研究集会報告集「結び目の研究」(1994)
1993年10月12日-15日 和歌山県加太国民休暇村研修センター

STABLE MAPS INTO THE PLANE AND LINKS IN 3-MANIFOLDS

佐伯　修（広島大・理）

E-mail address : saeki@math.sci.hiroshima-u.ac.jp

§1. Introduction

与えられた多様体 M^n の位相的性質を調べる方法はいろいろ知られているが、その上の Morse 関数 $f: M^n \to \mathbf{R}$ を使う方法もそのうちの一つである。Morse 関数の特異点（critical point）の近くでの構造を調べることにより、M^n がCW複体のホモトピー型を持つこと、handle 分解を持つこと、Betti 数に関する Morse の不等式、等々が得られる。ここで重要な事実は、どんな C^∞ 級関数 $g: M^n \to \mathbf{R}$ も Morse 関数 $f: M^n \to \mathbf{R}$ で近似でき、従ってどのような多様体も Morse 関数を持つ、ということである。

関数は、値域が $\mathbf{R}$ の C^∞ 級写像とも思えるが、では、この代わりに、平面 $\mathbf{R}^2$ を考えたらどうなるであろうか？実は、この状況で Morse 関数に対応するのが、表題にある stable map（安定写像）である。本稿の最初の目的は、3次元多様体、及びその中の絡み目を、平面への安定写像を使って調べることにある。

一方、写像の理論においては、（性質の良い）写像の分類、あるいは、二つの写像が与えられた時にその二つがどのくらい違うのか、といったことが問題になる。ここでは、3次元多様体論や絡み目の理論が、こういった問題に大いに役に立つ、ということにも触れてみたい。

余談になるが、低次元多様体や絡み目を、写像理論の観点から研究している人は現在あまりいない。そこで、参考文献の欄に、できるだけ多くの文献を載せるようにしたので、是非参考にして頂きたい。

なお、[TY] や [HNT] の結果は、谷山氏、安原氏に教えて頂いた。両氏には、感謝の意を表したい。

§2. Stable map とは何か？

以下、M^3 を、（必ずしも orientable とは限らない）smooth closed 3-manifold とする。

Definition 2.1. C^∞ 級写像 $f: M^3 \to \mathbf{R}^2$ が stable map(安定写像) であるとは、次の (I), (II) が満たされる時を言う。
(I) Local conditions:
${}^\forall p \in M^3$ に対し、
${}^\exists(u,x,y)$: local coordinate centered at p と
${}^\exists(X,Y)$: local coordinate centered at $f(p)$
があって、
(a) $X \circ f = u, Y \circ f = x$ (p : regualr point) or
(b) $X \circ f = u, Y \circ f = x^2 + y^2$ (p : definite fold point) or
(c) $X \circ f = u, Y \circ f = x^2 - y^2$ (p : indefinite fold point) or
(d) $X \circ f = u, Y \circ f = y^2 + ux - x^3$ (p : cusp point)
を満たす。
(II) Global conditions:
(a) $f|(S(f) - \{\text{cusp points}\})$ は immersion with normal crossings (ここで、$S(f) = \{p \in M^3 | \mathrm{rank} df_p < 2\}$ は f の singular set と呼ばれる)。
(b) ${}^\forall p \in M^3$: cusp point に対し、$f^{-1}(f(p)) \cap S(f) = \{p\}$ が成り立つ。

Remark 2.2. Stable map $f: M^3 \to \mathbf{R}^2$ の singular set $S(f)$ は、M^3 内の (non-singular な) コンパクト 1 次元部分多様体 (つまり絡み目) になる。(図 1 参照。)

安定写像 $f: M^3 \to \mathbf{R}^2$ の、特異点のまわりでの局所的な状況については図 1 を、大域的な状況については図 2 を参照。また、f の regular fiber は常に、有限個の S^1 の disjoint union であるが、singular fiber は図 3 にあるような形をしたもの (または S^1) の有限個の disjoint union である。(ただし、一つの singular fiber は、高々二つの singular points しか持たない。これは、global conditions (a), (b) により、$f|S(f)$ が triple point を持たないことによる。)

Fact 2.3. (1) 任意の smooth map $g: M^3 \to \mathbf{R}^2$ は、ある安定写像 $f: M^3 \to \mathbf{R}^2$ で近似できる (例えば、[MaVI] 参照)。ここで、「近似」というのは、写像空間 $C^\infty(M^3, \mathbf{R}^2) = \{g: M^3 \to \mathbf{R}^2 | g \text{ は smooth map }\}$ の (Whitney) C^∞-topology に関して、と言うことである。(この位相に関しては、たとえば、[GG, NF] を参照。)
(2) Smooth map $f: M^3 \to \mathbf{R}^2$ が stable ならば、f に「近い」写像 $h: M^3 \to \mathbf{R}^2$ は f と同じ topological type を持つ。つまり、図式

$$\begin{array}{ccc} M^3 & \xrightarrow{\Phi} & M^3 \\ f\downarrow & & \downarrow h \\ \mathbf{R}^2 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{R}^2 \end{array}$$

を可換にするような微分同相写像 Φ, φ が存在する。(「Stable」という言葉は、ここから来ている。) 実は、本来安定写像は、(次元にかかわらず) この性質を持つものとして定義され、上の Definition 2.1 は「定理」なのであるが、正確な定義が繁雑になるため、ここでは天下り的に Definition 2.1 のように定義した ([L1, L3] 参照)。

Example 2.4. (1) $\pi : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ を $\pi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2)$ で定義される standard projection とし、$f_0 = \pi|S^3 : S^3 \to \mathbf{R}^2$ (S^3 は $\mathbf{R}^4$ の unit sphere) とすると、f_0 は stable で、$S(f_0)(= \{x_3 = x_4 = 0\})$ は S^3 内の trivial knot になって現れる。

(2) $h : S^3 \to S^2$ を Hopf fibration 、$\pi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ を standard projection とし、$g = (\pi|S^2) \circ h : S^3 \to \mathbf{R}^2$ とすると、h は stable でない。というのは、singular set $S(g)$ が S^3 内の torus になってしまう (図 4 参照) からである (stable map の singular set は絡み目になることを思い出して欲しい)。しかし、g に「近い」stable map f として、singular set $S(f)$ が 2-component trivial link になるものが作れる。

(3) その他、S^3 から平面への安定写像の様々な例が、[B] で構成されている。

§3. Stable map と 3-manifold topology

平面への安定写像を使って3次元多様体を調べる試みは、Burlet と de Rham によって、７０年代半ばに初めて行われた。

Theorem 3.1(Burler-de Rham [BdR], 1974). Smooth closed 3-manifold M^3 に対し、安定写像 $f : M^3 \to \mathbf{R}^2$ でその singular set $S(f)$ が definite fold point のみよりなる ($\Longleftrightarrow$ singular fiber は「１点型」のみ) もの (このような stable map f を <u>special</u> と言う) が存在するための必要十分条件は、M^3 が、$S^3, \sharp^r S^1 \times S^2, (\sharp^{r-1} S^1 \times S^2) \sharp (S^1 \tilde{\times} S^2)$ $(r = 1, 2, \cdots)$ ($S^1 \tilde{\times} S^2$ は、S^1 上の non-orientable S^2-bundle) のいずれかと微分同相となることである。

ここで、どんな安定写像 $f : M^3 \to \mathbf{R}^2$ も definite fold point を特異点に持つことに注意する。

上の定理は、ある意味で、special な安定写像があまりない、ということを示唆している。もう少し広いクラスを考えると、次が成り立つ。

Theorem 3.2([Sae3]). Smooth closed orientable 3-manifold M^3 に対し、安定写像 $f: M^3 \to \mathbf{R}^2$ で singular fiber が「1点型」と「8の字型」のみのもの（このような f を <u>simple</u> と言う）が存在するための必要十分条件は、M^3 が graph manifold となることである。

(Graph manifold については、[Ja, JS, Jo, Mo, N, R, Sc, W] 等を参照。)

もう少し（ある程度 reasonable に）クラスを広げることはなかなか難しい。理由は次の定理による。

Theorem 3.3(Levine [L1], 1965). 任意の smooth closed orientable 3-manifold M^3 に対し、安定写像 $f: M^3 \to \mathbf{R}^2$ で、cusp point を持たないものが存在する。

§4. Stable map を使った link の研究

古典的な結び目理論においては、$\mathbf{R}^3$ 内の結び目や絡み目を研究するのに、projection $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ を使うことが多い。ここでは、この代わりに、stable map を使って、一般の3次元多様体内の結び目や絡み目を調べられないか、について考えてゆこう。

Definition 4.1([Sae3, Sae6]). $f: M^3 \to \mathbf{R}^2$ を安定写像をとし、L を M^3 内の絡み目とする。このとき、L が <u>f-trivial</u> であるとは、L を必要なら isotopy で動かして、$f|L$ が embedding かつ $f(L) \cap f(S(f)) = \emptyset$ となることである。

Example 4.2. 安定写像 $f_0 = \pi|S^3 : S^3 \to \mathbf{R}^2$ を Example 2.4 (1) で作ったものとする（$\pi: \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ は standard projection)。この f に対し、次が成り立つ。
f-trivial knot $\Longleftrightarrow$ trivial knot.
f-trivial link $\Longleftarrow$ trivial link （逆は不成立）.
（実は、もう少し広い class の stable maps f についてこれが言える。くわしくは、[Sae6] を参照。）

Proposition 4.3([Sae3]). M^3 内の任意の絡み目 L は、適当な stable map $f: M^3 \to \mathbf{R}^2$ に対し、f-trivial になる。

上の proposition を見る限りでは、我々の定義があまり意味のないもののように見える。しかし、安定写像のクラスを制限すると、たとえば次のような結果も得られる。

Theorem 4.4([Sae3]). M^3 を smooth closed orientable 3-manifold、L を M^3 内の絡み目とする。L が simple な安定写像 $f: M^3 \to \mathbf{R}^2$ (Theorem 3.2 と同じもの) に対して f-trivial となる必要十分条件は、L が graph link となることである。

(Graph link については、[EN, N, U] 等を参照。)

§5. Link theory を使った stable map の研究

Definition 5.1. $f, g: M^3 \to \mathbf{R}^2$ を二つの stable maps とする。このとき、f と g が <u>right-left equivalent</u>(<u>右左同値</u>) であるとは、図式

$$\begin{array}{ccc} M^3 & \xrightarrow{\Phi} & M^3 \\ f\downarrow & & \downarrow g \\ \mathbf{R}^2 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{R}^2 \end{array}$$

を可換にする微分同相写像 Φ, φ が存在することである ($f = \varphi^{-1} \circ g \circ \Phi$)。

写像の理論において最も重要な問題の一つは、写像を右左同値で分類することである。ここでは、この問題は難しすぎるので、もう少し弱い同値関係を導入する。

Definition 5.2([Sae3, Sae4]). 安定写像 f と g が <u>quasi-quivalent</u> であるとは、微分同相写像 $\Phi: M^3 \to M^3$ で、f の各 fiber の各連結成分 F に対し、$\Phi(F)$ が g のある fiber のある連結成分になるようなもの、が存在することである。

Remark 5.3. (1) Right-left equivalent $\Longrightarrow$ quasi-equivalent 。

(2) Quasi-equivalence は、ある写像達の可換図式でも定義できる。詳しくは、[Sae3, Sae4] を参照。

以下で、安定写像を、quasi-equivalence で分類することについて考えよう。安定写像 $f : M^3 \to \mathbf{R}^2$ に対し、$L(f) := S(f) \cup R(f)$ (link associated with f) を次のように定める。$S(f)$ は f の singular set で、$R(f)$ は f の regular fiber の連結成分いくつかの disjoint union である（正確な定義は省略。詳しくは、[Sae3] 参照。感じとしては、f の regular fiber のすべての isotopy classes を寄せ集めたようなもの)。

Theorem 5.4([Sae3]). M^3 を smooth closed orientable 3-manifold 、$f, g : M^3 \to \mathbf{R}^2$ を、simple stable maps とする。このとき、f と g が quasi-equivalent であるための必要十分条件は、associated links $L(f)$ と $L(g)$ が絡み目として（強い意味で）同値となることである。

（正確な statement については、[Sae3] を参照。）

Remark 5.5. f が simple ならば、その associated link $L(f)$ は graph link になる。Graph links はある意味で、もうすでに分類されている ([EN, N]) ので、simple stable maps の quasi-equivalence による分類もできたことになる。

二つの安定写像が与えられたとき、たいていの場合、それらは右左同値ではない。そこで、次に、与えられた二つの安定写像がどのくらい違うのかを計る量 (bifurcation number と呼ばれる）について考えてみよう。

Fact 5.6. $f, g : M^3 \to \mathbf{R}^2$ を二つの stable maps とする。このとき、$^\exists$generic homotopy $f_t : M^3 \to \mathbf{R}^2$ $(t \in [0,1])$ で、$f_0 = f, f_1 = g$ かつ、有限個の t を除き、f_t は stable map 、となるものが存在する。また、f_t が stable にならない t のことを<u>bifurcation point</u> という。（上の事実、及び、generic homotopy の正確な定義については、[Ch, ML1, ML2] 等を参照。）

Definition 5.7([MPSae]). 二つの安定写像 $f, g : M^3 \to \mathbf{R}^2$ に対し、$b(f,g) (\in \mathbf{N} \cup \{0\})$ を、f と g を結ぶ generic homotopies の bifurcation points の最小個数、として定義する。これを f と g の間の <u>bifurcation number</u> と言う。（図5 参照。）

ここでは、bifurcation number を、link theory を使って、下から評価することを考えよう。そのために、まず、link theory の方で一つ言葉を用意しておく。

Definition 5.8(band operation). L を M^3 内の絡み目とし、$b : I \times I \to M^3$ ($I = [0,1]$) を、embedding で、$b(I \times I) \cap L = b(\partial I \times I)$ なるものとする。このとき、新しい絡み目 L' を、$(L - b(\partial I \times I)) \cup b(I \times \partial I)$ を smoothing したものとして作る。このとき、L' は、L から 1 回の band operation をして得られる、と言う。(図6 参照。)

Lemma 5.9([Sae7]). L, L' を M^3 内の二つの絡み目とする。このとき、L に有限回の band operations を施して L' を得られるための必要十分条件は、$[L]_2 = [L']_2$ in $H_1(M^3; \mathbf{Z}_2)$ となることである（ここで、$[\cdot]_2$ は $\mathbf{Z}_2$-homology class を表す)。

（証明の概略）

必要となるのは明らか。十分となることを示すには、まず、L, L' に勝手に orientation を付け、$[L] = [L'] \in H_1(M^3; \mathbf{Z})$ となるように band operation を施す。次に、$\pi_1(M^3)$ の交換子に対応する band operation を施して、L と L' が freely homotopic になるようにする。あとは各 unknotting operation を band operation 2 回で実現すれば良い。

Definition 5.10. L, L' を M^3 内の二つの絡み目で、$[L]_2 = [L']_2$ in $H_1(M^3; \mathbf{Z}_2)$ なるものとする。このとき、$\beta(L, L') (\in \mathbf{N} \cup \{0\})$ を、L から L' を得るのに必要な band operations の最小回数として定義する (β は link 間の距離になる)。

Remark 5.11. L, L' を disjoint になるように M^3 内に同時に実現したときにできる絡み目は、M^3 内に埋め込まれた（non-orientable かも知れない）曲面を張る。$\beta(L, L')$ は、こうしてできる曲面の Euler 数の絶対値の最小数に一致する。L, L' が S^3 内の絡み目のときには、これは谷山ー安原（[TY]）の定義した unoriented C-distance $\bar{d}_C(L, L')$ と完全に一致する。

Theorem 5.12(Thom [T], 1955). $f : M^3 \to \mathbf{R}^2$ を安定写像とすると、$[S(f)]_2^* = w_2(M^3) \in H^2(M^3; \mathbf{Z}_2)$ が成り立つ。ここで、$[S(f)]_2^*$ は、$[S(f)]_2 \in H_1(M^3; \mathbf{Z}_2)$ の Poincaré dual、$w_2(M^3)$ は、M^3 の second Stiefel-Whitney class を表す。特に、$f, g : M^3 \to \mathbf{R}^2$ を二つの安定写像とすると、$[S(f)]_2 = [S(g)]_2$ in $H_1(M^3; \mathbf{Z}_2)$ が常に成り立つ。

上の定理より、二つの安定写像 $f, g : M^3 \to \mathbf{R}^2$ に対して、Definition

5.10 の意味での $\beta(S(f), S(g))$ が定義できることになる。

Proposition 5.13. $f, g : M^3 \to \mathbf{R}^2$ を二つの安定写像とすると、$b(f,g) \geq \beta(S(f), S(g))$ が常に成り立つ。

(証明の概略)

Bifurcation point で singular set の link type が変化するのは、図7、図8の二つの場合しかない([Ch, ML1, ML4] を参照)。いずれの場合も、singular set の変化は、1回の band operation で実現できる。(Bifurcation point を通過しても、link type に変化が起こらないこともあることに注意。) 従って、求める不等式を得る。

Problem 5.14. 一般の3次元多様体 M^3 内の links L, L' ($[L]_2 = [L']_2 \in H_1(M^3; \mathbf{Z}_2)$) に対して、$\beta(L, L')$ を求めよ。(又は、上からの評価、下からの評価を与えよ。)

Remark 5.15. [TY] において、L, L' が S^3 内の結び目(つまり、L, L' がそれぞれ連結)の時には、

$$\frac{|e_p(L) - e_p(L')|}{p-1} \leq \beta(L, L')$$

となることが示されている(ここで、$p \geq 2$ は整数、$e_p(L), e_p(L')$ は S^3 の、それぞれ L, L' に沿った p 重分岐被覆空間の $\mathbf{Z}$-係数 first homology group の生成元の最少個数)。この結果は、もう少し一般に、$\mathbf{Z}$-homology 3-sphere 内の絡み目についても成立する(詳しくは、[TY, HNT] を参照)。

§6. Some invariants for links in S^3 via stable maps

この section では、安定写像を使って、S^3 内の絡み目の不変量を定義することを考える。

Lemma 6.1([Sae7]). L を smooth closed 3-manifold M^3 内の絡み目で、$[L]_2^* = w_2(M^3)$ in $H^2(M^3; \mathbf{Z}_2)$ を満たすものとする(記号については、Theorem 5.12 を参照)。このとき、安定写像 $f : M^3 \to \mathbf{R}^2$ で、$S(f) = L$ となるものが存在する。

Lemma 6.2([Sae6]). L を smooth closed 3-manifold M^3 内の絡み目とする。このとき、安定写像 $f : M^3 \to \mathbf{R}^2$ とその正則値 $a \in \mathbf{R}^2$ で、

$L = f^{-1}(a)$ となるものが存在するための必要十分条件は、L が orientable Seifert surface を M^3 内に張ることである。

Stable map $f_0 : S^3 \to \mathbf{R}^2$ を $f_0 = \pi|S^3$ で定義する。($\pi : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ は standard projection 。Example 2.4 (1) を参照。)

Definition 6.3([Sae6]). L を S^3 内の絡み目とする。このとき、

$$S(L) := \min\{b(f, f_0) | f : S^3 \to \mathbf{R}^2 \text{ stable s.t. } S(f) = L\},$$

$$F(L) := \min\{b(f, f_0) | f : S^3 \to \mathbf{R}^2 \text{ stable s.t. } {}^{\exists}a \in \mathbf{R}^2 \text{ regular value with } f^{-1}(a) = L\},$$

$$T(L) := \min\{b(f, f_0) | f : S^3 \to \mathbf{R}^2 \text{ stable s.t. } L \text{ は } f\text{-trivial}\}$$

と定義する。$S(L), F(L), T(L)$ は L の integer invariants になる。

Proposition 6.4([Sae6]). S^3 内の絡み目 L に対し、次が成り立つ。
(1) $\beta(L, \text{trivial knot}) \leq S(L)$.
(2) $S(L) = 0 \Longleftrightarrow L$ は trivial knot 。
(3) $F(L) = 0 \Longleftrightarrow L$ は trivial knot 。
(4) $T(L) = 0 \Longleftarrow L$ は trivial knot 。 (逆は不成立。)
(5) $S(L) \geq \sharp L - 1$.
(6) $F(L) \geq \sharp L - 1$.
(7) $S(n\text{-component trivial link}) = n - 1$.
(8) $F(n\text{-component trivial link}) = n - 1$.
(9) $F(L) = 1 \Longleftrightarrow L$ は 2-component trivial link $\Longleftrightarrow S(L) = 1$.
(10) $S(L) = 2$, for the torus $(3, 3n)$-link L $(n \neq 0)$.

REFERENCES

[B] M.Bina-Motlagh, Sur certaines applications génériques de S^3 dans le plan, travail de diplôme, Université de Lausanne, 1973.

[BdR] O.Burlet and G.de Rham, Sur certaines applications génériques d'une variété close à 3 dimensions dans le plan, l'Enseign. Math. **20** (1974), 275–292.

[Ca] V.L.Carrara Zanetic, Submersions, maps of constant rank, submersions with folds and immersions, preprint (1992).

[CS] J.S.Carter and M.Saito, Canceling branch points on projections of surfaces in 4-space, Proc. Amer. Math. Soc. **116** (1992), 229–237.

[Ce] J.Cerf, La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et la théorème de la pseudo-isotopie, Publ. Math. I.H.E.S. **39** (1971).

[Ch] E.A.Chíncaro, Bifurcações de aplicações de Whitney, Tese IMPA, 1978.

[CM] P.R.Cromwell and W.L.Marar, Semiregular surfaces with a single triple-point, preprint (1993).

[EN] D.Eisenbud and W.Neumann, *Three-dimensional link theory and invariants of plane curve singularities*, Ann. Math. Stud., no.110, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1985.

[E1] J.M.Èliašberg, On singularities of folding type, Math. USSR Izv. **4** (1970), 1119–1134.

[E2] J.M.Èliašberg, Surgery of singularities of smooth mappings, Math. USSR Izv. **6** (1972), 1302–1326.

[F] Y.K.S.Furuya, Sobre aplicações genéricas $M^4 \to \mathbf{R}^2$, Tese ICMSC-USP, 1986.

[FP1] Y.K.S.Furuya and P.F.S.Porto, Aplicações estáveis $M^4 \to \mathbf{R}^2$, in "5°-*Encontro de Topologia*", ICMSC-USP, 1986.

[FP2] Y.K.S.Furuya and P.F.S.Porto, Some remarks on generic maps from a closed manifold into the plane, preprint (1988).

[GG] M.Golubitsky and V.Guillemin, *Stable mappings and their singularities*, Grad. Texts in Math. no.14, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1973.

[HW] A.Hatcher and J.Wagoner, *Pseudo-isotopies of compact manifolds*, Asterisque **6** (1973).

[HRR] D.K.Hayashida Mochida, M.C.Romero Fuster and M.A.S. Ruas, Geometric characterization of the singularities of height functions on surfaces in 4-space, preprint.

[Hi] J.T.Hiratuka, Aplicações genéricas especiais de uma variedade fechada de dimensão $n+1$ no $\mathbf{R}^n$, Master Thesis, Universidade de São Paulo, 1992.

[HNT] J.Hoste, Y.Nakanishi and K.Taniyama, Unknotting operations involving trivial tangles, Osaka J. Math. **27** (1990), 555–566.

[I1] S.A.Izar, Funções de Morse: um teorema de classificações em dimensão 2, Tese de mestre, Instituto de Matemática e Estatística, USP, 1978.

[I2] S.A.Izar, Funções de Morse: Uma teoria combinatória em dimensão três, Tese, IME-USP, 1983.

[I3] S.A.Izar, Funções de Morse e topologia das superfícies: I) O grafo de Reeb de $f : M \to \mathbf{R}$, Estudos e Pesquisas em Matemática, no.31, IBILCE-UNESP, 1988.

[I4] S.A.Izar, Funções de Morse e topologia das superfícies: II) Classificação das funções de Morse estáveis sobre superfícies, Estudos e Pesquisas em Matemática, no.35, IBILCE-UNESP, 1989.

[I5] S.A.Izar, Funções de Morse e topologia das superfícies: III) Campos pseudo-gradientes de uma função de Morse sobre uma superfície, Estudos e Pesquisas em Matemática, no.44, IBILCE-UNESP, 1992.

[IM] S.Izumiya and W.L.Marar, The Euler number of a topologically stable singular surface in a 3-manifold, preprint (1992).

[Ja] W.Jaco, *Lectures on three-manifold topology*, Regional conference series in math., no.43, Amer. Math. Soc., Rhode Island, 1980.

[JS] W.Jaco and P.Shalen, *Seifert fibered spaces in 3-manifolds*, Mem. Amer. Math. Soc., vol. 21, no. 220, Amer. Math. Soc., Rhode Island, 1979.

[Jo] K.Johannson, *Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries*, Lect. Notes in Math., vol. 761, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1979.

[KS] S.Kikuchi and O.Saeki, Remarks on the topology of folds, preprint (1992).

[Ko1] M.Kobayashi, Simplifying certain mappings from simply connected 4-manifolds into the plane, Tokyo J. Math. **15** (1992), 327–349.

[Ko2] M.Kobayashi, Stable maps with trivial monodromies and inactive log-transformations, preprint (1993).

[KoS] M.Kobayashi and O.Saeki, Simplifying certain stable mappings into the plane, in preparation.

[KLP] L.Kushner, H.Levine and P.Porto, Mapping three-manifolds into the plane I, Bol. Soc. Mat. Mexicana **29**, (1984), 11–33.

[L1] H.Levine, Elimination of cusps, Topology **3** (suppl. 2)(1965), 263–296.

[L2] H.Levine, Mappings of manifolds into the plane, Amer. J. Math.

88 (1966), 357–365.

[L3] H.Levine, *Classifying immersions into* $\mathbf{R}^4$ *over stable maps of 3-manifolds into* $\mathbf{R}^2$, Lect. Notes in Math., vol. 1157, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1985.

[ML1] L.E.Mata-Lorenzo, The Stein factorization for stable maps and pi-stable arcs of maps from 3-manifolds into the plane, Thesis, Brandeis University, 1986.

[ML2] L.E.Mata-Lorenzo, Stable mappings from 3-manifolds into the plane and immersed polyhedra, in *"5°-Encontro de Topologia"*, ICMSC-USP, 1986.

[ML3] L.E.Mata-Lorenzo, Polyhedrons and stable maps from 3-manifolds into the plane, unpublished note.

[ML4] L.E.Mata-Lorenzo, Polyhedrons and pi-stable homotopies from 3-manifolds into the plane, Bol. Soc. Bras. Mat. 20(1989), 61–85.

[MaI] J.N.Mather, Stability of C^∞ mappings: I, the division theorem, Ann. Math. 87 (1968), 89–104.

[MaII] J.N.Mather, Stability of C^∞ mappings: II, infinitesimal stability implies stability, Ann. Math. 89 (1969), 254–291.

[MaIII] J.N.Mather, Stability of C^∞ mappings: III, finitely determined map-germs, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. no.35 (1968), 127–156.

[MaIV] J.N.Mather, Stability of C^∞ mappings: IV, classification of stable map germs by R-algebras, Inst. Hautes Études Sci. Math. no.37 (1969), 223–248.

[MaV] J.N.Mather, Stability of C^∞ mappings: V, transversality, Adv. Math. 4 (1970), 301–336.

[MaVI] J.N.Mather, Stability of C^∞ mappings: VI, the nice dimensions, in *Proc. Liverpool Singularities - Symposium I*, Lect. Notes in Math., vol. 192, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971, 207–253.

[Mi] J.Milnor, *Morse theory*, Ann. Math. Stud. no. 51, Princeton Univ. Press, 1963.

[Mo] J.Morgan, Non-singular Morse-Smale flows on 3-dimensional manifolds, Topology 18 (1978), 41–53.

[MPSae] W.Motta, P.Porto and O.Saeki, Stable maps of 3-manifolds into the plane and their quotient spaces, preprint (1992).

[MPSak] W.Motta, P.Porto and K.Sakuma, A note on unknottedness of the singular set of special generic maps, to appear in Houston J. Math..

[N] W.Neumann, A calculus for plumbing applied to the topology of complex surface singularities and degenerating complex curves, Trans. Amer. Math. Soc. 268(1981), 299–344.

[NF] 野口 広、福田 拓生、初等カタストロフィー、共立全書２０８、１９７６.

[NS] J.J.Nuño Ballesteros and O.Saeki, Singularities of a topologically stable surface in a 3-manifold from the global viewpoint, in preparation.

[O] H.Oyaizu, 3-Manifolds with stable maps, Lecture at Tsukuba Univ., September 1988.

[P1] P.F.S.Porto, Informações topológicas sobre o domínio de certas aplicações estáveis, Tese, ICMSC-USP, 1983.

[P2] P.F.S.Porto, Aplicações genéricas no plano, preprint (1985).

[PF] P.F.S.Porto and Y.K.S.Furuya, On special generic maps from a closed manifold into the plane, Topology Appl. **35** (1990), 41–52.

[R] R. Von Randow, *Zur Topologie von drei-dimensionalen Baummannigfaltigkeiten*, Bonner Math. Schriften ,vol. 14, Bonn,1962.

[Sae1] O.Saeki, Topology of special generic maps of manifolds into Euclidean spaces, Topology Appl. 49(1993), 265–293.

[Sae2] O.Saeki, Notes on the topology of folds, J. Math. Soc. Japan 44(1992), 551–566.

[Sae3] O.Saeki, Simple stable maps of 3-manifolds into surfaces, preprint (1992).

[Sae4] O.Saeki, Simple stable maps of 3-manifolds into surfaces II, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 40(1993), 73–124.

[Sae5] O.Saeki, Topology of special generic maps into $\mathbf{R}^3$, to appear in Mat. Contemporânea.

[Sae6] O.Saeki, Stable maps and links in 3-manifolds, preprint (1993).

[Sae7] O.Saeki, Singular sets of stable maps into surfaces, in preparation.

[SS] O.Saeki and K.Sakuma, Immersed manifolds in Euclidean spaces and their projections, preprint (1993).

[Sak1] K.Sakuma, On special generic maps of simply connected $2n$-manifolds into $\mathbf{R}^3$, Topology Appl. 50(1993), 249–261.

[Sak2] K.Sakuma, On the topology of simple fold maps, to appear in Japanese J. Math..

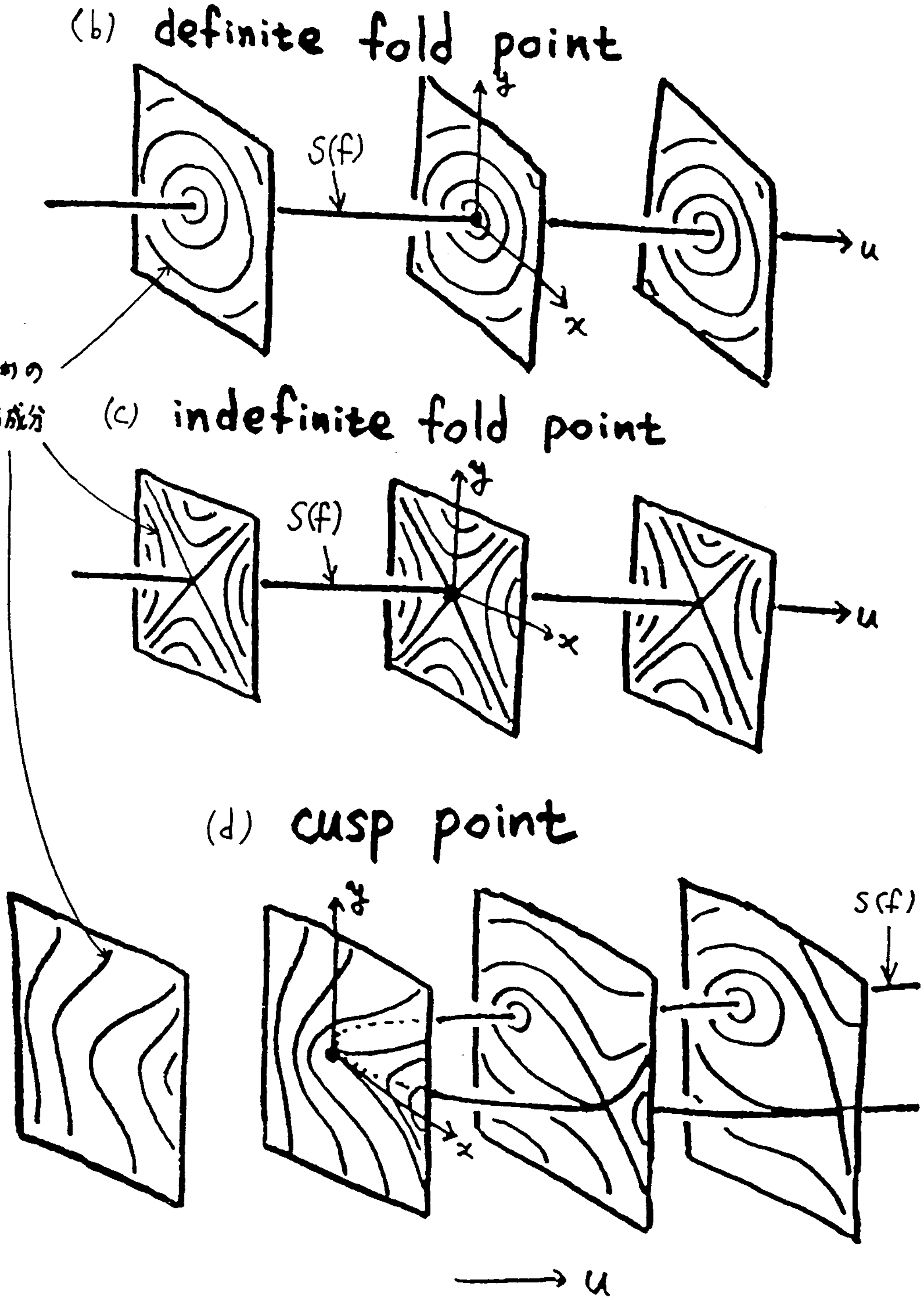
[Sc] A.Scharf, Faserungen von Graphenmannigfaltigkeiten, Math. Ann. **215** (1975), 35–45.

[TY] K.Taniyama and A.Yasuhara, On C-distance of knots, to appear in Kobe J. Math..

[T] R.Thom, Les singularités des applications différentiables, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **6** (1955-56), 43–87.

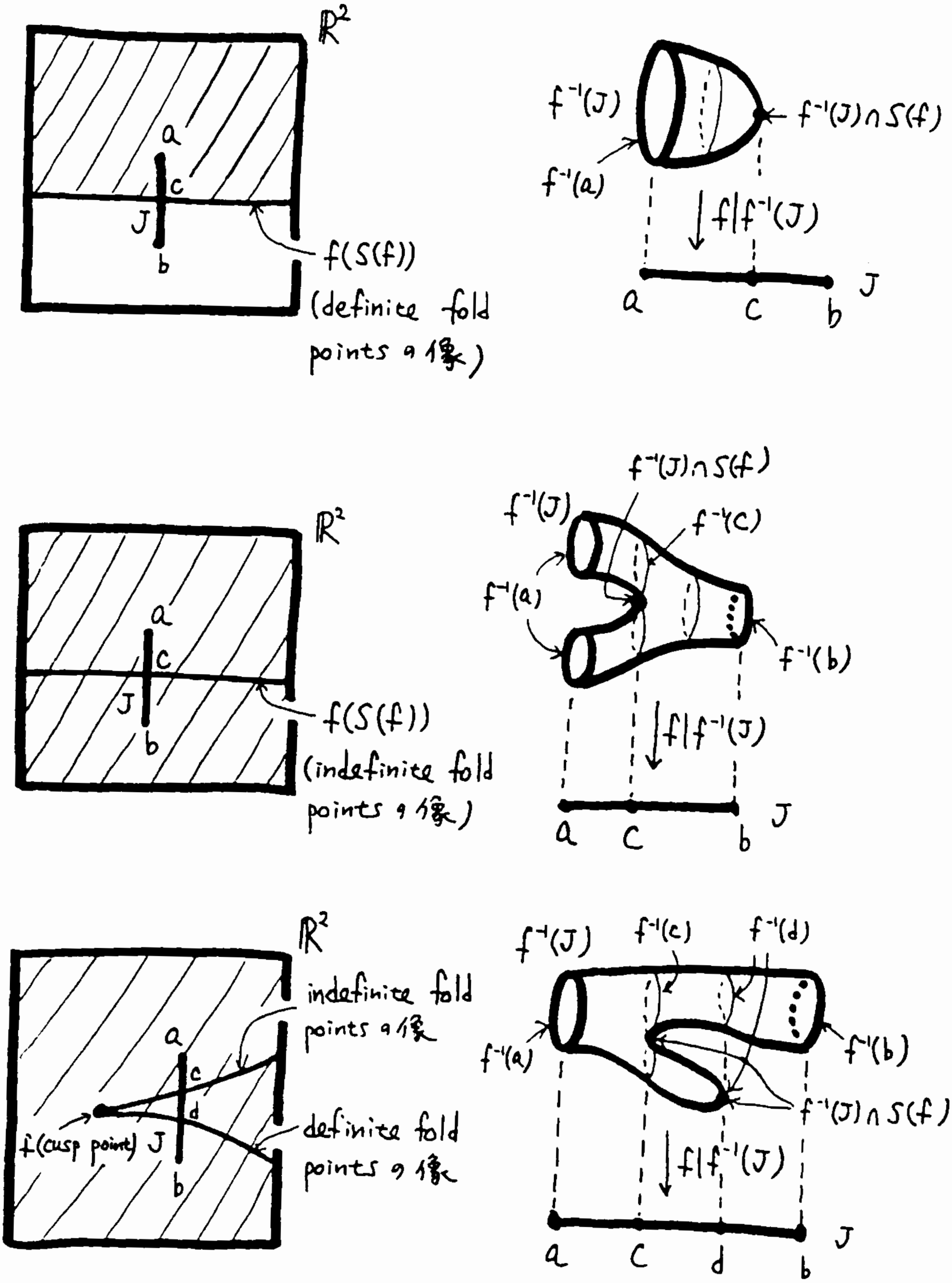
[U] M.Ue, Some remarks on Dehn surgery along graph knots, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **30** (1983), 333–352.

[W] F.Waldhausen, Eine Klasse von 3 dimensionalen Mannigfaltigkeiten I, Invent. Math. **3** (1967), 308–333; II, Invent. Math. **4** (1967), 87–117.



(b) definite fold point
S(f)
y
x
u
f^{-1}
の
連結成分
(c) indefinite fold point
S(f)
y
x
u
(d) cusp point
y
x
S(f)
u

図 1



ℝ²
a
c
J
b
f(S(f))
(definite fold points の像)
f⁻¹(J)
f⁻¹(a)
f⁻¹(J)∩S(f)
f|f⁻¹(J)
a
c
b
J
ℝ²
a
c
J
b
f(S(f))
(indefinite fold points の像)
f⁻¹(J)∩S(f)
f⁻¹(J)
f⁻¹(c)
f⁻¹(a)
f⁻¹(b)
f|f⁻¹(J)
a
c
b
J
ℝ²
indefinite fold points の像
a
c
d
f(cusp point)
J
b
definite fold points の像
f⁻¹(J)
f⁻¹(c)
f⁻¹(d)
f⁻¹(a)
f⁻¹(b)
f⁻¹(J)∩S(f)
f|f⁻¹(J)
a
c
d
b
J

図 2

Stable map の singular fiber（の連結成分）

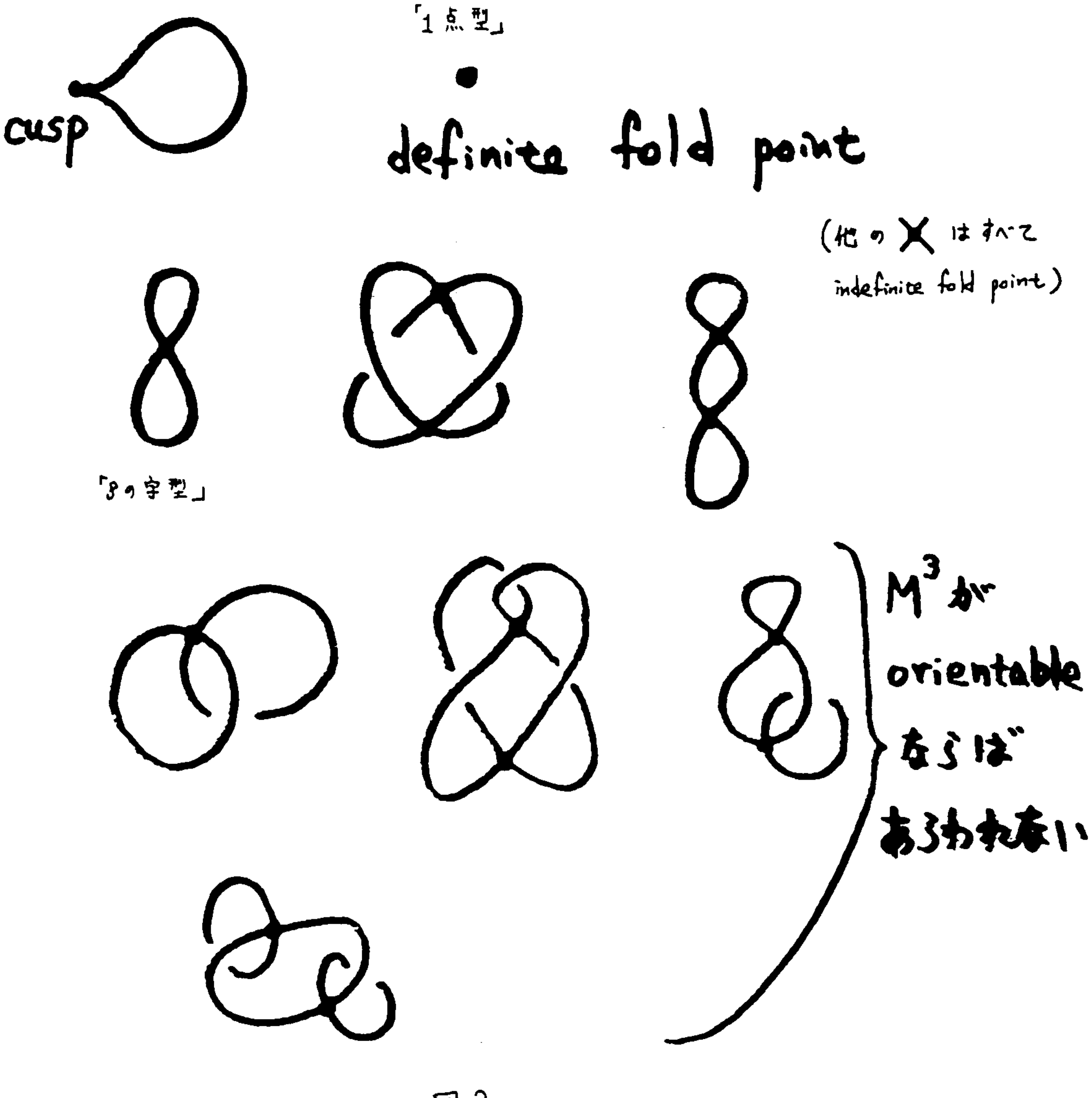


図3

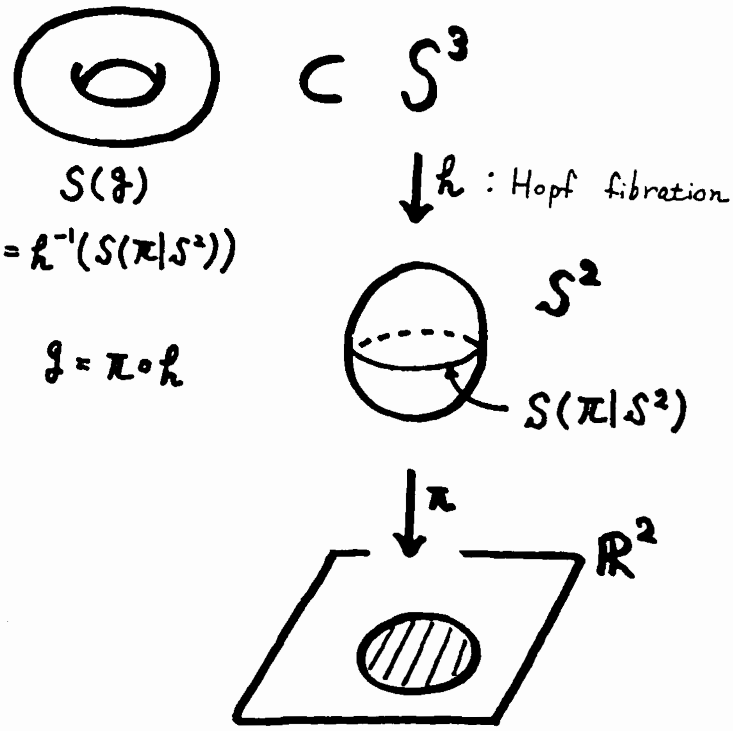

⊂ S^3
$S(g)$
$= h^{-1}(S(\pi|S^2))$
$g = \pi \circ h$
h : Hopf fibration
S^2
$S(\pi|S^2)$
π
$\mathbb{R}^2$

図 4

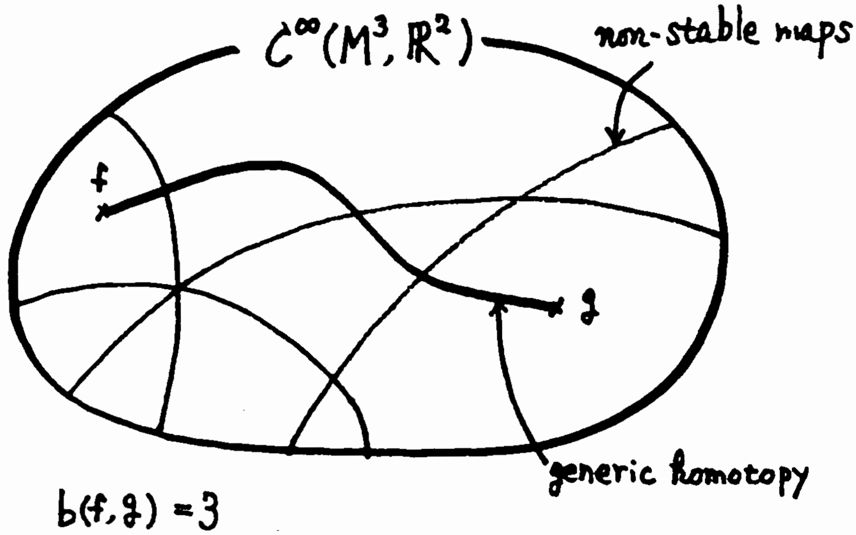

$C^\infty(M^3, \mathbb{R}^2)$
non-stable maps
f
g
generic homotopy
$b(f, g) = 3$

図 5

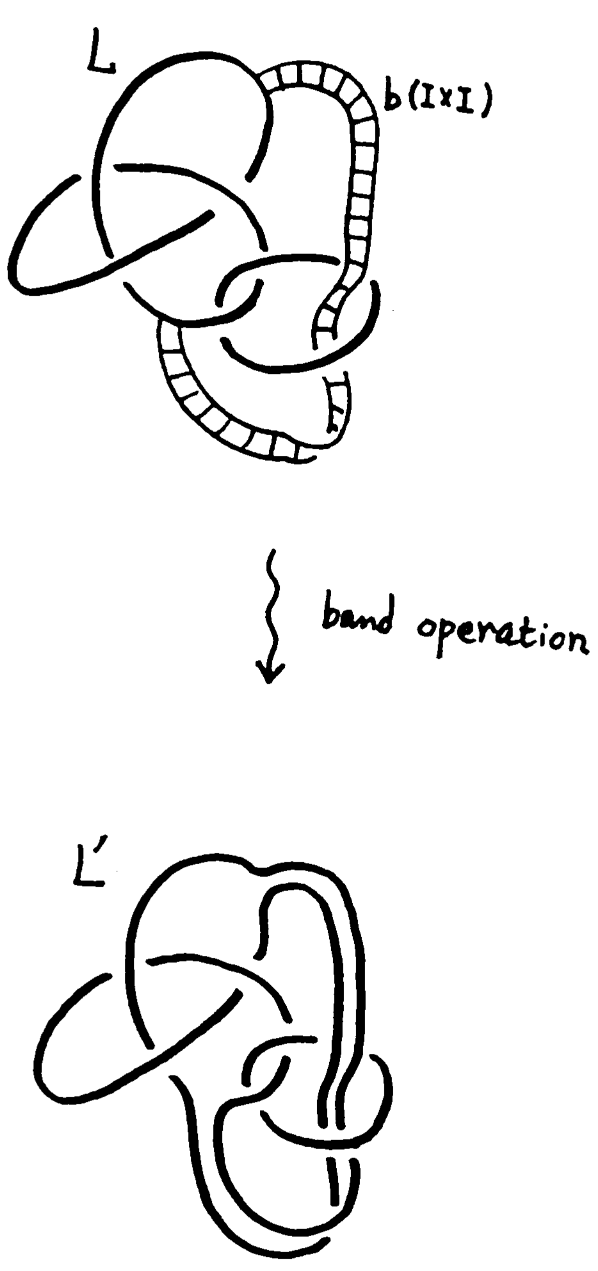
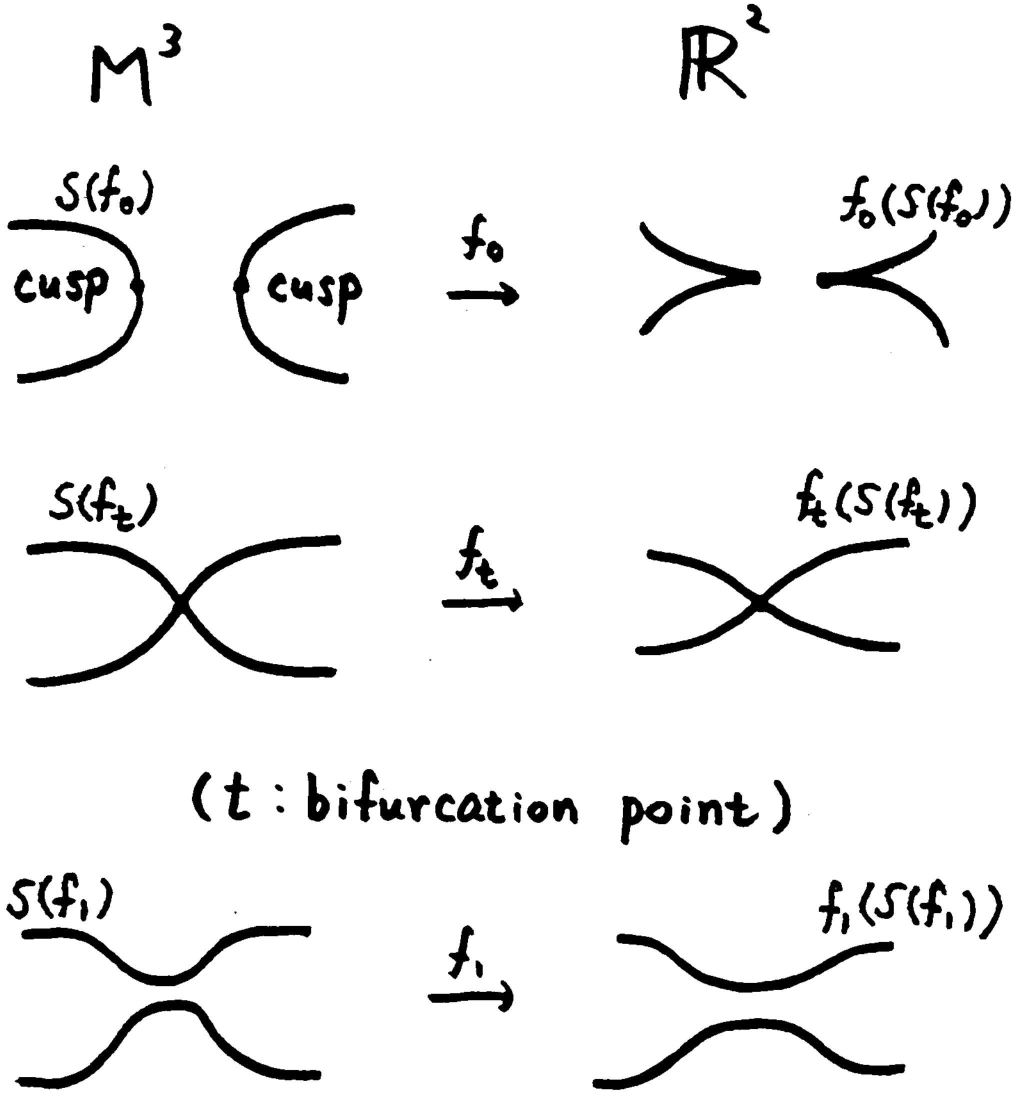


図6



singular set の動きは、1回の
band operation に対応している!

図7

M^3 $\qquad\qquad$ $\mathbb{R}^2$

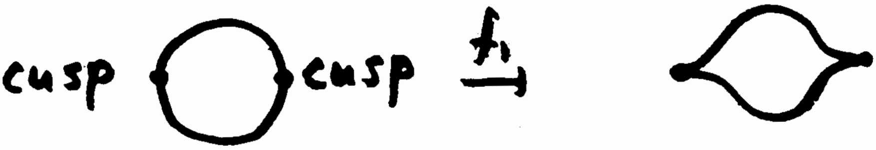
$S(f_0) = \phi$ $\xrightarrow{f_0}$ $f_0(S(f_0)) = \phi$

(local に)

$S(f_t)$ $\xrightarrow{f_t}$ $f_t(S(f_t))$

(t : bifurcation point)

$S(f_1)$ $\qquad\qquad$ $f_1(S(f_1))$



Singular set の動き：
trivial knot の split sum or
その逆
(どちらも1回の band operation
で実現可能)

図 8