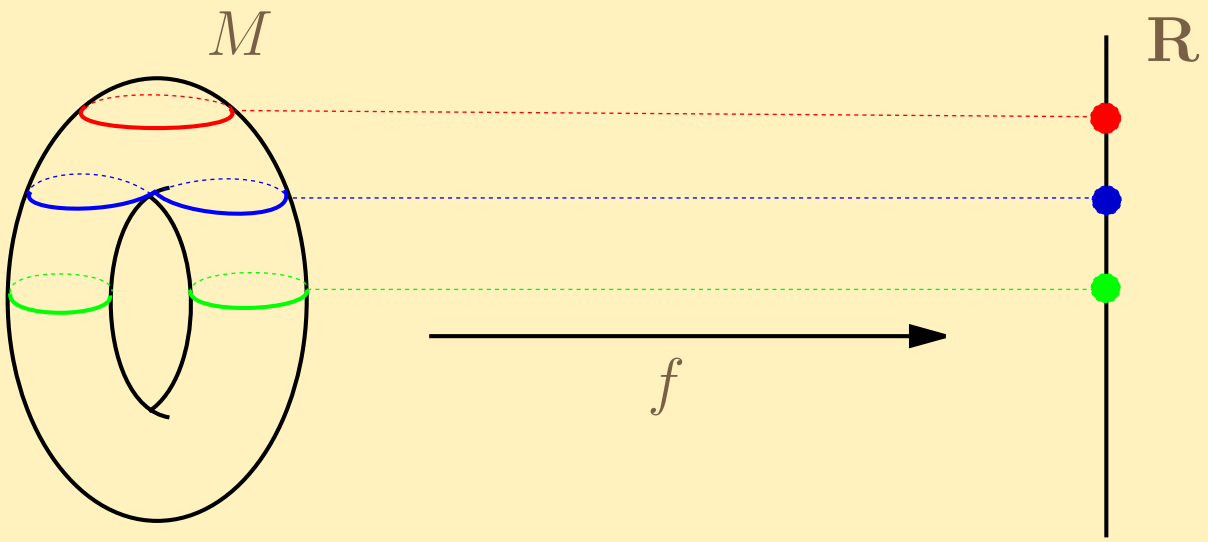
一般に level set は $n-1$ 次元（ただし，多様体とは限らない）
$n = 2$ のときは曲線，$n = 3$ のときは曲面,...

例 1.2 地上の標高データ
level set = 等高線

Level set の例



Level set の例



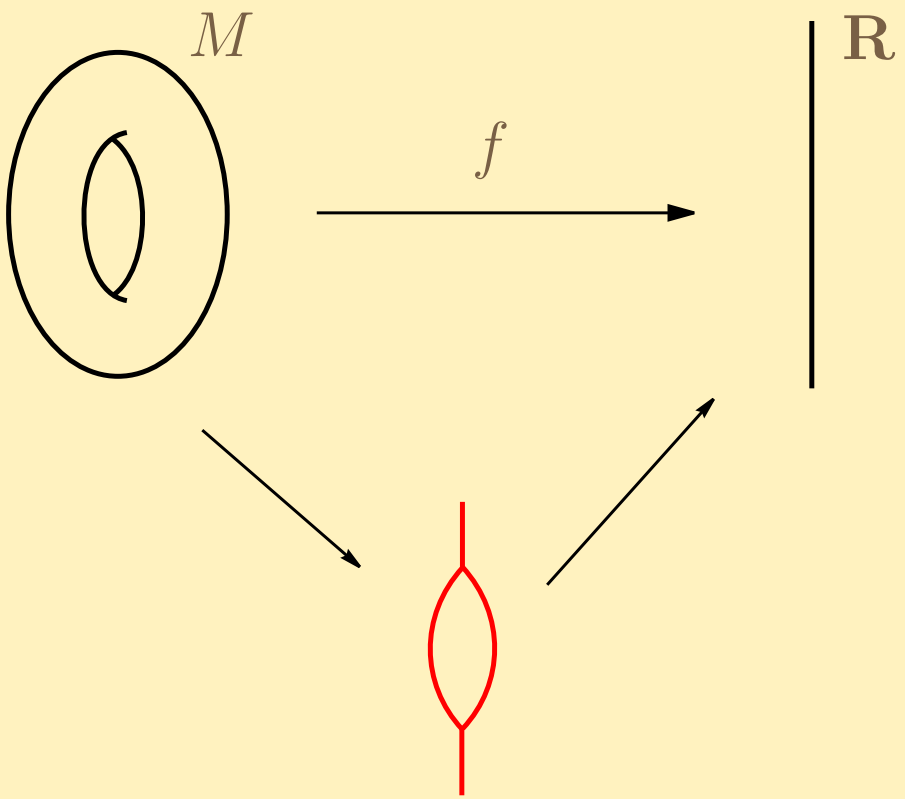
Level set は連結とは限らない.

Reeb graph

Level set の各連結成分を 1 点につぶしてできる図形（グラフ）を
Reeb graph という.
（あるいは，contour tree, volume skeleton tree, ...）

Reeb graph

Level set の各連結成分を 1 点につぶしてできる図形（グラフ）を **Reeb graph** という.
（あるいは，contour tree, volume skeleton tree, ...）



Reeb graph と可視化

Reeb graph：2 次元，3 次元スカラ関数の**可視化**に非常に有用

Reeb graph と可視化

Reeb graph：2 次元，3 次元スカラ関数の**可視化**に非常に有用

- Reeb graph の頂点 $\Longleftrightarrow$ スカラ関数の臨界点

Reeb graph と可視化

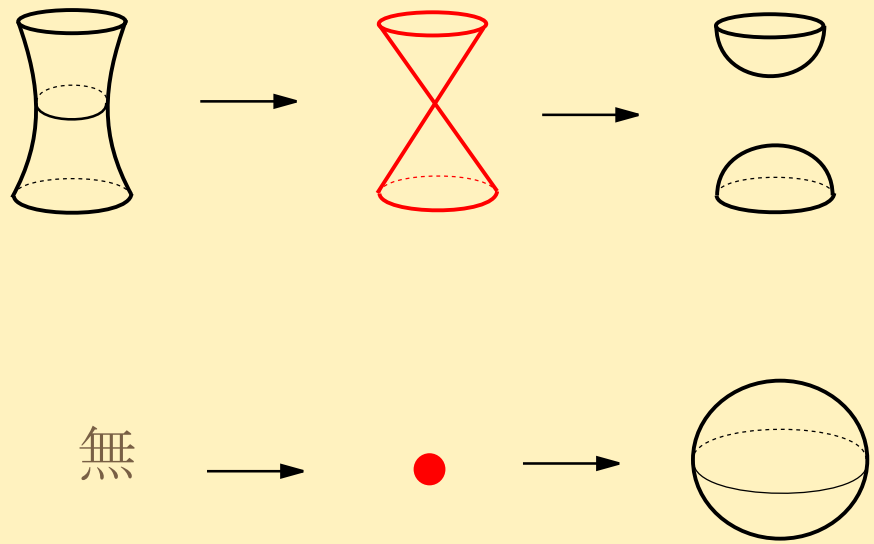
Reeb graph：2 次元，3 次元スカラ関数の**可視化**に非常に有用

- Reeb graph の頂点 $\Longleftrightarrow$ スカラ関数の臨界点
- 臨界点前後の **level set のトポロジー**の変化を追うことが重要

Reeb graph と可視化

Reeb graph：2 次元，3 次元スカラ関数の**可視化**に非常に有用

- Reeb graph の頂点 $\Longleftrightarrow$ スカラ関数の臨界点
- 臨界点前後の **level set のトポロジー**の変化を追うことが重要



3 次元スカラ関数の等値面変化の例

§2. 多値関数データの可視化

ファイバー

M^n : n 次元可微分多様体（または $\mathbf{R}^n$ の領域）

ファイバー

M^n : n 次元可微分多様体（または $\mathbf{R}^n$ の領域）

$f : M^n \to \mathbf{R}^m \ (m \geq 1)$ 　可微分写像（一般に**多値関数**）
$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$

ファイバー

M^n : n 次元可微分多様体（または $\mathbf{R}^n$ の領域）

$f : M^n \to \mathbf{R}^m$ $(m \geq 1)$ 　可微分写像（一般に**多値関数**）
$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$

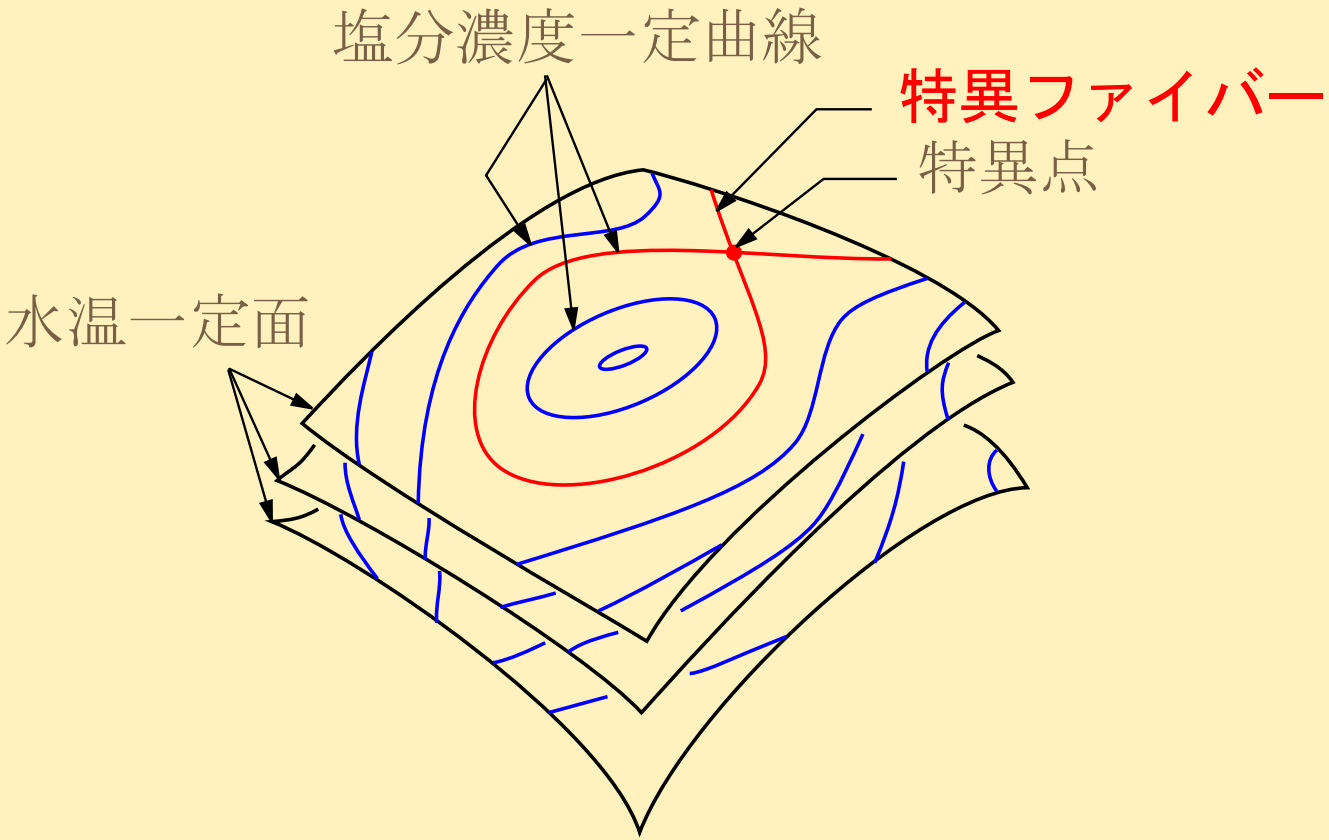
定義 2.1 $c \in \mathbf{R}^m$ に対して，$f^{-1}(c)$ を，**ファイバー**と呼ぶ.

ファイバーの例

$n = 3$, M^3 : 海水，$f : M^3 \to \mathbf{R}^2$
$f =$（水温，塩分濃度）

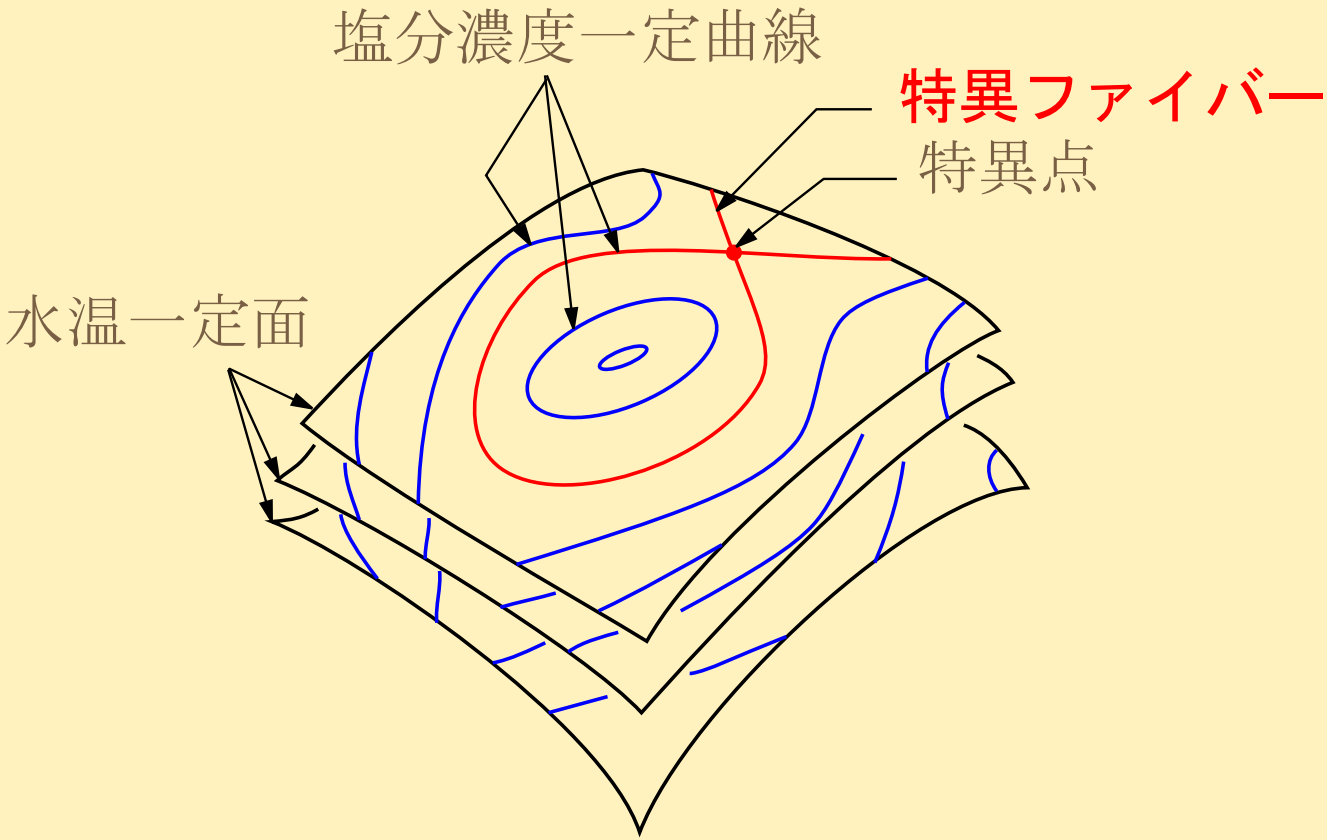
ファイバーの例

$n = 3$, M^3 : 海水, $f : M^3 \to \mathbf{R}^2$
$f =$ (水温, 塩分濃度)



ファイバーの例

$n = 3$, M^3 : 海水, $f : M^3 \to \mathbf{R}^2$
$f =$ (水温, 塩分濃度)



特異点を含むファイバーを**特異ファイバー**と呼ぶ.

Morse の補題

$f : M^n \to \mathbf{R}$ 　可微分関数（スカラ関数）

Morse の補題

$f : M^n \to \mathbf{R}$ 　可微分関数（スカラ関数）

臨界点：f のすべての偏微分係数がゼロとなる M^n の点

Morse の補題

$f : M^n \to \mathbf{R}$ 　可微分関数（スカラ関数）
臨界点：f のすべての偏微分係数がゼロとなる M^n の点

定理 2.2 (Morse の補題) f が**ジェネリック**（一般的）であれば，f は各臨界点のまわりで適当な局所座標により

$$f = \pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm \cdots \pm x_n^2 + c$$

と書ける（c は定数）．

Morse の補題

$f : M^n \to \mathbf{R}$ 　可微分関数（スカラ関数）
臨界点：f のすべての偏微分係数がゼロとなる M^n の点

定理 2.2 (Morse の補題) f が**ジェネリック**（一般的）であれば，f は各臨界点のまわりで適当な局所座標により

$$f = \pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm \cdots \pm x_n^2 + c$$

と書ける（c は定数）．

マイナスの符号の個数を，臨界点の**指数**という．

Morse の補題

$f : M^n \to \mathbf{R}$ 可微分関数（スカラ関数）
臨界点：f のすべての偏微分係数がゼロとなる M^n の点

定理 2.2 (Morse の補題) f が**ジェネリック**（一般的）であれば，f は各臨界点のまわりで適当な局所座標により

$$f = \pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm \cdots \pm x_n^2 + c$$

と書ける（c は定数）．

マイナスの符号の個数を，臨界点の**指数**という．
臨界点のトポロジーは指数で決定される．

Morse の補題

$f : M^n \to \mathbf{R}$ 　可微分関数（スカラ関数）
臨界点：f のすべての偏微分係数がゼロとなる M^n の点

定理 2.2 (Morse の補題) f が**ジェネリック**（一般的）であれば，f は各臨界点のまわりで適当な局所座標により

$$f = \pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm \cdots \pm x_n^2 + c$$

と書ける（c は定数）．

マイナスの符号の個数を，臨界点の**指数**という．
臨界点のトポロジーは指数で決定される．
Level-set の変化を追うために Morse の補題は基本的！

Morse の補題

$f : M^n \to \mathbf{R}$ 　可微分関数（スカラ関数）
臨界点：f のすべての偏微分係数がゼロとなる M^n の点

定理 2.2 (Morse の補題) f が**ジェネリック**（一般的）であれば，f は各臨界点のまわりで適当な局所座標により

$$f = \pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm \cdots \pm x_n^2 + c$$

と書ける（c は定数）．

マイナスの符号の個数を，臨界点の**指数**という．
臨界点のトポロジーは指数で決定される．
Level-set の変化を追うために Morse の補題は基本的！

多値関数の場合は？

特異点と Jacobi set

$f : M^n \to \mathbf{R}^m \ (n \geq m)$ 　可微分写像（多値関数）

特異点と Jacobi set

$f : M^n \to \mathbf{R}^m \ (n \geq m)$ 　可微分写像（多値関数）

定義 2.3 M^n の点 x に対して，

$$df_x : T_x M^n \to T_{f(x)} \mathbf{R}^m$$

を f の**ヤコビ行列**（1 階の偏微分係数を並べてできる，$m \times n$ 行列）から定まる線形写像とする（f の，点 x での**微分**という）．

特異点と Jacobi set

$f : M^n \to \mathbf{R}^m \ (n \geq m)$ 　可微分写像（多値関数）

定義 2.3 M^n の点 x に対して，

$$df_x : T_x M^n \to T_{f(x)} \mathbf{R}^m$$

を f の**ヤコビ行列**（1 階の偏微分係数を並べてできる，$m \times n$ 行列）から定まる線形写像とする（f の，点 x での**微分**という）．
特異点：rank $df_x < m$ となる M^n の点 x

特異点と Jacobi set

$f : M^n \to \mathbf{R}^m \ (n \geq m)$ 　可微分写像（多値関数）

定義 2.3 M^n の点 x に対して，

$$df_x : T_x M^n \to T_{f(x)} \mathbf{R}^m$$

を f の**ヤコビ行列**（1 階の偏微分係数を並べてできる，$m \times n$ 行列）から定まる線形写像とする（f の，点 x での**微分**という）．
特異点：rank $df_x < m$ となる M^n の点 x
特異点の集合

$$J(f) = \{x \in M^n \mid \mathrm{rank}\ df_x < m\}$$

を f の **Jacobi set** という

特異点と Jacobi set

$f : M^n \to \mathbf{R}^m \ (n \geq m)$ 　可微分写像（多値関数）

定義 2.3 M^n の点 x に対して，

$$df_x : T_x M^n \to T_{f(x)} \mathbf{R}^m$$

を f の**ヤコビ行列**（1 階の偏微分係数を並べてできる，$m \times n$ 行列）から定まる線形写像とする（f の，点 x での**微分**という）．
特異点：rank $df_x < m$ となる M^n の点 x
特異点の集合

$$J(f) = \{x \in M^n \mid \mathrm{rank}\ df_x < m\}$$

を f の **Jacobi set** という

一般に Jacobi set $J(f)$ は $m-1$ 次元

2 値関数の場合

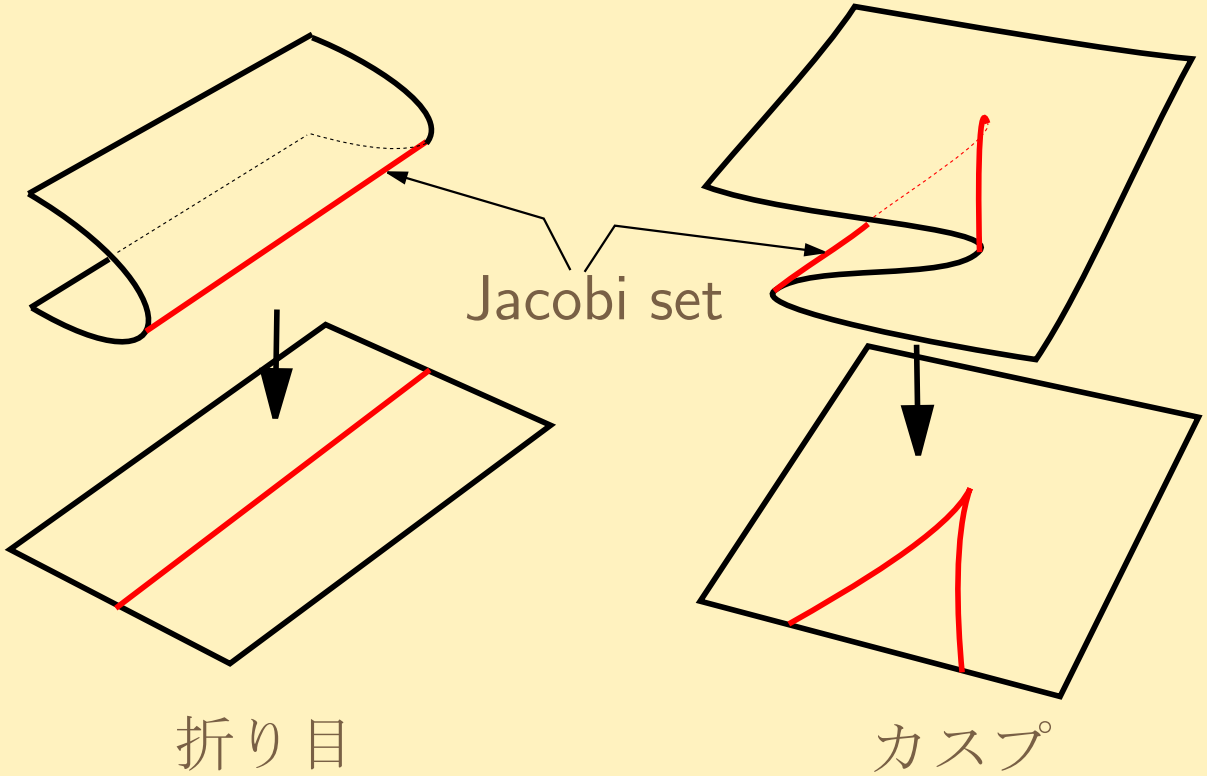
例 2.4 $n = 2, m = 2$ の場合

2 値関数の場合

例 2.4 $n = 2, m = 2$ の場合
特異点のトポロジー：**折り目**と**カスプ**の 2 種類 (Whitney, 1955)

2 値関数の場合

例 2.4 $n = 2, m = 2$ の場合
特異点のトポロジー：**折り目**と**カスプ**の 2 種類 (Whitney, 1955)



多値関数の特異点

$f : M^n \to \mathbf{R}^m$
$n \geq m = 2$ の場合

多値関数の特異点

$f : M^n \to \mathbf{R}^m$
$n \geq m = 2$ の場合
折り目：スカラ関数の Morse 型臨界点の一般化

多値関数の特異点

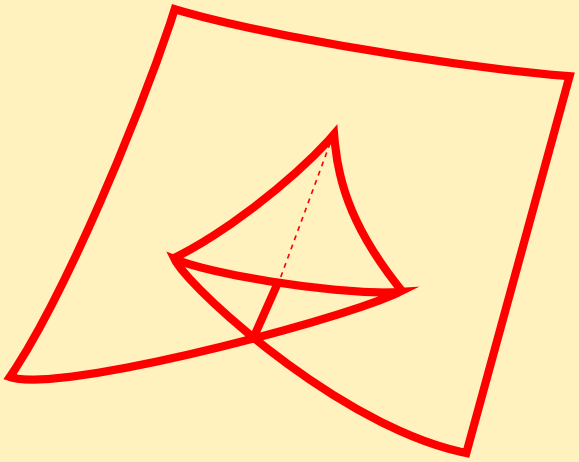
$f : M^n \to \mathbf{R}^m$
$n \geq m = 2$ の場合
折り目：スカラ関数の Morse 型臨界点の一般化
カスプ：折り目が退化した特異点

多値関数の特異点

$f : M^n \to \mathbf{R}^m$
$n \geq m = 2$ の場合
折り目：スカラ関数の Morse 型臨界点の一般化
カスプ：折り目が退化した特異点
$m = 3$ になると，カスプがさらに退化した特異点（**燕の尾**）も現れる

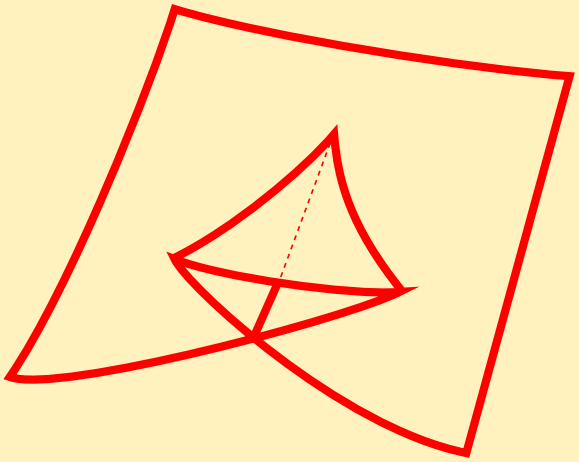
多値関数の特異点

$f : M^n \to \mathbf{R}^m$
$n \geq m = 2$ の場合
折り目：スカラ関数の Morse 型臨界点の一般化
カスプ：折り目が退化した特異点
$m = 3$ になると，カスプがさらに退化した特異点（**燕の尾**）も現れる



多値関数の特異点

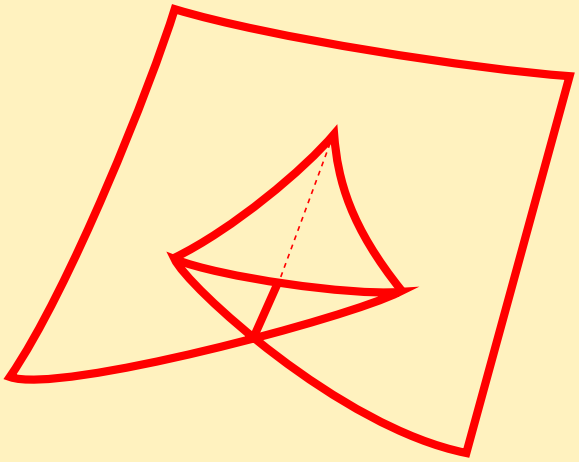
$f : M^n \to \mathbf{R}^m$
$n \geq m = 2$ の場合
折り目：スカラ関数の Morse 型臨界点の一般化
カスプ：折り目が退化した特異点
$m = 3$ になると，カスプがさらに退化した特異点（**燕の尾**）も現れる



$m \geq 4$ となると，状況はさらに複雑.
数学的に難しい

多値関数の特異点

$f : M^n \to \mathbf{R}^m$
$n \geq m = 2$ の場合
折り目：スカラ関数の Morse 型臨界点の一般化
カスプ：折り目が退化した特異点
$m = 3$ になると，カスプがさらに退化した特異点（**燕の尾**）も現れる



$m \geq 4$ となると，状況はさらに複雑.
数学的に難しい $\Longrightarrow$ 現在でも研究が進行中

カスプの同定

$f : M^n \to \mathbf{R}^m$
$n - m > 0$ が奇数と仮定

カスプの同定

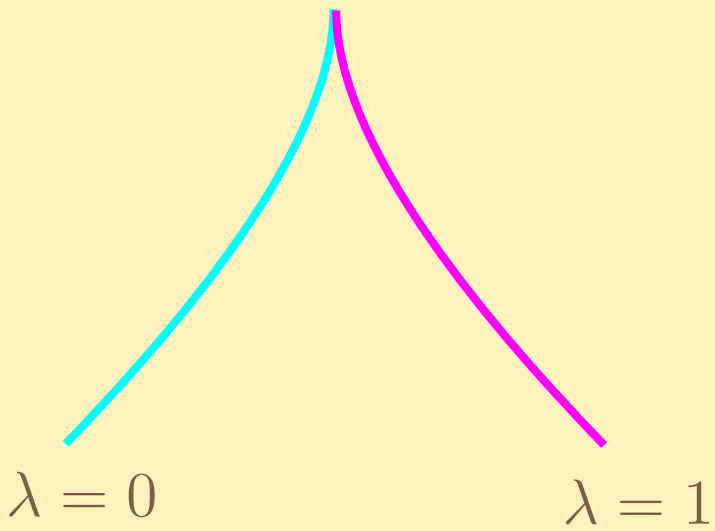
$f : M^n \to \mathbf{R}^m$
$n - m > 0$ が奇数と仮定
折り目特異点に**指数** λ が定義できる.
$(\lambda = 0, 1, \ldots, (n - m + 1)/2)$

カスプの同定

$f : M^n \to \mathbf{R}^m$
$n - m > 0$ が奇数と仮定
折り目特異点に**指数** λ が定義できる.
（$\lambda = 0, 1, \ldots, (n - m + 1)/2$）
カスプは，この指数が変化するところとして特徴付けられる

カスプの同定

$f : M^n \to \mathbf{R}^m$
$n - m > 0$ が奇数と仮定
折り目特異点に**指数** λ が定義できる.
（$\lambda = 0, 1, \ldots, (n-m+1)/2$）
カスプは，この指数が変化するところとして特徴付けられる



$n = 3$, $m = 2$ の場合

アルゴリズム

Edelsbrunner–Harer (2002)
Jacobi set を求めるアルゴリズムを提唱

アルゴリズム

Edelsbrunner–Harer (2002)
Jacobi set を求めるアルゴリズムを提唱
しかし，各特異点の型は不明

アルゴリズム

Edelsbrunner–Harer (2002)
Jacobi set を求めるアルゴリズムを提唱
しかし，各特異点の型は不明

可微分写像の特異点論
$\Downarrow$
特異点の型の同定がある程度可能に

アルゴリズム

Edelsbrunner–Harer (2002)
Jacobi set を求めるアルゴリズムを提唱
しかし，各特異点の型は不明

可微分写像の特異点論
$\Downarrow$
特異点の型の同定がある程度可能に

折り目，カスプ，燕の尾,... がどこにあるかがわかれば,
可視化に大きく貢献できる

可視化のためには

多値関数データの可視化のためには：

可視化のためには

多値関数データの可視化のためには：

1. Jacobi set の特定

可視化のためには

多値関数データの可視化のためには：

1. Jacobi set の特定
2. 各特異点の型の特定

可視化のためには

多値関数データの可視化のためには：

1. Jacobi set の特定
2. 各特異点の型の特定
3. Jacobi set 像の特定

可視化のためには

多値関数データの可視化のためには：

1. Jacobi set の特定
2. 各特異点の型の特定
3. Jacobi set 像の特定
4. Jacobi set 像が仕切る $\mathbf{R}^m$ の各領域上のファイバーの特定

が必要.

可視化のためには

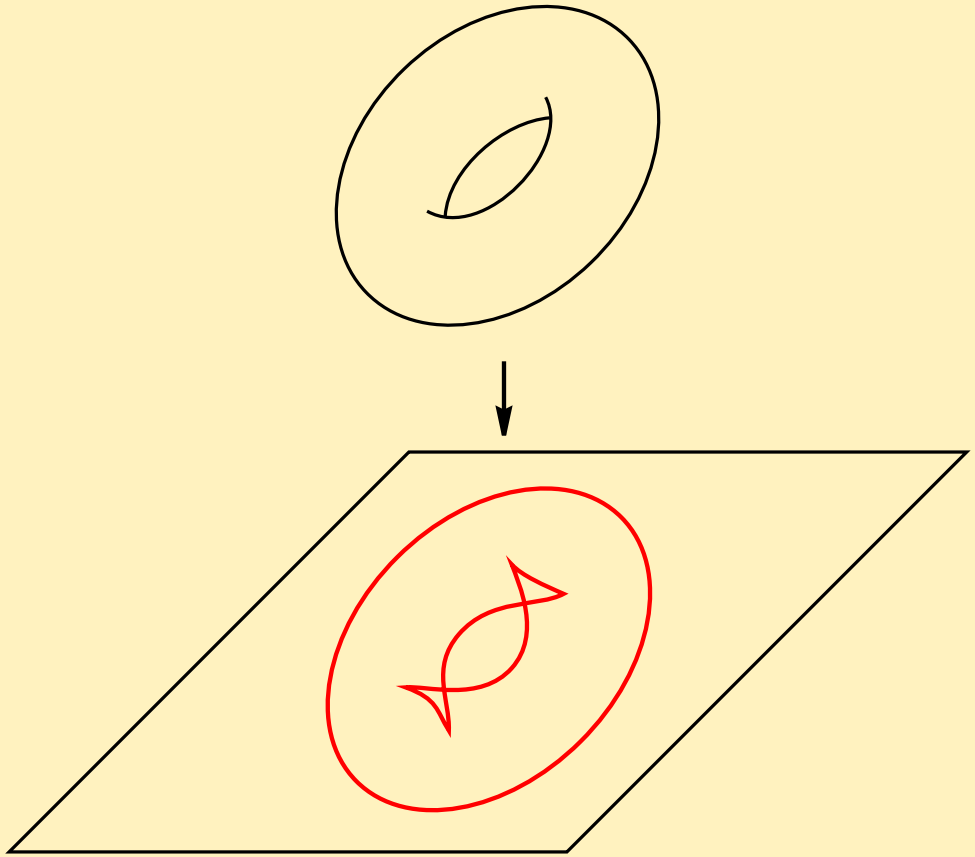
多値関数データの可視化のためには：

1. Jacobi set の特定
2. 各特異点の型の特定
3. Jacobi set 像の特定
4. Jacobi set 像が仕切る $\mathbf{R}^m$ の各領域上のファイバーの特定

が必要.

特に上記 4 のためには，特異ファイバーと，その近くでのファイバー変化を特定することが不可欠.

Jacobi set 像の例



曲面上の 2 値関数の Jacobi set 像

$n = 3,\ m = 2$ の場合

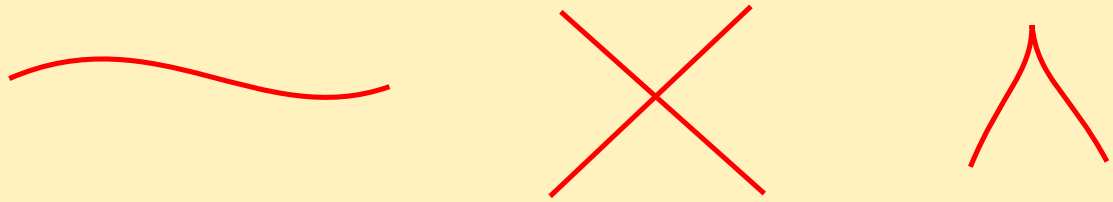
$n = 3,\ m = 2$ の場合：

$n = 3$, $m = 2$ の場合

$n = 3$, $m = 2$ の場合：Jacobi set は曲線.

$n = 3,\ m = 2$ の場合

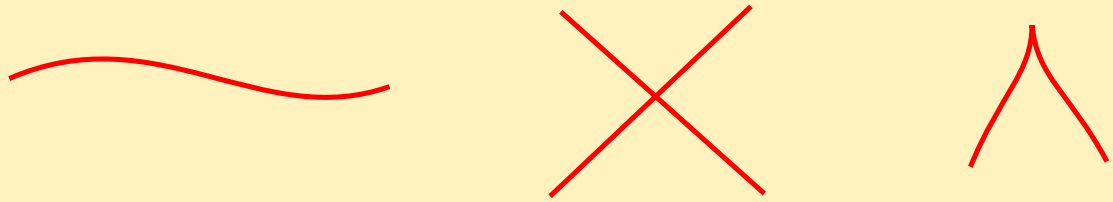
$n = 3,\ m = 2$ の場合：Jacobi set は曲線.



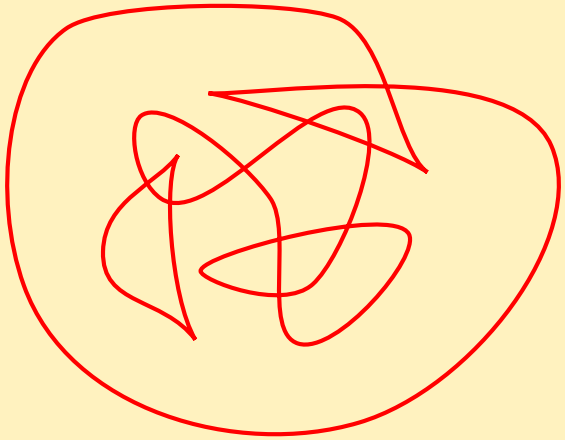
Jacobi set 像の局所形

$n = 3,\ m = 2$ の場合

$n = 3,\ m = 2$ の場合：Jacobi set は曲線.

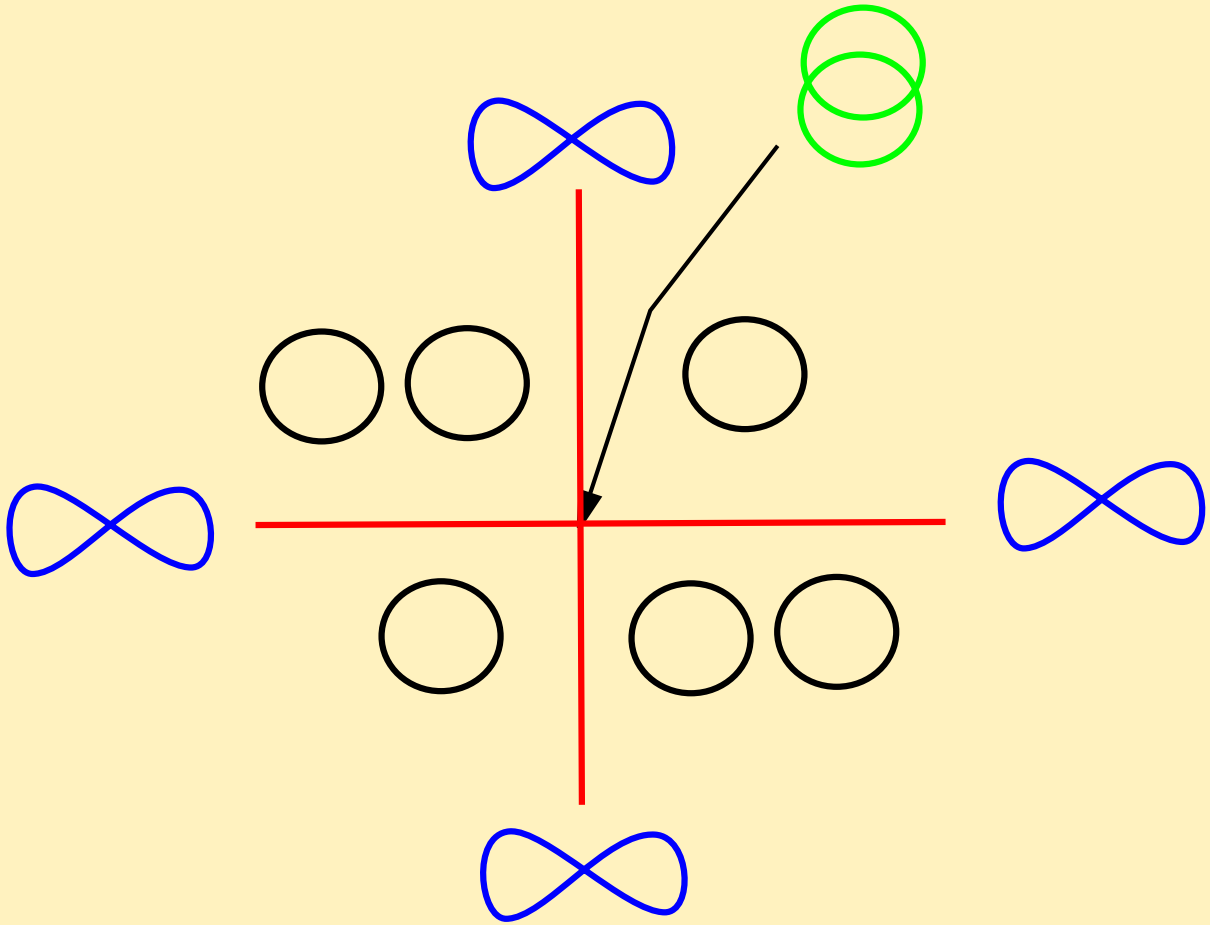


Jacobi set 像の局所形



Jacobi set 像の例

ファイバー変化の一例



$\mathbf{R}^2 \setminus f(J(f))$ の各領域上のファイバー

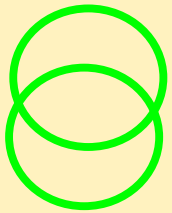
ファイバーの複雑度

ファイバーには，その複雑度に応じて**階層構造**がある．

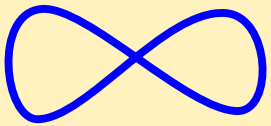
κ：複雑度（**余次元**と呼ばれる）

ファイバーの複雑度

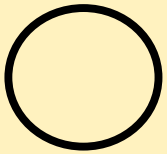
ファイバーには，その複雑度に応じて**階層構造**がある．
κ：複雑度（**余次元**と呼ばれる）



最も複雑 $\kappa = 2$，離散的に現れる

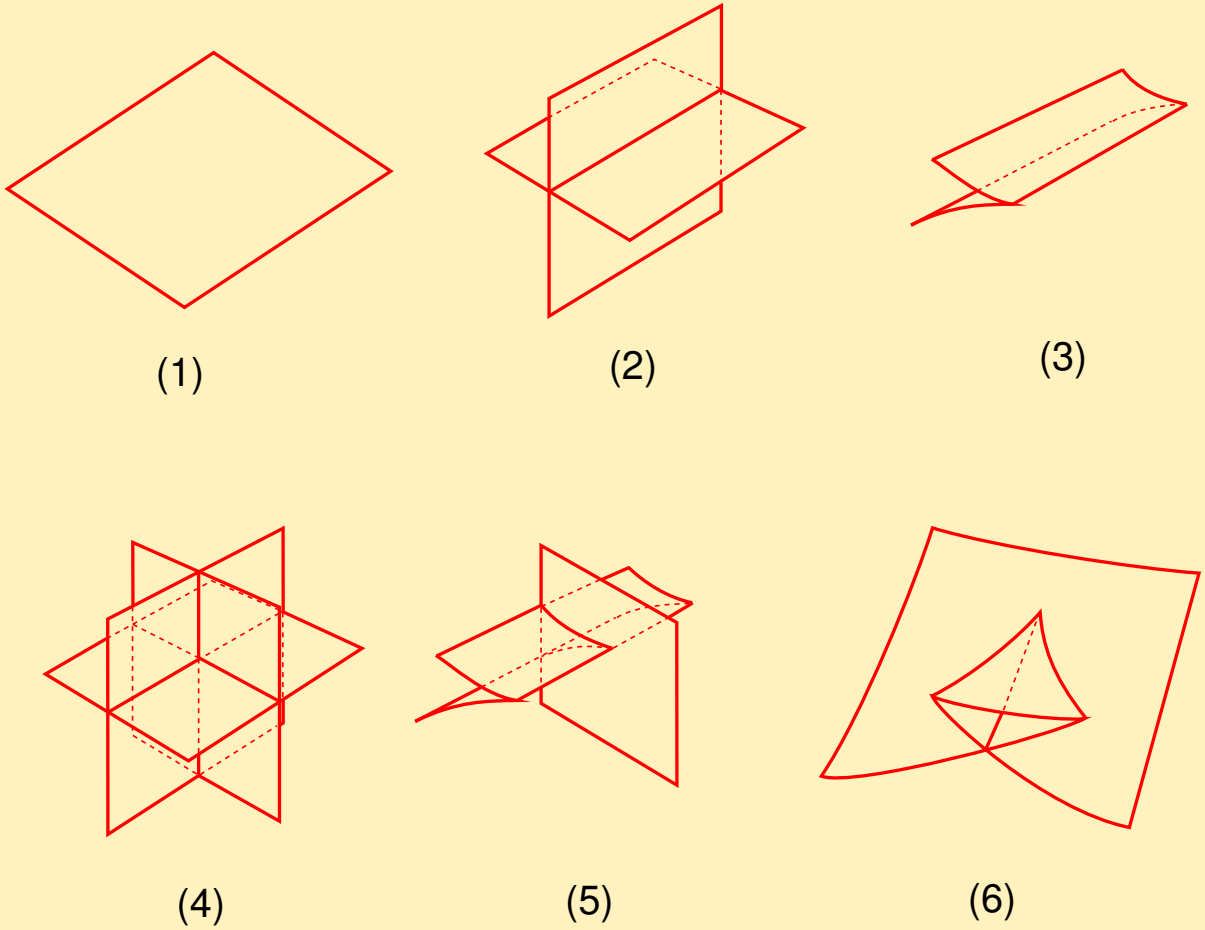


次に複雑 $\kappa = 1$，曲線に沿って現れる



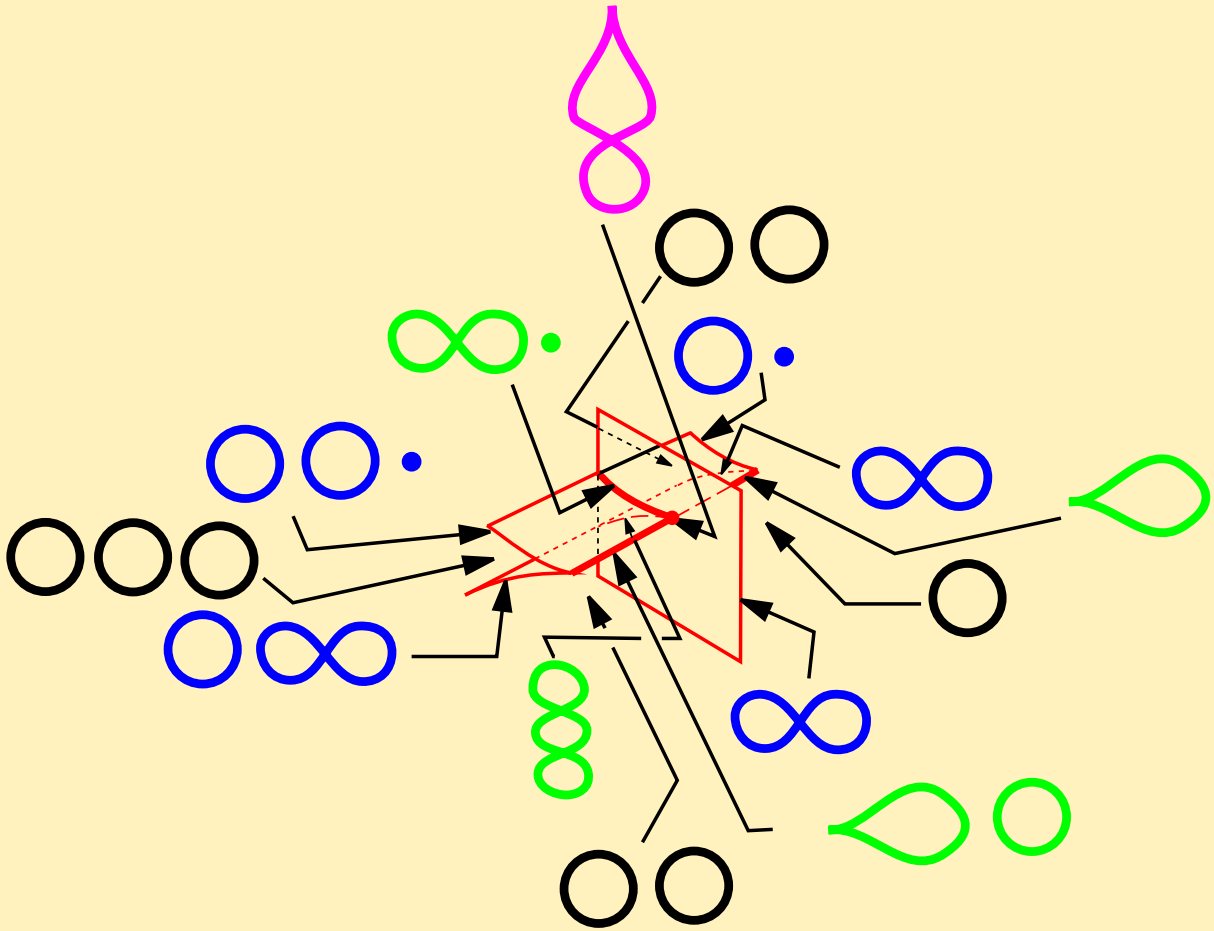
最も単純 $\kappa = 0$，面に沿って現れる

$n = 4,\ m = 3$ の場合



$f : M^4 \to \mathbf{R}^3$ の Jacobi set 像の局所形

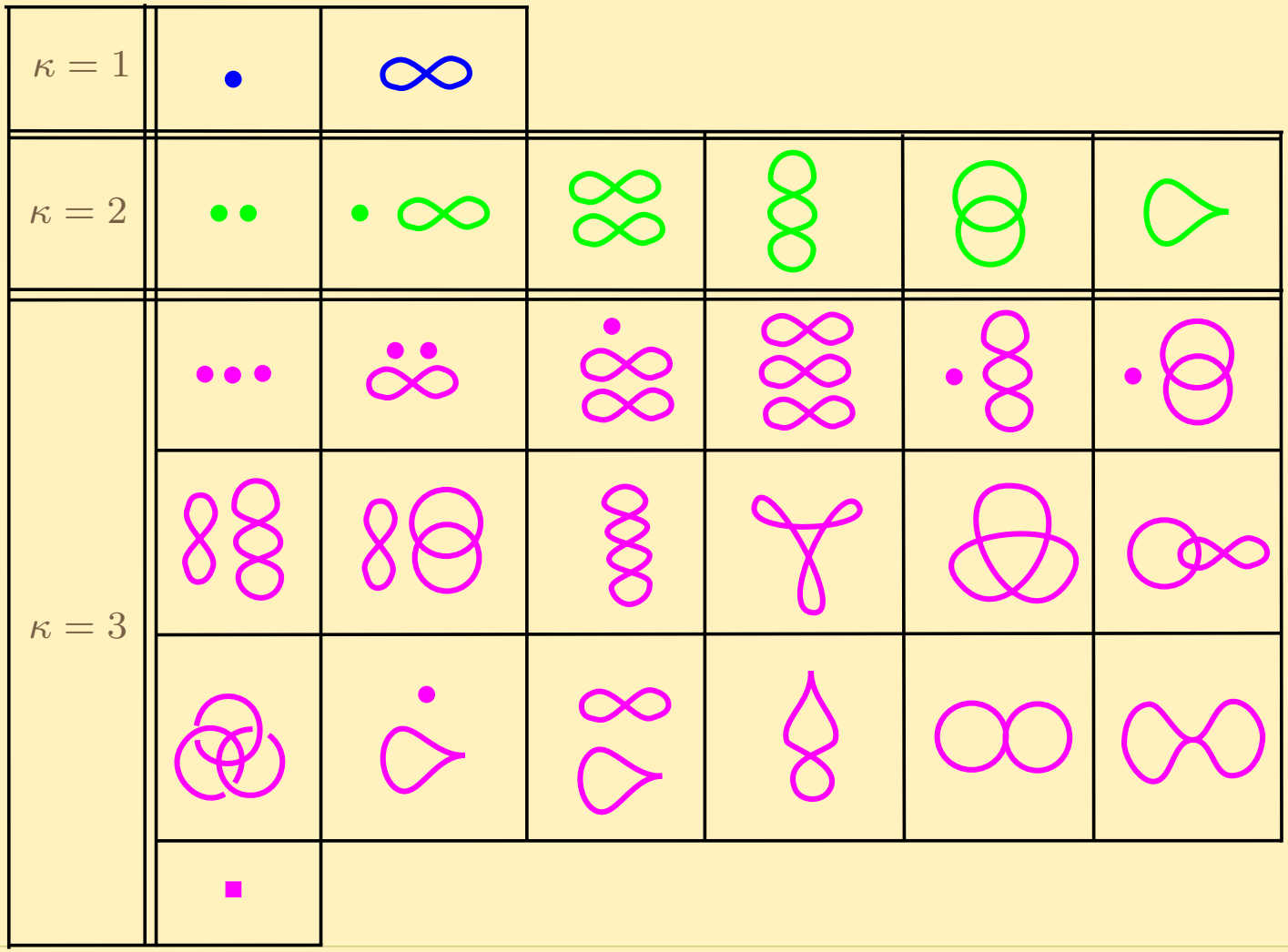
ファイバー変化の例



$f : M^4 \to \mathbf{R}^3$ のファイバー変化の一例

特異ファイバーのリスト

$n = 4,\ m = 3$ の場合



まとめ

写像の特異点論を使うと…

- 特異点の型がリストアップできる
- ファイバーの型をリストアップできる
- どこに特異点（あるいは特異ファイバー）があり，それがどの型か，決定することを大いに助ける

可視化に大きく貢献！

まとめ

写像の特異点論を使うと…

- 特異点の型がリストアップできる
- ファイバーの型をリストアップできる
- どこに特異点（あるいは特異ファイバー）があり，それがどの型か，決定することを大いに助ける

可視化に大きく貢献！

ご清聴有り難うございました