数学概論 2 演習

2007 年 7 月 5 日分

二宮 嘉行

[Nino 11] $I = [0,1]$ 上の連続関数全体 $C(I)$ に対して $\rho(f,g) = \sup_{t\in I}|f(t) - g(t)|$ なる距離が与えられているとする．この距離空間 $(C(I),\rho)$ に対して $\varphi : C(I) \to \mathbb{R}$ を $\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ と定義するとき，φ は一様連続となることを示せ.

[Nino 12] **[Nino 11]** の距離空間 $(C(I),\rho)$ は完備であることを示せ.

[Nino 13] A を距離空間 X の部分集合とする.

(1) **[Nino 5]** より，A がコンパクトでないならば，A の可算な閉集合かつ離散空間である B が存在することを示せ.

(2) (1) の B 上に有界ではない連続関数 f を構成せよ.

(3) A 上の任意の実数値連続関数が有界ならば，A はコンパクトであることを示せ.（ヒント：(2) の f に対してティーツェの拡張定理を考えよ．ティーツェの拡張定理は証明なしに用いてよい.）

[Nino 14] (X,d) をコンパクト距離空間とし，$f : X \to X$ は $x_1 \neq x_2$ なる $x_1, x_2 \in X$ に対して $d(f(x_1), f(x_2)) < d(x_1,x_2)$ となる写像であるとする.

(1) $d(x,f(x))$ の最小値を与える $x = x_0 \in X$ が存在し，$x_0 = f(x_0)$ となることを示せ.

(2) $x_0 = f(x_0)$ なる $x_0 \in X$ はただ一つであることを示せ.

（注：このような点 x_0 を f の不動点という.）