数学概論２

２００７年６月７日分

佐伯 修

中間試験について

先週中間試験を行いました．受験者数 64 名，100 点満点で，平均点は 50.5 点でした．

問題	配点	平均	最高	最低
1 (1)	10	6.9	10	0
1 (2)	5	4.0	5	0
1 (3)	10	6.1	10	0
1 (4)	10	6.3	10	0
1 (5)	10	3.2	10	0
1（計）	**45**	**26.4**	**45**	**0**
2 (1)	10	4.1	10	0
2 (2)	5	3.1	5	0
2（計）	**15**	**7.2**	**15**	**0**
3 (1)	5	3.4	5	0
3 (2)	10	2.6	10	0
3（計）	**15**	**6.0**	**15**	**0**
4 (1)	4	3.4	4	0
4 (2)	16	2.7	16	0
4（計）	**20**	**6.0**	**20**	**0**
5 (1)	5	4.8	5	0
5 (2)	5	4.7	5	3
5（計）	**5**	**4.8**	**5**	**0**
合計	**100**	**50.5**	**95**	**3**

得点分布

0-9	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79	80-89	90-100
1	11	1	7	12	5	13	7	3	4

全体的に，試験ができた人とできなかった人の差がかなり大きいことがわかりました．今回の試験では，60 点くらいは取ってくれることを想定して，基本的な問題を出題しました．40 点未満だった人は，今後もこれまで通りの勉強だけしていると合格できない可能性が高いと言えます．今後の努力に期待します．

問題の解答例は先週の試験終了後に配布しました．以下，各問題ごとに多かった間違いなどについて解説します．

１．この問題は４月２６日実施の小テストに類似の問題でした．５月１０日配布のプリントに書いてあることも参考にして下さい．

(1) 位相の定義の3つの条件が満たされることを確かめる問題でした．共通部分については2個の共通部分だけを確かめれば，あとは帰納法で一般の有限個数の共通部分についても良いことが言えるのですが，和集合については何かしらの注意が本当は必要です．今回は開集合が有限個しかなかったので，それで構わないのですが，そのことをきちんと注意できている人は少数でした．

すべてを尽くす議論でも良いのですが，すべてを尽くしきれていない人が多数いました．あらかじめ何個あるか計算しておいて，それからすべてのパターンを書き下すのが間違いを防ぐために有効な方法です．

なお位相の条件の (2), (3) で,「全部」の共通部分，和集合，と思っている人が何人かいました．つまり，

$$\emptyset \cap U \cap V \cap W \cap X \in \mathcal{O}$$

とか，

$$\emptyset \cup U \cup V \cup W \cup X \in \mathcal{O}$$

といったことです．位相の条件 (2), (3) の意味はこういうことではありません．$\mathcal{O}$ の中から複数個の元を取ってくるたびに（共通部分のときは有限個），それらの共通部分や和集合が $\mathcal{O}$ に入ることを示す必要があるのです．ですから，上に書いたことは必要条件ではありますが，十分条件ではありません．もう一度位相の定義をきちんと復習しておいて下さい．

(2) これはほとんどの人ができていました．しかし少数ですが，できていない人もいました．閉集合の定義を確認しましょう．

(3) 位相空間 X の部分集合 U の集積点とは，$\underline{X \text{ の点 } x \text{ で}}$，$x$ が $U - \{x\}$ の触点となるもののことです．これを U の点で... と勘違いしている人が依然として数人いました．注意しましょう．

触点の定義に戻って，点 x $(= a, b, c)$ の近傍をすべて考えて，$U - \{x\}$ と交わるかどうかを調べている人もいましたが，(2) で閉集合をすべて求めているので，$U - \{x\}$ を含む最小の閉集合（それがすなわち $U - \{x\}$ の触点全体の集合（閉包）です）が x を含むかどうかを調べた方が能率的です．

それから，閉包を取る記号 $\overline{A}$ を,「補集合」と勘違いしている人がいました．確かに場合によっては $\overline{A}$ を集合 A の補集合の意味で使うときもあるかも知れません．しかし本講義では上付きの棒は常に閉包を表します．注意して下さい．

また，触点の議論で勘違いをして $U(x, \varepsilon)$ という記号を持ち出している人が何人かいました．本問題では位相空間が問題となっていて，距離空間やユークリッド空間での話ではありませんので，ε 近傍という概念は意味を成しません．注意して下さい．

(4) ハウスドルフでないことは，異なる 2 点の組で開集合で分離できないものを一組だけ見つければよいので，割りと多くの人ができていました．しかし T_0 空間であることを示すには，異なる 2 点の組**すべて**について議論する必要があります．これを怠っている人が多数いました．注意しましょう．

(5) 予想はしていましたが，できはあまり良くありませんでした．商位相の定義を良く復習しておいて下さい．

特に多かった間違いは，商写像 $\pi : X \to X/\sim$ による X の開集合の像を求めるものでした．そうではなくて，$X/\sim$ の部分集合であって，その π による**逆像**が X の開集合になるものを求めなければなりません．勘違いしていた人は良く注意して下さい．

関連して，写像 $f : X \to Y$ による値域集合 Y の部分集合 B の逆像 $f^{-1}(B)$ の定義がわかっていない人がかなりいることがわかりました．

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

です．すなわち，定義域集合の点であって，それを f で写したときに B に含まれるもの全体のなす集合です．復習しておきましょう．

それから，求める開集合の仲間に，$\emptyset$ ではなくて，$\{\emptyset\}$ を入れている人がいました．空集合 $\emptyset$ と，空集合をただ一つの元としてもつ集合 $\{\emptyset\}$ とは異なります．注意して下さい．

なお商集合 $X/\sim$ は同値類のなす集合で，同値類は X の部分集合ですから，$X/\sim$ は集合の集合です．求める商位相はしたがって，集合の集合の集合です．細かいことですが，注意しましょう．

2．(1) 距離空間の定義の中に，

$$d(x,y) \geq 0 \quad \text{（等号成立は } x = y \text{ のとき，かつそのときに限る）}$$

という条件があります．今回の問題ではそれと勘違いして，

$$d(x,A) = 0 \Longleftrightarrow x \in A$$

と考えている人が多数いました．これは間違いです．($\Longleftarrow$ は成り立ちますが，$\Longrightarrow$ は一般に成り立ちません．) たとえば $n = 1$, $x = 0 \in \mathbf{R}$, A を開区間 $(0,1)$ とすると，$d(x,A) = 0$ ですが $x \in A$ ではありません．距離関数はあくまでも 2 つの点に対して定義されているもので，今回は点と集合の間の「距離」を inf で定義しています．あくまでも inf ですから，最小値とは限りません．inf と最小値の違いを良く復習しておいて下さい．

(2) 直接示すこともできますが，(1) の結果を用いると容易に示せます．

3．(1) 完璧に書けている答案のみに点数を与えました．特に，$U_2(x,\varepsilon)$ ではなく $U(x,\varepsilon)$ を使っている人には点数を与えていません．情況に応じて記号を使い分けることを覚えて下さい．

(2) 大体正解，という人は多かったのですが，

$$U_2(x,\varepsilon) \supset U_1(x,\varepsilon)$$

をきちんと書いて，証明してくれた人はほとんどいませんでした．この問題で大事なのは上の包含関係で，これを仮定からきちんと導く部分が証明の本質的な部分です.

明らかに見えることでも，大事なことにはきちんと証明をつけること．覚えておいて下さい.

4．(1) 全単射であることを先に言っておかないと，逆写像という言葉が意味を持ちません．定義をするときには順番も大事ですので，注意しましょう．

(2) 予想はしていましたが，やはりできはとても悪かったですね．この問題は，f の全単射性はほとんどあきらかで，重要なのは連続性と逆写像の連続性を示す部分です.

連続性を示すには，まず X_0 の開集合 W を取る必要があります．ところが X_0 には，直積空間 $X \times Y$ の相対位相を入れてありますから，$X \times Y$ の開集合 $\widetilde{W}$ が存在して，$W = \widetilde{W} \cap X_0$ となるはずです．さらに，$\widetilde{W}$ は直積空間 $X \times Y$ の開集合ですから，X の開集合族 U_λ と Y の開集合族 V_λ $(\lambda \in \Lambda)$ が存在して，

$$\widetilde{W} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(U_\lambda \times V_\lambda)$$

となります．このあたりまではできている人も数人いました.

さて，次に $f^{-1}(W)$ を考える必要があります．このとき，

$$f^{-1}(W) = f^{-1}\left(\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(U_\lambda \times V_\lambda)\right) \cap X_0\right)$$

までは良いのですが，これを

$$= f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(U_\lambda \times V_\lambda)\right) \cap f^{-1}(X_0)$$

としている人が少なからずいました．これは間違いです．なぜかというと，f の値域は X_0 なのに，

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(U_\lambda \times V_\lambda)$$

という集合はその部分集合でないからです．つまり，逆像

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(U_\lambda \times V_\lambda)\right)$$

は意味を成さない，言い換えれば定義されないのです.

ではどうすればよいかと言うと，

$$f^{-1}(W) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}\left((U_\lambda \times V_\lambda) \cap X_0\right)$$

と変形しておいて，各

$$f^{-1}\left((U_\lambda \times V_\lambda) \cap X_0\right) \subset X$$

を考えれば良いのです．実際，$x \in X$ について

$$\begin{aligned} & x \in f^{-1}\left((U_\lambda \times V_\lambda) \cap X_0\right) \\ \Longleftrightarrow\ & f(x) \in (U_\lambda \times V_\lambda) \cap X_0 \\ \Longleftrightarrow\ & (x, y_0) \in U_\lambda \times V_\lambda \\ \Longleftrightarrow\ & x \in U_\lambda \quad \text{かつ} \quad y_0 \in V_\lambda \end{aligned}$$

がわかります．したがって，

$$f^{-1}\left((U_\lambda \times V_\lambda) \cap X_0\right) = \begin{cases} U_\lambda & (y_0 \in V_\lambda) \\ \emptyset & (y_0 \notin V_\lambda) \end{cases}$$

となります．いずれにしてもこれは X の開集合ですから，これらの和集合も X の開集合となって証明が終わります．

ちょっと複雑に思われるかも知れませんが，１ステップごとの議論はほぼ定義を適用しているだけの簡単な議論です．注意深く考えれば皆さんにもわかることだと思います．

f の逆写像 f^{-1} の連続性については，今度は X の開集合 U に対して $f(U)$ が X_0 の開集合であることを示せば十分です．詳細は先週配布の解答例を参照して下さい．

なお，単射であることをきちんと示している人は多数いましたが，中に定義を勘違いしている人がいました．$x_1, x_2 \in X$ について，

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

が単射であることの定義です．これを勘違いして，

$$x_1 = x_2 \Longrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

としている人が何人かいました．これは f が**写像**であればいつでも成り立ちます．単射ではなく写像であること，を意味しますので，誤解のないように復習をしておいて下さい．

５．時間的に余裕があったせいか，かなり詳しく書いてくれた人が多く，とても参考になりました．いくつかの意見は今後の講義・演習に反映させてゆきたいと思います．また以下に，皆さんからの質問等に対するコメントを書いておきますので，参考にして下さい．

なお (2) を解いてくれた人も何人かいました．気に入った理由がきちんと書いてあって，私と同じ数学的センスを持っている学生が数人いることを知って，嬉しく思いました．ただ，定理をきちんと述べていなかった人も何人かいて，そういう場合は満点の５点はあげていません．問題で問われていることを良く理解して欲しかったと思います．

皆さんからの感想・質問等について

以下に私のコメントを書いておきます．番号は５月１７日のプリントからの続き番号です．

学生１３．とにかくついていけない．数学が嫌いです．勉強の仕方も分からないし，どこからすればいいかも分からないです．
佐伯．深刻ですね．でもこういう悩みを抱えた学生は結構多いのではないかと思います．
数学は積み重ねの部分が大きいので，前に習ったはずのことが分かっていないと，次もやっぱり分からない，ということが残念ながら良くあります．勉強していて分からなくなったら，**何を自分は分かっていないのか**，ちょっと落ち着いて考えてみてはどうでしょうか？そうすると，たとえば「逆像」の定義が分かっていなかったり，場合によっては「写像」の定義すら分かっていなかったり，とにかく分かっていないことが**具体的に**山ほど出てくればしめたものです．ここで大事なのは，**なんとなくわからないことがたくさんある，では駄目**だということです．
具体的に分からないことが明らかになれば，今度は一つ一つ解決してゆきましょう．解決方法は人様々です．自分で教科書をひっくり返しても良いし，インターネットで検索しても良いし，友達や先輩に聞いても良いし，自分でじっくり考えても良いでしょう．それでもわからなければ演習に出てきて，先生やＴＡの人に聞いてみて下さい．演習の時間が無理なら，私の研究室に来て下さい．質問は，本講義に関係ないことでも，数学に関することなら構いません．

学生１４．数学の問題を解く上で，最初何から手をつければよいかわからないときがよくあります．問題に慣れるしか無いのでしょうか．
佐伯．問題をしっかり読んで，その意味するところを理解することがまず先決です．そのあと，示すべきことを示すには何を示せば良いか，を気持ちを集中して，定義に立ち戻って，じっくりと考えることです．そしてときどき，与えられた条件を思い出しながら，それを使うべきところでうまく使うように議論を組み立てます．
つまり，示すべき目的から逆に攻めて行くのと，与えられた仮定をもとに前の方から攻めて行くのと，両方をうまく使うと良いのではないかと思います．
分からないときは，たいてい逆から考えて行くとうまく行くことが多いようです．たいていの場合，定義の復習，特別な場合への定義の適用，記号の取り替え，などの繰り返しです．

学生１５．講義では何をしているのかがわからず，勉強しにくいです．できれば，位相などがこれからどんな分野で使われるのかなどを教えてほしいです．

佐伯．答えは簡単です．すべての分野でほとんど例外なく使われます．

たとえば解析では，ある種の関数全体のなす空間を考えることが良くあり，そこに距離を導入して距離空間と考え，その位相を用いて，ある種の方程式の解が存在することを示すこともあります．あるいは近似解を作って関数列を作り，それが収束すれば本当の解になるので，収束性を議論する必要が出てきたりします．

代数では，たとえば与えられた整数が，与えられた素数 p の何乗で割り切れるか，といった性質をもとにして，有理数全体の集合に特殊な位相を入れることがあります．私の専門ではないので良くわかりませんが，整数論では重要です．あるいは多項式の零点集合を研究する代数幾何学では，いわゆるザリスキ位相（教科書 p. 97 あたりを参照）が重要な役割を果たします．

幾何学では位相は不可欠です．たとえば位相幾何学（トポロジー）では，与えられた２つの図形を連続的に変形して（言い換えると，同相写像で変形して）同じにできるかどうか，などが重要な問題です．位相幾何学ではコーヒーカップとドーナツが同じ，というのはどこかで聞いたことがある人も多いかと思いますが，この二つは実は同相なのです．あるいは，空間内の結び目がほどけるかどうか，結び方が同じかどうか，などの概念も位相の考え方を用いて定式化されます．

あるいは統計学とか，数理生物学とか，その他考えられる，あらゆる数理科学に位相は重要な役割を果たします．

これらの事柄のほんの一部は教科書の第３章にも取り上げられていますので，眺めてみると良いでしょう．

学生１６．ハウスドルフ空間の定義やその諸性質のありがたみというか，これからの数学にどう繋がり絡みあっていくのか，そういう展望がまだ見えていないので，ただ漠然と数学をやっているだけの感覚になってしまうような気がします．

佐伯．ハウスドルフ空間のありがたみはいろいろとあるのですが，たとえば，距離空間でなくても位相空間で点列の収束が議論できる，というありがたみがあります．つまり「距離」が定義されていなくても，点列がある点に収束する，という定義ができて，その収束先が一意的に決まるのです．その他，ハウスドルフにコンパクトがさらに加わると，本当に嬉しいことがたくさんあります．

有難いことに，普通の数学で通常遭遇する位相空間はたいていハウスドルフです．ですので，あまり気にしなくても良いのですが，分離公理の大切さがその裏に隠れていることを頭の片隅にでも入れておくと良いと思います．

学生１７．演習ではもっと詳しく書いた解説がプリントか何かでほしいです．

佐伯．すみませんが，とてもそうした解説を作っているだけの余裕はありません．演習の解答時に，解答者や先生の解説を良く聞いて下さい．

学生１８．先生の専門分野はどういったものでしょうか？

佐伯．私は位相幾何学（トポロジー），その中でも可微分写像の特異点の研究を

しています．結び目なども研究対象の一部です．演習担当の二宮先生のご専門は統計数学，中村先生のご専門は非線形偏微分方程式です．

学生１９．勉強の仕方への質問です．演習問題を自宅で解いていても全く答にたどり着かない時，まず先生とかなら何をしていましたか？（放っておいて３日後考える，直ぐに友人，先生に聞く，参考書に例題がないか調べる etc...）

佐伯．すみませんが，良く覚えていません．私はあまり良い学生ではなかったので，解けない問題は解くのを諦めて，誰か他の人が解くのを待っていたような気がします．演習書をいろいろ見ても似たような問題がないことが多く，あまり役には立ちませんでした．とにかく解くべき問題がたくさんあったので，自分に解けるものから解いていって，それだけで時間がなくなってしまっていたような気がします．要するに，解けない問題は単に放っておいた，ということです．（こういうことは教育上あまり良さそうでないので，あまり書きたくはなかったのですが，よくよく思い出してみると，私はそういう怠慢な学生だったようです．ただし，大学院入試くらいからは，解けない問題も放っておかずに自分で何日も考え続けたのは覚えています．）

理想的なのは，その問題を数日間考え続けることです．ああでもない，こうでもない，と考えているうちに，解けない問題が解けることが良くあります．その際，１問にこだわらないことをお勧めします．解けない問題が数問あって，それらをぐるぐると考えていると，そのうちのどれかが解ける，という可能性が高くなります．

そうやって自分で考えると，仮に解けなかったとしても，誰か他の人が解いた解答を見ると，すぐに理解できることが多いです．ああ，そうやって解くのか，どうして気が付かなかったのか，と悔しく思うことも多々ありました．

学生２０．演習に難しい問題があって色々な本を調べてもわからない問題がありました．どのように対処すればよいでしょうか？

佐伯．上でも述べましたが，自分であれこれと考えてみることをお勧めします．本を調べたくなる気持ちはわかりますが，それでは楽はできても決して自分の力にはなりません．

どうしてもわからない，解答のヒントだけでも欲しい，という場合は私や，演習担当の先生，ＴＡなどに質問して下さい．

学生２１．演習について，色々な問題で証明が出されますが，何を証明すればいいのかは分かっても，どういう手順で証明を進めるか，またどのように表記すればいいのか分からないことがあり，苦労しています．何かアドバイスがありましたら教えていただきたいです．

佐伯．とにかく練習ですね．スポーツでも何でもそうですが，練習に練習を重ねなければ上手になれませんし，プロにもなれません．証明の手順を探すアルゴリズムなんてありませんから，多くの証明に触れて，慣れるのが一番良いと私は思います．

表記の仕方については，努力次第です．頭の中でできた解答を他の人にもわかってもらう，そのためには数学の表記法を身につけるだけではなく，読む人，聴く人の立場に立った説明を心がけることが大事です．これからの社会では，こうしたコミュニケーション能力が確実に要求されてゆきます．頑張って身に着けましょう．

学生２２．しばらく前まで授業を後ろで聞いていたが，どうも聞こえにくく，字もあまりわからないときがあったので前に移動した．すると後ろにいた時の問題点が改善されるばかりか，よい緊張感をもって集中して聞くことができ，後ろにいたときよりも授業がわかりやすかったです．

佐伯．いつも後ろに座っている学生の皆さん，少し見習ってみてはいかがでしょうか？

学生２３．演習問題の点数は難しいのが何点ぐらいなんですか？

佐伯．まだ各問題の点数を確定していません．全成績に対する比率が 30%，一人２題解くことを想定，ということから判断してみて下さい．普通の問題は 1 問 15 点くらい，簡単なのは 10 点くらい，少し難しいのは 20 点，それ以上は程度に応じて，という感じです．

学生２４．授業が少し速いと思います．できればもう少しゆっくり進めてほしいです．そうしないと理解できません．

佐伯．どうも私の意図がうまく伝わっていないようですね．講義中にも何度か言いましたし，シラバスやプリントにも書いたかも知れませんが，講義中にすべてを理解してもらうことはまったく期待していません．講義を聴いただけでその場ですべてを理解するのは，よほど予習をしっかりしてくるか，あるいは天才ほどの頭を持っていなければ無理です．

そこで**演習の時間を活用**して下さい，と前から何度も言っています．数学概論２では，演習を活用しないと理解するのは無理，ということを前提に講義を行っています．速く感じるのは当たり前です．予習も大事ですが，むしろ復習をしっかりすること，問題を実際にたくさん解いてみること（あるいは少なくとも解こうと試みること）をお勧めします．

学２５．数学が分からなくてツライです（泣）

佐伯．もともと数学科に入学してきたということは，きっと数学が少しは好きだったのではないかと思います．あるいは他の人より数学ができたのではないでしょうか？それが，大学に入学すると，それまで自分が思い描いていた数学とまったく異なり，とまどっているうちに授業がどんどん先に進んでしまって取り残される，という人も少なくないかも知れません．

対策はいくつか考えられます．数学科の先生に，とにかく相談してみて下さい．一人で悩んでいるとなかなか突破口が見つからないものです．先生が難しければ，先輩でも友人でも親でもいいです．場合によっては数学以外の道に進むことも可能性としてはありますが，その前にいろいろな人の意見を聞いて，じっくり考えてみることです．

学生２６．演習の問題が多く，解く問題を選ぶことができるのは助かるが，易しい問題と難しい問題が見分けられるような印かなにかを問題につけてほしい．小テストの配点を問題に書いておいてほしい．

佐伯．どれが易しく，どれが難しいかの判断は各自でお願いします．そうした判断ができるのも能力のうちです．小テストの配点については上にも書きましたが，まだ決めていませんので書けません．ご理解下さい．

学生２７．分からないところを質問，にしても，どこが分からないのかが分からないもので，質問をするにはある程度の理解が必要だと思う．

佐伯．確かに,「まともな」質問をするにはある程度の理解が必要です．しかし講義や演習中に良く「質問をしなさい」と言っているのは，そうした高級な質問をすることを要求しているのではありません．いわゆる馬鹿らしい質問，そんなことを質問するだけで理解していないことがばれてしまうような質問，そういう質問をして欲しいのです．勘違いしないで下さい．的外れの質問，大いに結構です．

もちろん講義を担当している者にとっては，そういう質問が出ることはある意味で悲しいことですが，聴いている人がまったく分かっていなくて，なおかつ質問がまったくない，というのよりはずっと「まし」です．

学生２８．問題数が多くどこから手を付けて良いのか分かりにくい．特に重要な問題は印を付けて欲しい．

佐伯．問題を多くしているのは，演習問題として解ける問題数に余裕を持たせるためです．特に重要な問題，というのがないわけではありませんが，そういう印を付けたものしか解かない，という人が多くなってしまいそうなので，敢えて付けないことにしています．

学生２９．時々黒板を消すのが早く，ノートへの写しが間に合わなくなることがあります．自分の書くのがおそいだけかもしれませんが（笑）．

佐伯．黒板を写すのに時間を取られている人が結構いるようですね．黒板を写すときのコツは，**きれいなノートを取ろうなどと思わない**ことです．とにかく，講義は１回限りですので，そこで得られる情報のできる限り多くのことを記録にとどめておくのが最大の目的です．ですので理想を言えば，黒板に書いてあることを写すだけではなく，教員が言った言葉のうち大事なものも書きとめておくくらいでないといけません．そういうことをすると，たいていノートはきたなくなります．でも情報は記録できます．きれいなノートが欲しければ，それを清書すると良いでしょう．理解も深まります．

学生３０．オフィスアワーの時間なんですが，僕たちはほとんどの人が計算機概論（田上先生）の授業を受けているので行くことができません．ずらしてもらえないでしょうか．

佐伯．すみません，そのことには気が付いていませんでした．いまさらオフィスアワーの時間は変えられないので，公式にはそのままにしたいと思いますが，実質的にはいつでもＯＫです．ただし，部屋にいないことが多いので確かに皆さんに

は不便をかけることが多いかも知れません．部屋（理学部３号館５階3512号室）にいる可能性が高いのは，月曜・火曜・水曜は午後４時以降，金曜は午後３時以前です．まえもってメイル等で予約を取ってもらった方が確実かと思います．あと，私だけではなく，演習担当の先生のところに質問に伺っても，先生はいやな顔はされないと思います．

学生３１．最近この授業で僕が感じることは，定義の意味することをちゃんと理解していなくてはならないということです．今までは，ただ定義を書いていただけでしたが，最近は，どういう意味なのかを考えています．そうしたところ，演習の問題も少しは解けるようになりました．

佐伯．そうですね．定義の意味するところを理解するのは，場合によっては難しいこともあるかも知れませんが，それを理解しようと努力することには大きな意味があります．講義では，定義の意味するところを口頭で伝えることが多く，なかなか黒板には書かないことも多いかも知れません．

期末試験について

期末試験を，７月１９日（木）午後に行います．詳細は追ってお知らせします．

今後の授業計画

まだ正確なことは未定ですが，大体次のような計画を考えています．

6/7 直積空間のコンパクト性，コンパクト空間の性質（教科書 2.5.2, 2.5.3）

6/14 コンパクト空間の性質（続き），連結性（教科書 2.5.3, 2.5.1）

6/21 連結性（続き），弧状連結性（教科書 2.5.1）

6/28 距離空間の位相，一様連続性，完備性（教科書 2.6.1, 2.6.2）

7/5 完備性（続き）（教科書 2.6.2）

7/12 全有界，点列コンパクト（教科書 2.6.3）

7/19 期末試験

今後の勉強，特に予習に役立ててみて下さい．

練習問題

６８．X を位相空間とし，A をその部分集合とする．A が X の相対位相に関してコンパクトであるためには，以下の $(*)$ が成り立つことが必要十分であることを示せ．

(∗) X の開集合族 $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \supset A$$

となるものに対し，常に有限個の $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \Lambda$ を選んで

$$\bigcup_{i=1}^{k} M_{\lambda_i} \supset A$$

とできる.

６９．実数 $a < b$ に対して，開区間 (a, b) と閉区間 $[a, b]$ は同相でないことを示せ.

７０．平面内の単位円周

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

にユークリッド空間 $\mathbf{R}^2$ の部分空間としての位相を入れて考える．写像 $f : [0, 1) \to S^1$ を

$$f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \quad (t \in [0, 1))$$

で定義すると，f は全単射連続写像であるが，同相写像ではないことを示せ.

７１．コンパクトなハウスドルフ空間は正規であることを示せ.

７２．$X = \mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$ に，次の関係 "$\sim$" を考える：$x, y \in X$ に対して，

$$x \sim y \Longleftrightarrow y = \lambda x \quad (\exists \lambda \in \mathbf{R} - \{0\}).$$

(1) "$\sim$" が同値関係となることを示せ.

商空間 $X/\sim$ を P^n（または $\mathbf{R}P^n$）と書き，n **次元射影空間**（または n **次元実射影空間**）という（$n = 2$ のときは（実）**射影平面**ともいう）．これについて，以下の問いに答えよ.

(2) P^n は $\mathbf{R}^{n+1}$ 内の原点を通る直線全体の集合と自然に同一視されることを示せ.

(3) $S^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$（これを n **次元球面**という）に，

$$x \sim x, \quad x \sim -x \quad (\forall x \in S^n)$$

で定義される関係 "$\sim$" を考える（X の同値関係と同じ記号を使うが，意味は異なるので注意）．すると，これは同値関係であって，商空間 $S^n/\sim$ は P^n と同相となることを示せ.

７３．n 次元射影空間 P^n（定義は前問参照）はコンパクトかつハウスドルフであることを示せ.

７４．X を位相空間，Y を集合とする．写像 $f : X \to Y$ が**局所的に単射**であるとは，X の任意の点 x に対して x の開近傍 U で，制限写像 $f|U : U \to Y$ が単射となるものがあるときをいう．このとき，X がコンパクトであれば，Y の任意の点 y に対して $f^{-1}(y)$ が有限集合となることを示せ．

７５．次のそれぞれの命題について，正しければ証明を，正しくなければ反例を与えよ．

(1) コンパクト空間の部分空間はコンパクトである．

(2) コンパクト空間の商空間はコンパクトである．

(3) X がコンパクト空間で，位相空間 Y が X と同相であれば，Y もコンパクトである．

(4) ハウスドルフ空間からコンパクト空間への全単射連続写像は同相写像である．

７６．X を位相空間とし，$B \subset A \subset X$ とする．B の X の部分空間としての相対位相は，X の部分空間 A の部分空間としての相対位相と一致することを示せ．

７７．X をコンパクトな位相空間とし，$f : X \to \mathbf{R}$ を連続関数で，任意の $x \in X$ に対して $f(x) \geq 0$ なるものとする．$f^{-1}(0)$ を含む X の任意の開集合 U に対して，ある正の数 ε が存在して，

$$f^{-1}([0, \varepsilon)) \subset U$$

となることを示せ．

７８．前問において，X のコンパクト性が本質的であること，すなわち，コンパクト性の仮定をはずすと反例があることを示せ．

７９．X を位相空間とし，$A_1, A_2, \ldots, A_k$ を X の有限個のコンパクト部分集合とする．このとき和集合 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$ もコンパクト部分集合となることを示せ．

８０．問題［中村７］の位相空間 $(X, \mathcal{U})$ はコンパクト空間であることを示せ．

８１．X をコンパクト空間とし，$f : X \to \mathbf{R}$ を連続関数とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $x \in X$ で $0 \leq f(x) < \varepsilon$ なるものが存在すれば，$f^{-1}(0) \neq \emptyset$ となることを示せ．

８２．$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする．X に１点 ∞ $(\notin X)$ を付け加えた集合 $X^* = X \cup \{\infty\}$ を考え，

$$\mathcal{O}^* = \mathcal{O} \cup \{X^* - K \mid K \text{ は } X \text{ のコンパクト閉集合，または } \emptyset\}$$

とおく．

(1) $\mathcal{O}^*$ が X^* に位相を定めることを示せ．

(2) X^* の部分空間としての X の位相は $\mathcal{O}$ に一致することを示せ.
(3) X^* はコンパクトであることを示せ.
(4) X がコンパクトでなければ X が X^* で稠密であることを示せ.

８３．X を位相空間とする．X の点列

$$\{x_n\} = \{x_1, x_2, \ldots\} \subset X$$

が，X の点 a に**収束する**とは，a の勝手な開近傍 U に対して，ある自然数 N が存在して，

$$n \geq N \Longrightarrow x_n \in U$$

となるときを言う.
(1) X がハウスドルフ空間であれば，収束する点列の収束先は一意的に決まることを示せ.
(2) $X = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x \in \mathbf{R},\, y = \pm 1\}$ とし，X に同値関係 $\sim$ を

$$(x,y) \sim (x',y') \Longleftrightarrow x = x' \text{かつ} \begin{cases} y = y' & (x = x' \leq 0) \\ y = \pm y' & (x = x' > 0) \end{cases}$$

で定義する．商空間 $X/\sim$ における点列 $\{x_n\}$ を

$$x_n = [(1/n, 1)] = [(1/n, -1)]$$

で定めると，点列 $\{x_n\}$ は点 $[(0,1)]$ にも，点 $[(0,-1)]$ にも収束するが，

$$[(0,1)] \neq [(0,-1)]$$

であることを示せ.
(3) 上の商空間 $X/\sim$ は T_1 空間であるが，ハウスドルフ空間ではないことを示せ.

英単語集２

稠密　dense,　連続写像　continuous map,　開写像　open map
逆像　inverse image,　同相写像　homeomorphism,　同相　homeomorphic
全単射　bijection,　相対位相　relative topology，部分空間　subspace
直積位相　product topology,　直積空間　product space
商位相　quotient topology,　商空間　quotient space,　基　basis
包含写像　inclusion map,　射影　projection,　同値　equivalent
同値関係　equivalence relation,　ハウスドルフ空間　Hausdorff space
分離公理　separation axiom,　距離空間　metric space,　正則　regular
正規　normal,　コンパクト　compact,　開被覆　open covering
閉区間　closed interval,　開区間　open interval,　有界　bounded
有限交叉性　finite intersection property,　対角線集合　diagonal set
可分　separable,　誘導位相　induced topology