

佐伯 修 (SAEKI Osamu)

## A. 研究概要

私は、可微分写像の大域的特異点論を主要テーマとして研究を行ってきた。

多様体という幾何学的対象の、全体としての構造（大域的構造）を調べるのに、その上の可微分関数が役立つことが古くから知られていた（いわゆる Morse 理論）。その理論を多様体間の可微分写像に拡張しようという試みが、1950 年代に Thom によって始められたが、多様体の各点のまわりに現れる特異点（局所的特異点）の複雑性が原因で、その後の研究はあまり進められてこなかった。そこで私は、特異点のタイプを簡単なものに限ったり、次元が低い場合に焦点を絞ったりして、多様体間の写像と多様体の構造の関係について研究を進めてきた。

可微分写像の特異点はこれまでかなり研究されてきているが、ほとんどは局所的振る舞いを調べるにとどまり、大域的研究は今までほとんどなかった。さらに、このような特異点論の観点から可微分多様体の構造を研究することは、意外なことに今までほとんどされてこなかった。これまでの私の研究により、多様体間の写像の特異点が、多様体の構造の本質的な部分を担っていることが明らかにされており、こうした研究が位相幾何学において重要であることが認識されるようになってきている。

最近では、こうした事柄を特異写像の同境理論の観点からも研究している。たとえば、臨界点として極大点・極小点しか持たない Morse 関数の（有向）同境群を、大域的特異点論の立場から定義し、6 次元以上の場合にそれがホモトピー球面のなす群と同型となることを示した [B-22]。この結果は、そうした特異写像の同境群が多様体の可微分構造に本質的に関わることを示唆しており、大変重要な結果であると言える。さらに、向き付けられた曲面上の Morse 関数のなす同境群の群構造も完全に決定した [B-24]。

さらに、本 [E-4] において、多様体間の可微分写像に現れる特異ファイバーの理論を構築した。特に 4 次元多様体上の安定写像の特異ファイバーについて詳しく調べ、ある種の特異ファイバーが 4 次元多様体の位相幾何の本質的な部分を担っていることを明らかにした。なお、この一般論により、特異ファイバーによる値域多様体の分割を基にした普遍複体が構成され、そのコホモロジー群が定義される。本書ではそれが特異点を持つ可微分写像の同境類の不変量を与えることを示した。特別な場合として [B-24] の結果などが解釈できることも合わせて解説した。なお、このように、写像の特異ファイバーに着目した可微分写像の大域的研究はこれまでになく、本書はそうした理論を解説した最初のものである。

以下、最近得られたその他の研究成果の概要を述べよう。

まず [B-23] において、特異点として折り目しか持たない写像（折り目写像という）を許容する 4 次元多様体について調べ、そうした多様体を完全に特徴づけることに成功した。その際、特異点集合の自己交叉数が、4 次元多様体の Pontrjagin 数と一致することを示したが、[B-25] ではそれを一般の次元に拡張し、折り目写像の存在問題への応用を与えた。

さらに [B-35] において、正則ファイバーとして球面の非交和を持つような写像の位相幾何について研究し、special generic map について知られていた結果の拡張に成功した。

また [B-18, B-21] において、3 次元多様体から 5 次元 Euclid 空間へのはめ込みで法束が自明なもの（正則ホモトピーによる既知の分類を精密に調べ、特に

3次元トラスの埋め込みに対して今まで知られていなかった特殊な現象が起こることを発見した。その解明のため、特異点を持った Seifert 多様体を考え、大域的特異点論の立場から研究を行った点に本研究の特徴がある。さらにそうした現象が起こる仕組みを詳しく調べ、それが3次元多様体のスピン構造とそれに対応する Rohlin 不変量に大きく関係することを発見した。

[B-19]においては、単連結な5次元多様体上の開本構造(回転可能構造)のある種の分類を行い、それが境界付き4次元多様体の安定的写像類群を調べるのに役立つことを示した。そして実際に[B-33]において、そうした安定的写像類群を記述した。開本構造は3次元ファイバー結び目([B-1]も参照)とも密接に関連するが、[B-20]においては、球面とは限らない3次元多様体で、1次元ホモロジー群が自由なもの5次元球面への埋め込み(でファイバー結び目となるもの)の同境による分類を、Seifert 行列とスピン構造を用いて記述した。この結果は[B-18, B-21]の結果とも関連し、大変興味深い。

[B-16]においては、 $p$ 次元球面  $n$  個の直積を考え、その  $p$ 次元ホモロジー群の自己同型のうち、自己微分同相写像で実現可能なものを完全に決定した。またその応用として、そのような球面の直積空間に埋め込まれた  $p$ 次元球面の、微分同相による完全な分類を得た。さらに[B-17, B-26]において、3つの球面の直積を余次元1で球面に埋め込んだとき、その補空間の2つの連結成分のうちどちらかの閉包が、2つの球面と1つの円板の直積に微分同相となるかどうかについて調べ、ある特殊な次元の組を除いてはそれが正しく、特殊な場合には反例が無数あることを、[B-16]の結果等を用いて示した。

上記研究以外にも、位相的埋め込みの第一障害類[B-9, B-13, B-15]、単体写像に対する2色塗りわけと Euler 標数公式[B-7, B-12]、3次元多様体の Heegaard 分解と安定写像の関係に関する研究[B-10]、複素超曲面の孤立特異点の位相幾何[B-6]、ファイバー結び目[B-32]、4次元多様体[B-5]、余次元1の埋め込み、空間曲線の微分幾何学的不変量、結び目解消数、曲面結び目の射影に現れる特異点の消去[B-28]、曲面結び目の同境分類[B-34]、安定写像の埋め込みリフト問題の研究[B-11]など、位相幾何学のさまざまな分野を、最近数年間に渡り幅広く研究してきた。さらに、位相幾何学とはあまり関係がないが、一般化された Fibonacci 数列の漸近挙動についても精力的に研究を行ってきた[B-8, B-14, B-27, B-29, B-30, B-31]。

## B. 研究業績(代表作及び最近5年間のもの)

1. O. Saeki, On simple fibered knots in  $S^5$  and the existence of decomposable algebraic 3-knots, *Comment. Math. Helv.* **62** (1987), 587–601.
2. O. Saeki, On 4-manifolds homotopy equivalent to the 2-sphere, *Adv. Stud. Pure Math.* **20** (1992), 301–330.
3. O. Saeki, Topology of special generic maps of manifolds into Euclidean spaces, *Topology Appl.* **49** (1993), 265–293.
4. O. Saeki, Constructing generic smooth maps of a manifold into a surface with prescribed singular loci, *Ann. Inst. Fourier* **45** (1995), 1135–1162.
5. O. Saeki and K. Sakuma, Special generic maps of 4-manifolds and compact complex analytic surfaces, *Math. Ann.* **313** (1999), 617–633.
6. O. Saeki, Real Seifert form determines the spectrum for semiquasihomogeneous hypersurface singularities in  $\mathbf{C}^3$ , *J. Math. Soc. Japan* **52** (2000), 409–431.
7. W. Motta and O. Saeki, A two colour theorem and the fundamental class of

- a polyhedron, in “Real and complex singularities”, ed. J. W. Bruce and F. Tari, Proceedings of the 5th Workshop on Real and Complex Singularities, Brazil, CHAPMAN & HALL/CRC Research notes in Math., Vol. 412, 2000, pp. 94–109.
- 8.** W. Motta, M. Rachidi and O. Saeki, Convergent  $\infty$ -generalized Fibonacci sequences, *Fibonacci Quarterly* **38** (2000), 326–333.
  - 9.** C. Biasi, J. Daccach and O. Saeki, On  $R$ -bordism of maps and obstruction to topological embeddings, *Osaka J. Math.* **37** (2000), 527–535.
  - 10.** T. Kobayashi and O. Saeki, Rubinstein-Scharlemann graphic of 3-manifold as the discriminant set of a stable map, *Pacific J. Math.* **195** (2000), 101–156.
  - 11.** V. L. Carrara, M. A. S. Ruas and O. Saeki, Maps of manifolds into the plane which lift to standard embeddings in codimension two, *Topology Appl.* **110** (2001), 265–287.
  - 12.** J. J. Nuño Ballesteros and O. Saeki, Euler characteristic formulas for simplicial maps, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **130** (2001), 307–331.
  - 13.** C. Biasi, J. Daccach and O. Saeki, A primary obstruction to topological embeddings for maps between generalized manifolds, *Pacific J. Math.* **197** (2001), 275–289.
  - 14.** B. Bernoussi, W. Motta, M. Rachidi and O. Saeki, Approximation of  $\infty$ -generalized Fibonacci sequences and their asymptotic Binet formula, *Fibonacci Quarterly* **39** (2001), 168–180.
  - 15.** C. Biasi, J. Daccach and O. Saeki, A primary obstruction to topological embeddings and its applications, *Manuscripta Math.* **104** (2001), 97–110.
  - 16.** L. A. Lucas and O. Saeki, Diffeomorphisms of a product of spheres and embedded spheres, *Topology Appl.* **123** (2002), 471–478.
  - 17.** L. A. Lucas and O. Saeki, Embeddings of  $S^p \times S^q \times S^r$  into  $S^{p+q+r+1}$ , *Pacific J. Math.* **207** (2002), 447–462.
  - 18.** O. Saeki, A. Szűcs and M. Takase, Regular homotopy classes of immersions of 3-manifolds into 5-space, *Manuscripta Math.* **108** (2002), 13–32.
  - 19.** O. Saeki, Open books on 5-dimensional manifolds, *Hiroshima Math. J.* **32** (2002), 189–205.
  - 20.** V. Blanloeil and O. Saeki, Theory of concordance for non-spherical 3-knots, *Trans. Amer. Math. Soc.* **354** (2002), 3955–3971.
  - 21.** O. Saeki and M. Takase, Spin structures and codimension two embeddings of 3-manifolds up to regular homotopy, *Trans. Amer. Math. Soc.* **354** (2002), 5049–5061.
  - 22.** O. Saeki, Cobordism groups of special generic functions and groups of homotopy spheres, *Japanese J. Math.* **28** (2002), 287–297.
  - 23.** O. Saeki, Fold maps on 4-manifolds, *Comment. Math. Helv.* **78** (2003), 627–647.
  - 24.** K. Ikegami and O. Saeki, Cobordism group of Morse functions on surfaces, *J. Math. Soc. Japan* **55** (2003), 1081–1094.
  - 25.** T. Ohmoto, O. Saeki, and K. Sakuma, Self-intersection class for singularities and its application to fold maps, *Trans. Amer. Math. Soc.* **355** (2003), 3825–3838.
  - 26.** L. A. Lucas and O. Saeki, Codimension one embeddings of product of three

spheres, *Topology Appl.* **146-147** (2005), 409–419.

**27.** B. Bernoussi, M. Rachidi and O. Saeki, Extending Bernoulli-Euler’s method for finding zeros of holomorphic functions, *Fibonacci Quarterly* **42** (2004), 55–65.

**28.** O. Saeki and Y. Takeda, Canceling branch points and cusps on projections of knotted surfaces in 4-space, *Proc. Amer. Math. Soc.* **132** (2004), 3097–3101.

**29.** W. Motta, M. Rachidi and O. Saeki, Generalized Fibonacci sequences and Ostrowski’s theorem, *Journal of Interdisciplinary Mathematics* **7** (2004), 221–231.

**30.** B. Bernoussi, M. Rachidi and O. Saeki, Factorial Binet formula and distributional moment formulation of generalized Fibonacci sequences, *Fibonacci Quarterly* **42** (2004), 320–329.

**31.** B. Bernoussi, W. Motta, M. Rachidi and O. Saeki, On periodic  $\infty$ -generalized Fibonacci sequences, *Fibonacci Quarterly* **42** (2004), 361–367.

**32.** V. Blanœil, Y. Matsumoto and O. Saeki, Pull back relation for non-spherical knots, *J. Knot Theory Ramifications* **13** (2004), 689–701.

**33.** O. Saeki, Stable mapping class groups of 4-manifolds with boundary, to appear in *Trans. Amer. Math. Soc.*

**34.** V. Blanœil and O. Saeki, Cobordisme des surfaces plongées dans  $S^4$ , to appear in *Osaka J. Math.*

**35.** O. Saeki and K. Suzuoka, Generic smooth maps with spherical fibers, to appear in *J. Math. Soc. Japan.*

### C. 代表作の内容

**1.** 3次元ファイバー結び目の分類について考察し、応用として、分解可能な3次元代数的結び目の具体例を無限個構成した。

**2.** 2次元球面とホモトピー同値な4次元多様体について、その微分構造と境界3次元多様体の関係について考察した。

**3.** Special generic 写像の理論を構築し、平面へそうした写像を持つ多様体を特徴付け、さらに球面の可微分構造との深い関係を発見した。

**5.** 4次元多様体上の special generic 写像の性質を調べ、そうした写像を持つ複素曲面を完全に決定した。

**23.** 折り目写像を持つ4次元多様体を完全に特徴づけた。

### D. 講演 (最近 5 年以内のもの)

**1.** Topology of singular fibers of stable maps, 「特異点論と力学系」, 京都大学数理解析研究所, 2000年6月1日.

**2.** Stable maps and their singular fibers, “The 6th Workshop on Real and Complex Singularities”, São Carlos, Brazil, 2000年7月17日.

**3.** Open books and isotopy of 4-manifolds, “XII Encontro Brasileiro de Topologia”, Niteroi, Brazil, 2000年8月4日.

**4.** 安定写像と4次元トポロジー, 日本数学会年会特別講演, 慶應義塾大学, 2001年3月26日.

**5.** Fold maps on 4-manifolds, International Conference on Topology in Matsue 2002 joined with The Second Japan-Mexico Topology Symposium, 島根大学, 2002年6月28日.

**6.** Fold maps on 4-manifolds, 「実・複素特異点のトポロジー II」, 鹿児島大学,

2002年12月9日.

7. 安定写像の特異ファイバーと4次元多様体の符号数, 「4次元のトポロジー」, 広島大学, 2003年1月22日.
8. 曲面結び目のコボルディズム, 「4次元トポロジー研究集会」, 広島大学, 2004年1月29日.
9. Universal complex of singular fibers and cobordism of singular maps, 「はこだて特異点研究集会」, サン・リフレ函館, 2004年10月28日.
10. Topology of manifolds and singularities of differentiable maps, 「多様体のトポロジーの未来へ」, 東京大学, 2004年11月8日.

#### E. 専門書執筆

1. 「幾何学と特異点」, 泉屋周一, 佐野貴志, 佐伯修, 佐久間一浩著, 共立出版, 2001年.
2. 「特性類講義」, J. W. ミルナー, J. D. スタシエフ著, 佐伯修, 佐久間一浩訳, シュプリンガー東京, 2001年.
3. 「複素超曲面の特異点」, J. W. ミルナー著, 佐伯修, 佐久間一浩訳, シュプリンガー東京, 2003年.
4. “Topology of Singular Fibers of Differentiable Maps”, by O. Saeki, Lecture Notes in Math., Vol. 1854, Springer-Verlag, 2004.

#### F. 学位

博士(理学), 東京大学大学院理学系研究科, 1992年2月.

#### G. 受賞歴

1996年度日本数学会賞建部賢弘賞受賞(微分可能写像の大域的特異点理論)

#### H. 研究集会の主催(最近5年以内のもの)

1. XII Brazilian Meeting of Topology, Niteroi, Brazil, July 31 – August 4, 2000 (as a member of the scientific committee).
2. 4次元トポロジー研究集会, 広島大学, 2001年1月29日~31日(共同主催者: 松本堯生氏(広島大学)).
3. 4次元トポロジー研究集会, 広島大学, 2002年1月21日~23日(共同主催者: 松本堯生氏(広島大学)).
4. The 7th Workshop On Real And Complex Singularities, São Carlos, Brazil, July 29 – August 2, 2002 (as a member of the scientific committee).
5. 多様体のトポロジーの未来へ, 東京大学, 2004年11月8日~11日(世話人の1人として).

#### I. その他の特記事項

1. Proceedings of the XI Brazilian Topology Meeting (World Scientific, 2000)の編集 (with S. Firmo and D. L. Gonçalves).
2. 種々の雑誌への投稿論文の査読多数. (J. Math. Soc. Japan, Tokyo J. Math., Kodai Math. J., Kobe J. Math., J. Math. Kyoto Univ., Osaka J. Math., Nagoya Math. J., Hiroshima Math. J., Tsukuba J. Math., Kyushu J. Math., Topology, Topology Appl., Manuscripta Math., Proc. Amer. Math. Soc., Trans. Amer. Math. Soc., J. Knot Theory Ramifications, Mat. Contemp., etc.)
3. トポロジー研究連絡会議構成員.
4. 日本学術振興会科学研究費補助金審査委員.

5. 博士論文審査員 (Univ. of São Paulo (Brazil), 広島大学, 九州大学) .

6. 集中講義

(1) Introduction to the topology of special generic maps, 3rd International Workshop on Real and Complex Singularities, ICMSC-USP, São Carlos (Brazil), 1994.

(2) 3次元空間内の特異曲面とその応用, 高知大学理学部, 1996.

(3) 写像の特異点と多様体の微分構造, 大阪大学理学部, 1998.

(4) オイラー標数公式とその応用, 山形大学理学部, 1998.

(5) 特異曲面をめぐって, 岡山大学環境理工学部, 1999.

(6) 特異曲面とオイラー標数, 山口大学大学院理工学研究科, 2000.

(7) 曲面上のモース関数とオイラー標数, 埼玉大学理学部・理工学研究科, 2000.

(8) モース関数とコボルディズム, 北海道大学理学部, 2001.

(9) 安定写像の特異ファイバーのトポロジー, 東京大学大学院数理科学研究科, 2004.

7. 公開講座

等高線のトポロジー, 九州大学大学院数理学研究院, 2004年度公開講座「現代数学入門」, 2004年8月10日.

8. 外部資金採択状況 (科学研究費補助金を除く)

(1) スイス政府奨学金留学生 (1989年) .

(2) 日本学術振興会特定国派遣研究者 (1997年) .