特異点と特性類
— 具体例の果たす重要な役割

佐伯　修*　（九州大数理）

1　序

数学において具体例が重要であることは言うまでもない．どんなに高尚な数学理論を打ち立てても，具体例がなければ，あるいはあったとしても自明な例やつまらない例しかなければ，その理論は general nonsense として白い目で見られてしまう．

しかし具体例は，単に理論の正当性を訴えるためだけにあるのではない．ある一般的な結論を得るために，具体例が重要な役割を果たすことがある．ここでは特異点と特性類の理論において，こうした具体例の重要性についてお話したいと思う．

なお講演は他の分野の方や，大学院生などの初学者にもできるだけわかりやすくするように努めるつもりである．そのため，専門家には多少物足りない講演となる可能性もあるが，その点はご了承願いたい．

2　例

まずはわかりやすい例から始めよう．位相空間 X が有限単体複体に分割された多面体 P と同相であったとする．その k 次元単体の個数（0 次元単体とは頂点を，1 次元単体とは通常の辺を，2 次元単体とは面（三角形）を，それぞれ表す）を α_k とおいたとき，

$$\chi(X) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \alpha_k$$

を位相空間 X の **Euler 標数**と呼ぶのであった．ここで n は多面体 P の次元を表す．これは一見，多面体 P の選び方（つまり X を多面体に分割する仕方）に依存しているように見えるが，そうした分割の仕方にはよらないことが知られている．それは，X のホモロジー群という位相不変量を通して得られる量として Euler 標数が記述できるからである．

ではたとえば具体的に 2 次元球面 S^2 の Euler 標数を求めてみよう．定義から，それを多面体に分割して，頂点や辺，面の個数を数えて足したり引いたりすれば得られる．実際図 1 のように考えると，$\chi(S^2) = 4 - 6 + 4 = 6 - 12 + 8 = 2$ となることがわかる．

* *e-mail*: saeki@math.kyushu-u.ac.jp, *homepage*: http://www.math.kyushu-u.ac.jp/~saeki

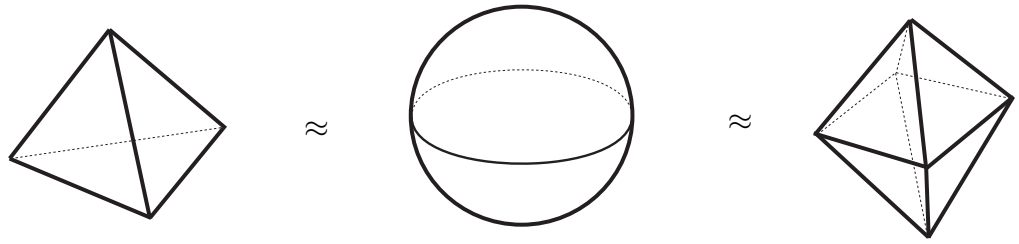

図 1: 2 次元球面と同相な多面体

あまりにも簡単すぎる例であると思われるかも知れないが，ここで言いたかったことは，$\chi(S^2) = 2$ という事実を証明するには，具体的な単体分割の例一つについて計算すれば事足りる，ということである.（上で二つの例について計算しているのは，実際に計算結果が一致することをお見せするためであって，本当は片方だけで十分である.）すべての単体分割について計算する必要はない．それは，Euler 標数が位相不変量であることがわかっているからである．したがって例としては単体の個数がきちんと数えられるものが要求される．

次にもう少し “高尚” な例を挙げてみよう．コンパクトで境界を持たない可微分多様体 M の上にベクトル場 $\mathbf{X}$ が与えられたとする．ただし $\mathbf{X}$ の特異点（すなわち $\mathbf{X}(p) = 0$ となる点 $p \in M$）は孤立していると仮定する．このとき各特異点 p に対して，**指数** $\mathrm{ind}_p(\mathbf{X}) \in \mathbf{Z}$ が，

$$q \mapsto \mathbf{X}(q)/||\mathbf{X}(q)|| \tag{2.1}$$

で定まる写像 $S_\varepsilon^{m-1} \to S^{m-1}$ の写像度として定義される．ここで M における点 p の近傍を $\mathbf{R}^m$ $(m = \dim M)$ と同一視し，S_ε^{m-1} は点 p を中心とする半径の十分小さな球面を表している．このとき M の Euler 標数 $\chi(M)$ について

$$\chi(M) = \sum_p \mathrm{ind}_p(\mathbf{X}) \tag{2.2}$$

が成り立つことが，**Poincaré–Hopf の定理**として知られている（ここで点 p は $\mathbf{X}$ の特異点すべてを動く）.

この定理の証明としては次が良く知られている．まず $\mathbf{X}$ を少し変えて，すべての特異点で上の写像 (2.1) が微分同相写像であるようにできる.（これは $\mathbf{X}$ を M の接束の切断と思ったときに，それが零切断に横断的になるようにすることに対応する.）このとき (2.2) の右辺の指数の総和は変わらないようにできる．次に，そうした性質を持つ二つのベクトル場 $\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1$ が与えられたとき，(2.2) の右辺で定義される指数の総和が両者で等しいことを，$\mathbf{X}_0$ と $\mathbf{X}_1$ を結ぶベクトル場の 1 助変数族の特異点集合（向き付けられた 1 次元多様体である）を用いて示す．こうして指数の総和がベクトル場によらず，多様体 M の不変量であることがわかる（詳細はたとえば [6] を参照）.

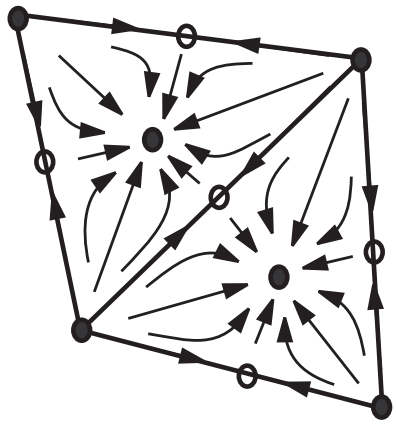

図 2: 単体ごとのベクトル場

したがってあとは特別なベクトル場についてのみ (2.2) を確かめれば良いことになる．そこで多様体 M を単体分割し，各単体上で図 2 のようなベクトル場を考えよう（図ではわかりやすくするためにベクトル場というよりも，それに対応する流れを表している）．このベクトル場は，特異点を各単体の重心に持ち，そこでの指数は単体の次元を k としたとき $(-1)^k$ であることが容易に確かめられる．したがって指数の総和は単体の個数の次元に関する交代和となり，これは多様体 M の Euler 標数 $\chi(M)$ に他ならない．

このように，多様体上の具体的なベクトル場（と言っても本当に具体的なものではなく，どんな多様体上にも構成できるという意味で，ある種普遍的なもの）を構成することにより，Poincaré–Hopf の定理が証明できることになる.（なお，図 2 のようなベクトル場を構成する代わりに，多様体 M 上の Morse 関数 $f : M \to \mathbf{R}$ の gradient ベクトル場を用いる構成法もある.）

つまり，式 (2.2) の右辺で定義される量がベクトル場によらない多様体 M 自身の不変量であることがわかれば，特定のベクトル場について公式を確かめれば良いことになり，あとは Euler 標数との関係が明確な具体例を構成すれば良いわけである．ただし，そのような具体例を構成するにはそれなりのアイデアが必要である．

次に多様体の符号数と特性類に関する Hirzebruch の符号数定理を考えてみる．向き付けられた $4k$ 次元の閉多様体 M に対してその**交叉形式**が，カップ積と，基本類との Kronecker 積を用いて

$$q_M : H^{2k}(M;\mathbf{R}) \times H^{2k}(M;\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$$

なる（非退化な）対称双 1 次形式として定まる．これを表す対称行列の正の固有値の個数から負の固有値の個数を差し引いて得られる整数を多様体 M の**符号数**と呼んで $\sigma(M)$ と書く．これを M の特性類を用いて表すのが次の Hirzebruch の符号数定理である．

定理 2.1. $\{L_j(p_1, p_2, \ldots, p_j)\}$ を，ベキ級数

$$\frac{\sqrt{t}}{\tanh\sqrt{t}} = 1 + \frac{1}{3}t - \frac{1}{45}t^2 + - \cdots + \frac{(-1)^{j-1}2^{2j}B_j}{(2j)!}t^j + \cdots$$

に属する多項式の乗法的列とする．このとき，向き付けられた可微分閉多様体 M^{4k} の符号数 $\sigma(M^{4k})$ は，$L[M^{4k}]$ に等しい．

ここで p_i は i 次の Pontrjagin 類を表しており，B_j は Bernoulli 数である．乗法的列，$L[M^{4k}] \in \mathbf{Z}$ 等の詳細はここでは割愛させていただくが，要するに符号数 $\sigma(M^{4k})$ が，多様体 M^{4k} の Pontrjagin 類という特性類の有理数係数多項式として得られるコホモロジー類に，M の基本類を代入して得られる整数として書け，その多項式も具体的にわかる，ということである（詳細はたとえば [7] を参照）．たとえば

$$\sigma(M^4) = \frac{1}{3}p_1[M^4], \quad \sigma(M^8) = \frac{1}{45}(7p_2 - p_1^2)[M^8],$$
$$\sigma(M^{12}) = \frac{1}{945}(62p_3 - 13p_2p_1 + 2p_1^3)[M^{12}], \ \ldots$$

等となる．

ここでは上の定理の証明に具体例が重要な働きをすることを見よう．まず，符号数には次の著しい性質がある．それは同境不変であることである．2 つの向き付けられた同次元閉多様体 M_0, M_1 が**同境**であるとは，あるコンパクトで向き付けられた多様体 W が存在して，その境界 ∂W が向き付けられた多様体として $(-M_0) \cup M_1$ と微分同相となるときをいう．なお $-M_0$ は多様体 M_0 の向きを逆にしたものを表す．同境な多様体の符号数は等しいことが知られている．また，直積多様体の符号数はそれぞれの多様体の符号数の積に等しいことも知られている．

さらにある特定の次元の向き付けられた閉多様体の同境類全体の集合には，非交和により自然に加法群の構造が入る．これを同境群という．さらにすべての次元を考慮に入れて直積まで考えると，同境類全体は可換環にもなる．これを Ω_* と書く．この構造は 20 世紀半ばに盛んに計算され，次が知られている：テンソル積 $\Omega_* \otimes \mathbf{Q}$ は $\mathbf{Q}$ 上の多項式代数であって，互いに独立な生成元 $\mathbf{C}P^2$, $\mathbf{C}P^4, \mathbf{C}P^6, \ldots$ を持つ．

このことと符号数の同境不変性などを用いると，Hirzebruch の符号数定理を証明するには，そこの公式が上の生成元達に対して成り立つことを見れば良いことがわかる．実際複素射影空間の符号数や特性類の計算は容易であり，符号数定理がかくして証明される．

このような例は枚挙にいとまが無い．たとえば森田 [8, 9] や Miller[5] は，閉曲面の写像類群の $\mathbf{Q}$ 係数コホモロジー環の構造を調べるために，特性類が非自明な曲面束を実際に構成したりしている．

3　特異点の Thom 多項式

ではいよいよ可微分写像の特異点の話に入ろう．$f : M \to N$ を多様体間の可微分写像とする．正確な定義はここでは避けるが，Σ を “特異点型” とし，

$$\Sigma(f) = \{p \in M \mid f \text{ は点 } p \text{ で } \Sigma \text{ 型の特異点を持つ}\} \tag{3.1}$$

とおく．Σ が適当な条件を満たし，なおかつ f が十分にジェネリックであれば，$\Sigma(f)$ の閉包 $\overline{\Sigma(f)}$ は M のホモロジー類を表し，その Poincaré 双対としてコホモロジー類 $[\Sigma(f)]^* \in H^*(M)$ が定まる．（係数は状況によって $\mathbf{Z}_2$ だったり $\mathbf{Z}$ や $\mathbf{Q}$ だったりする.）さらにこのコホモロジー類は，接束の形式的差束 $f^*TN - TM$ の特性類（Stiefel–Whitney 類や Pontrjagin 類）の多項式として書け，その多項式は特定の写像 f によらずに普遍的に定まることが知られている（たとえば [1, 17] 参照）．この多項式のことを Σ の **Thom 多項式**と呼ぶ.

なお，Thom 多項式の存在は可微分写像の分類空間的なものの存在と，そのコホモロジー環の構造から証明される．こうして定まる Thom 多項式はしかし，具体的な Σ に対して実際に計算するのは困難であった．Thom 多項式の概念自体は 20 世紀半ばに既にあったのだが，1990 年頃になっても具体的に計算されたものはほとんど数えるほどしかなかった.

ところが Rimányi [10] は，大変単純だが斬新なアイデアで次のようにして Thom 多項式の計算をかなり進展させた．それはまさに “普遍的な具体例” の構成によるものであった.

Rimányi が使ったのは，“特異写像の分類空間” と言われるもの（の構成要素）であった．特異写像の分類空間とは，次のようにして構成される写像 $f\tau : M\tau \to N\tau$（あるいは空間 $M\tau$ や $N\tau$）のことを指す．なお τ は，ある特異点型の集合で，$\Sigma \in \tau$ ならば Σ の近くに現れる特異点型もすべて τ に属しているようなものとする．以下可微分写像でその特異点型がすべて τ に属しているようなものを τ **写像**と呼ぶことにする.

Σ が与えられると，その代表元である写像芽 $f : (\mathbf{R}^m, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$ の自己同型群が $\mathrm{Diff}(\mathbf{R}^m, 0) \times \mathrm{Diff}(\mathbf{R}^n, 0)$ の部分群として定まる．（なお，$\mathrm{Diff}(\mathbf{R}^m, 0)$ は定義域の，$\mathrm{Diff}(\mathbf{R}^n, 0)$ は値域の微分同相写像芽のなす群であり，それぞれ座標変換として写像芽 f に作用している．f の自己同型群とはそのイソトロピー群のことをここでは指している.）その極大コンパクト部分群を G_Σ とする．すると，それに対応して分類空間 BG_Σ 上の 2 つのベクトル束 $\bar{\xi}_\Sigma$ と ξ_Σ，及びそれらに付随した円板束 $D(\bar{\xi}_\Sigma)$, $D(\xi_\Sigma)$ の間の写像

$$\varphi_\Sigma : D(\bar{\xi}_\Sigma) \to D(\xi_\Sigma) \tag{3.2}$$

で，(3.1) の意味での $\Sigma(\varphi_\Sigma)$ が $D(\bar{\xi}_\Sigma)$ の零切断に対応するものが自然に構成できる．τ に属する特異点型 Σ すべてに対して上の構成をし，それらを隣接関係にしたがって貼り合わせてできるのが普遍的な写像 $f\tau : M\tau \to N\tau$ である [11].

なお上述のような普遍的写像や分類空間 $M\tau$, $N\tau$ は Szűcs [15, 16] が昔から種々の場面で構成し，その有効性がわかっていたものである．どんな τ 写像 $f : M \to N$ も，$f\tau$ を "分類写像"で引き戻して得られるわけであるが，こうした分類写像は Pontrjagin–Thom 構成の一般化とも思える．

さて，Rimányi のアイデアは次のようにごく単純なものであった．特異点型 Σ が与えられたとき，写像 (3.2) について $\Sigma(\varphi_\Sigma)$ は零切断であった．よってそれが表すホモロジー類の Poincaré 双対は $\bar{\xi}_\Sigma$ の Euler 類に他ならない．したがって，求める Thom 多項式 P_Σ に $\xi_\Sigma - \bar{\xi}_\Sigma$ の特性類を代入すれば，$\bar{\xi}_\Sigma$ の Euler 類に一致するはずである．さらに，近くに Σ 型特異点を持たない別の特異点型 Σ' に対して，P_Σ に $\xi_{\Sigma'} - \bar{\xi}_{\Sigma'}$ の特性類を代入すれば零になるはずである．

ところで Thom 多項式は特性類の多項式であることがわかっているので，あとは多項式の係数を決めれば良い．そうすると，上の考察から，こうした係数達の連立 1 次方程式ができあがることになる．

あとはこうして得られる方程式を解いてゆくと，運が良ければ Thom 多項式が求まることになる．実際 Rimányi はこのことを簡単な特異点に対して実行し，余次元 8 以下の特異点の Thom 多項式をすべて決定してしまった．そのかなりの部分は多くの数学者が長年の努力の結果得ていたが，そこに含まれないものもまた多くあった．

Rimányi のアイデアも結局，具体例の構成と考察にあったと言えよう．Thom 多項式が普遍的な多項式であり，あとは係数を決めれば良いだけなので，それが満たすべき方程式を得るために具体例を考察すれば良いわけだが，その具体例としてある意味で普遍的なものを使ったわけである．もちろんそうした普遍的なものを使う必要はなく，もっと別の例であっても良かったと言えば良かったが，普遍的なものの方がかえって構成が簡単で，なおかつ計算も簡単に済む，というところがこのアイデアのみそである．

この例でも，具体例が重要な役割を果たしたわけだが，具体例の構成と考察を実際に実行するには，それなりにアイデアが必要であったわけである．

4 特異ファイバーの Thom 多項式

可微分多様体間の可微分写像 $f : M \to N$ を引き続き考えよう．この節では単に f の特異点での振舞いに着目するのではなく，1 点 $y \in N$ の逆像 $f^{-1}(y)$ に沿った f の振る舞いに着目する．すなわち，写像芽

$$f : (M, f^{-1}(y)) \to (N, y)$$

を考える．このような写像芽をここでは**ファイバー**と呼ぶ（$f^{-1}(y)$ が特異点を含む場合はしばしば**特異ファイバー**とも呼ばれる）．f が十分にジェネリックであれば $f^{-1}(y)$ は有限個の特異点を持つが，そこでの特異点型だけからは上のよ

うなファイバーは特定できない．そうした特異点達が $f^{-1}(y)$ の中でどのようにつながっているか，そのトポロジーの情報まで込めたものが上のファイバーをなすことになる．

さて $\mathcal{F}$ をそのようなファイバーの型としよう．そして前節と同様に

$$\mathcal{F}(f) = \{y \in N \mid f \text{ の } y \text{ 上のファイバーは } \mathcal{F} \text{ 型}\}$$

とおこう．今度は定義域多様体 M の部分集合ではなく，値域多様体 N の部分集合ができあがることに注意されたい．すると特異点の場合と同様に，$\mathcal{F}$ が適当な条件を満たして f が十分にジェネリックであれば，$\overline{\mathcal{F}(f)}$ は N のホモロジー類を表し，その Poincaré 双対としてコホモロジー類 $[\mathcal{F}(f)]^* \in H^*(N)$ が定まる．さらにこのコホモロジー類は N の特性類や，形式的差束 $f^*TN - TM$ の特性類の単項式の Gysin 準同型 $f_!$ による像を用いた多項式で書けることも知られている．これも特定の写像 f によらない普遍的なものであり，同様に **Thom 多項式**と呼んで良いものである [14].

なお，こうした Thom 多項式の存在も分類空間的なものを通して証明されるが，そうした分類空間を提唱したのは Kazarian [2, 3] であった．

さて一般論はこうなるが，具体的な特異ファイバーについて計算するのは別の話である．たとえば向き付けられた 4 次元多様体から $\mathbf{R}^3$ へのジェネリックな写像を考えてみる．そうした写像に現れる特異ファイバーの型は図 3 のように分類されることが知られている [12].（κ は各ファイバーの “余次元” を表すが詳細はここでは省略する.）

こうした特異ファイバーの Thom 多項式は前節とまったく同じ Rimányi のアイデアに基づいて計算できそうな気もするが，なかなかうまくゆかない．たとえば図 3 に登場する特異ファイバーの自己同型群の極大コンパクト部分群は多くの場合有限群であり，その分類空間の $\mathbf{Q}$ 係数のコホモロジーは消えてしまって，情報が取り出せない．

一方 Rimányi の方法を使わずに，与えられた特異ファイバーを持つ可微分写像を具体的に構成することはなかなか難しい．具体的な多様体 M, N が与えられると，可微分写像 $f : M \to N$ は豊富にあり，その中でジェネリックなものはまたたくさんあるわけだが，いざ具体的な写像を 1 つ与えて下さい，となるととたんに難しくなる．実際そのような研究は筆者の知る限りこれまでにほとんどない．わずかに小林 [4] が具体的な 4 次元多様体から $\mathbf{R}^3$ へのジェネリックな写像を構成しているが，残念ながら特異ファイバーの構造までは良くわからない.（小林氏にはわかっていたのかも知れないが...）

そこで筆者は [12] において，特異ファイバーの構造までわかるような具体例を構成した（図 4 参照）．これは本当に手作りで構成した．上述の小林の構成法と違うのは，あらかじめ多様体を指定しなかった点である．考察の対象となる特異ファイバー達をうまく貼り合わせてゆくことにより，ある 4 次元閉多様体 M から $\mathbf{R}^3$ への写像を構成し，そのあとで多様体 M を特定したのである．

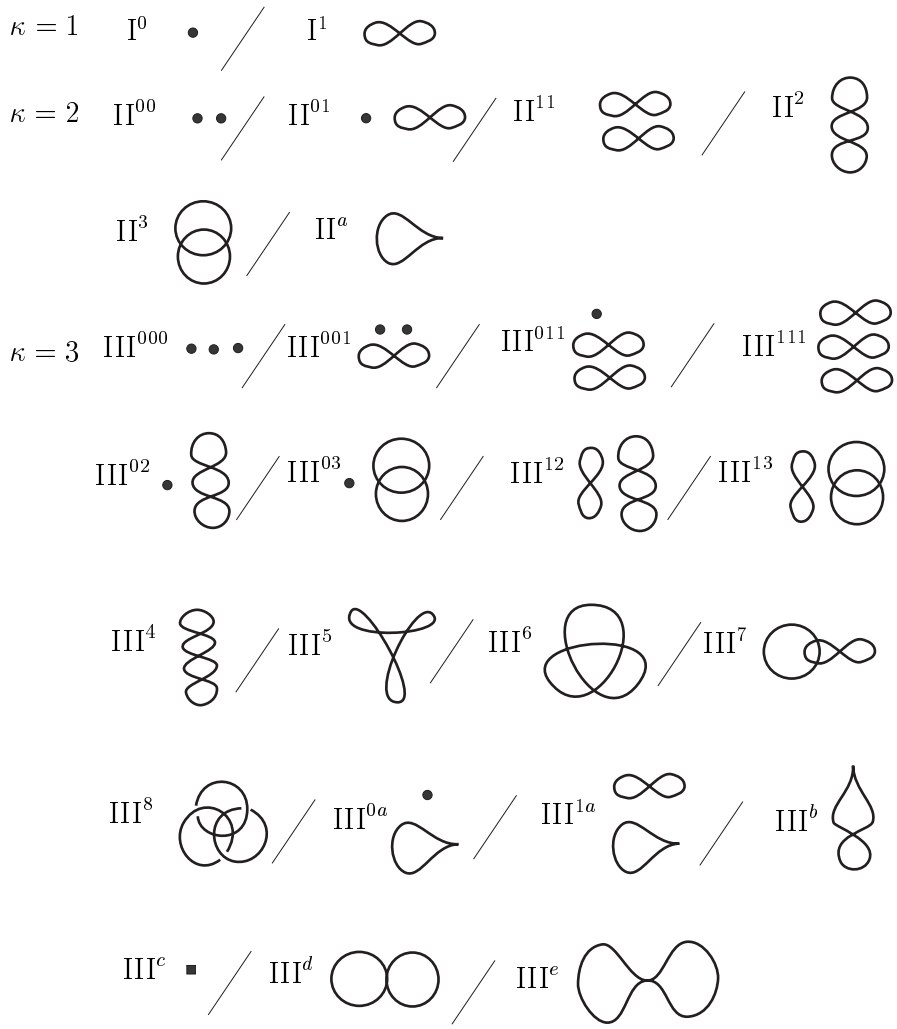

図 3: 4 次元多様体から 3 次元多様体への写像に現れる特異ファイバー

特定の特異ファイバーの（符号付き）個数のある種の同境不変性と，上で構成した例を組み合わせることにより，次の定理が証明できた．これは山本卓宏氏との共同研究である [13].

定理 4.1. 向き付けられた 4 次元閉多様体 M から $\mathbf{R}^3$ へのジェネリックな可微分写像 $f : M \to \mathbf{R}^3$ に対し，その III^8 型特異ファイバーの符号和は，M の 4 次元多様体としての符号数に一致する．

ここで III^8 型特異ファイバーとは図 3 の左下の方に現れるもので，図 4 の中心点上の 3 つ輪型ファイバーのことである．これには 4 次元多様体の向きを用いて符号 $(= \pm 1)$ が定義でき，そうした符号付きで III^8 型特異ファイバーの個数を数えると，それは特定の写像によらず，定義域多様体の符号数に一致する，というのが定理の主張である．

上の証明では III^8 型特異ファイバーの個数の同境不変性を用いているので，

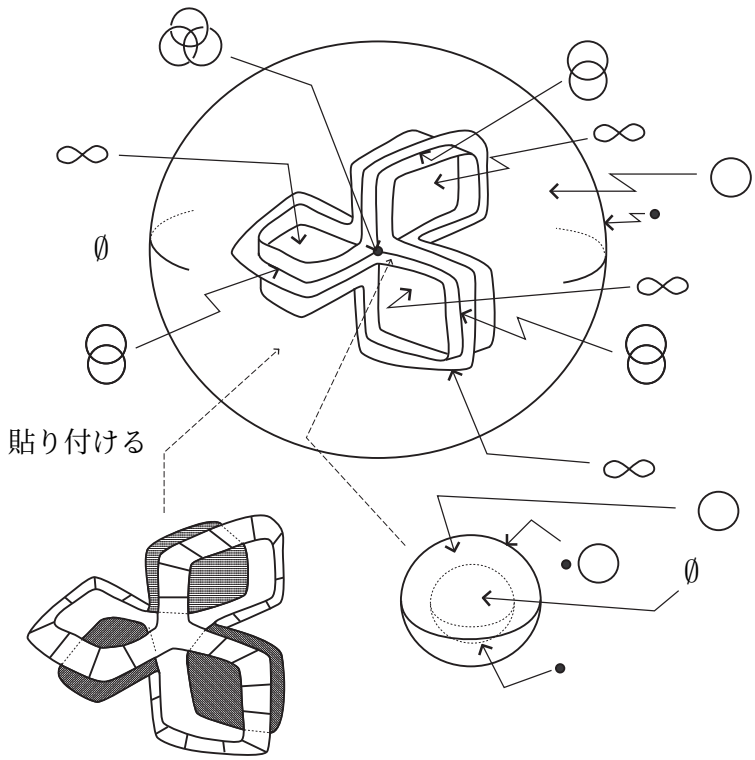

図 4: 4 次元多様体から $\mathbf{R}^3$ への具体的な写像の特異ファイバーの説明図

具体例は 4 次元閉多様体から $\mathbf{R}^3$ への写像でなければならない．前節の Rimányi の方法ではこうした例は作れないことを注意しておく．

なお上の定理を用いると，Hirzebruch の符号数定理の 4 次元の場合の別証明が次のように得られる．ジェネリックな写像 $f : M^4 \to \mathbf{R}^3$ に対して，

$$3^8(f) = \{p \in M^4 \,|\, p \text{ は特異点であって，} f \text{ の } f(p) \text{ 上のファイバーは } \mathrm{III}^8 \text{ 型}\}$$

とおく．すると特異ファイバーの分類空間の理論から，それが表す 0 次元ホモロジー類 $[3^8(f)]$ の Poincaré 双対 $[3^8(f)]^* \in H^4(M^4; \mathbf{Z})$ は，p_1 のスカラー倍 αp_1 でなければならず，しかもそのスカラー α は普遍的なものであることがわかる．

ところで，1 つの III^8 型ファイバーはちょうど 3 つの特異点を持つ．ということは，$[3^8(f)]$ の f_* による像は，$[\mathrm{III}^8(f)]$ の 3 倍になる．よって定理 4.1 より，$[3^8(f)]$ は M^4 の符号数の 3 倍に一致することがわかる．すなわち $\alpha p_1[M^4] = 3\sigma(M^4)$ が成り立つ．あとは我々が構成した具体例を再び用いることにより $\alpha = 1$ がわかる．

4 次元の場合に

$$\sigma(M^4) = \frac{1}{3} p_1[M^4]$$

と係数が 1/3 になるのは，特異ファイバー III^8 に特異点が 3 つ含まれているからなのである．

さて，こうした話をさらに発展させてゆくためには，具体例をたくさん作る手法を整備する必要がある．ジェネリックな可微分写像はたくさんあるはずなのに，実際に具体例を構成しようとすると難しいのは昔も今も変わらない．今後の研究に期待したいところである．

参考文献

[1] A. Haefliger et A. Kosinski, *Un théorème de Thom sur les singularités des applications différentiables*, Séminaire Henri Cartan **9** (1956-1957), Exposé No. 8.

[2] M. È. Kazarian, *Multisingularities, cobordisms, and enumerative geometry* (in Russian), Uspekhi Mat. Nauk **58** (2003), 29–88; English translation in Russian Math. Surveys **58** (2003), 665–724.

[3] M. Kazarian, *Thom polynomials*, Singularity theory and its applications, Edited by S. Izumiya, G. Ishikawa, H. Tokunaga, I. Shimada, and T. Sano, Adv. Stud. Pure Math. **43** (2007), 85–135.

[4] M. Kobayashi, *Two stable maps of* $\mathbf{C}^2\mathrm{P}$ *into* $\mathbf{R}^3$, Mem. College Ed. Akita Univ. Natur. Sci. **51** (1997), 5–12.

[5] E. Y. Miller, *The homology of the mapping class group*, J. Differential Geom. **24** (1986), 1–14.

[6] J. W. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, Univ. Press of Virginia, 1965.

[7] J. W. Milnor and J. D. Stasheff, *Characteristic classes*, Annals of Mathematics Studies, No. 76, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J.; Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1974.

[8] S. Morita, *Characteristic classes of surface bundles*, Invent. Math. **90** (1987), 551–577.

[9] 森田茂之,『特性類と幾何学』，現代数学の展開 7，岩波書店，1999.

[10] R. Rimányi, *Thom polynomials, symmetries and incidences of singularities*, Invent. Math. **143** (2001), 499–521.

[11] R. Rimányi and A. Szűcs, *Pontrjagin-Thom-type construction for maps with singularities*, Topology **37** (1998), 1177–1191.

[12] O. Saeki, *Topology of singular fibers of differentiable maps*, Lecture Notes in Math., Vol. 1854, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, 2004.

[13] O. Saeki and T. Yamamoto, *Singular fibers of stable maps and signatures of 4-manifolds*, Geom. Topol. **10** (2006), 359–399.

[14] O. Saeki and T. Yamamoto, *Singular fibers and characteristic classes*, to appear in Topology Appl.

[15] A. Szűcs, *Analogue of the Thom space for mappings with singularity of type* Σ^1 (in Russian), Mat. Sb. (N.S.) **108 (150)** (1979), 433–456, 478; English translation in Math. USSR-Sb. **36** (1980), 405–426.

[16] A. Szűcs, *Cobordism of singular maps*, preprint, 2006, arXiv:math.GT/0612152.

[17] R. Thom, *Les singularités des applications différentiables*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **6** (1955–56), 43–87.

講演者プロフィール

「特異点と特性類 — 具体例の果たす重要な役割」

佐伯　修（九州大学大学院数理学研究院・教授，博士（理学））

大学の学部生の頃から特異点のトポロジーに魅せられて今でも研究を続けています．実は 3,4 次元トポロジーに本当の興味があって，その研究に写像の特異点論が本質的に使えるのではないかとずっと思っているのですが，現時点ではその逆のような感じになっていて，少々不満を感じています．そんな中で今回は特異点論的アプローチで 4 次元トポロジーに関係する定理を得た，その裏にある幾何的なアイデアを紹介したいと思います．難しい理論の苦手な私ですので，講演も簡単なものになるとは思いますが，さてどうでしょうか...