数学概論２

２００７年5月３１日分

佐伯 修

中間試験の解答例

１．(1) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$ であるから，位相の定義の (1) は満たされる．

次に $\mathcal{O}$ の 2 個の元の共通部分を考える．いずれかが $\emptyset$ あるいは X であれば，共通部分が再び $\mathcal{O}$ の元となるのは明らかである．また 2 つの元が同じ集合である場合も明らかである．それ以外の場合は，

$$U \cap V = W, \quad V \cap W = W, \quad W \cap U = W$$

となっていずれも $\mathcal{O}$ の元である．

したがって帰納法により，$\mathcal{O}$ の有限個の元の共通部分は常に $\mathcal{O}$ の元であることがわかる．すなわち位相の定義の (2) が確かめられた．

次に $\mathcal{O}$ の 2 個の元の和集合を考える．いずれかが $\emptyset$ あるいは X であれば，和集合が再び $\mathcal{O}$ の元となるのは明らかである．また 2 つの元が同じ集合である場合も明らかである．それ以外の場合は，

$$U \cup V = X, \quad V \cup W = V, \quad W \cup U = U$$

となっていずれも $\mathcal{O}$ の元である．

したがって帰納法により，$\mathcal{O}$ の有限個の元の和集合は常に $\mathcal{O}$ の元であることがわかった．

ところで $\mathcal{O}$ には有限個の開集合しかない．したがって $\mathcal{O}$ の元の任意個数の和集合は常に有限個の元の和集合になる．これで位相の定義の (3) が確かめられた．

以上より $\mathcal{O}$ が X に位相を定めることが示された．

(2) $\emptyset$, X, $X - U = \{c\}$, $X - V = \{a\}$, $X - W = \{a, c\}$

(3) $U - \{a\} = \{b\}$ の閉包（すなわち，集合 $\{b\}$ を含む最小の閉集合）は (2) より X であり，これは点 a を含む．よって a は U の集積点である．

$U - \{b\} = \{a\}$ の閉包は (2) より $\{a\}$ であり，これは点 b を含まない．よって b は U の集積点ではない．

$U - \{c\} = \{a, b\}$ の閉包は (2) より X であり，これは点 c を含む．よって c は U の集積点である．

以上より，U の集積点は a, c の 2 点がすべてである．

(4) 2 点 $a, b \in X$ を考えると，開集合 W は b を含み，a を含まない．

2 点 $b, c \in X$ を考えると，開集合 W は b を含み，c を含まない．

2 点 $c, a \in X$ を考えると，開集合 U は a を含み，c を含まない．

以上から X は T_0 空間である．

ところが，2 点 a, c を考えると，a を含む開集合は U, X しかなく，c を含む開集合は V, X しかないので，これらは必ず交わる．したがって X はハウスドルフ空間ではない．

(5) $\emptyset$, $X/\!\sim$ はもちろん開集合である．また，

$$\pi : X \to X/\!\sim$$

を商写像とすると，

$$\pi^{-1}(\{[a]\}) = \{a, c\} \notin \mathcal{O}$$
$$\pi^{-1}(\{[b]\}) = \{b\} \in \mathcal{O}$$

となるので商位相の定義から，$\{[a]\}$ は開集合でなく，$\{[b]\}$ は開集合である．以上から

$$\emptyset, \quad \{[b]\}, \quad X/\!\sim = \{[a], [b]\}$$

の３つが求める開集合のすべてである．

2．(1) x が A の触点であったとする．すると任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$U(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

となる．すなわち，ある $a_0 \in A$ で，$d(x, a_0) < \varepsilon$ となるものがある．よって，

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \in \mathbf{R} \mid a \in A\} < \varepsilon$$

となる．一方距離関数の性質から $d(x, a) \geq 0$ が任意の $a \in A$ に対して成り立つので，$d(x, A) \geq 0$ である．したがって，

$$0 \leq d(x, A) < \varepsilon$$

が任意の $\varepsilon > 0$ について成り立つ．よって $d(x, A) = 0$ となる．

逆に $d(x, A) = 0$ とすると，下限の定義から，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $a \in A$ があって，$d(x, a) < \varepsilon$ となる．よって $U(x, \varepsilon) \cap A \ni a$ となるので，$U(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ となる．よって x は A の触点である．

以上で求める同値性が証明された．

(2) A が閉集合であれば，A の触点は A の点である．$x \notin A$ に対してもし

$$d(x, A) = 0$$

とすると，(1) より x は A の触点であり，したがって A の点である．これは矛盾．よって $d(x, A) > 0$ である．

逆に，$(*)$ が成り立つと仮定する．もし $\overline{A} \neq A$ とすると，$\overline{A} \supset A$ であるから，A の触点 x で A に含まれないものがある．仮定 $(*)$ から $d(x, A) > 0$ であるが，これは (1) より x が A の触点でないことを意味する．これは矛盾．よって $\overline{A} = A$ であり，したがって A は閉集合である．

3．(1) U の任意の点 x に対してある $\varepsilon > 0$ が存在して，$U_2(x, \varepsilon) \subset U$ となる．

(2) (X, d_2) の任意の開集合 U を取る．明らかに $\mathrm{id}^{-1}(U) = U$ である．この U が (X, d_1) の開集合であることが示されれば良い．

任意の $x \in U$ を取る．U は (X, d_2) の開集合であるから，ある $\varepsilon > 0$ が存在して，$U_2(x, \varepsilon) \subset U$ となる．ここで，

$$U_1(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d_1(x, y) < \varepsilon\}$$

を考える．任意の点 $a \in U_1(x, \varepsilon)$ に対して，

$$d_1(x, a) < \varepsilon$$

が成り立つ．問題の仮定から $d_2(x, a) \leq d_1(x, a)$ が成り立つので，

$$d_2(x, a) < \varepsilon$$

が成り立つことになる．よって $a \in U_2(x, \varepsilon)$ となる．したがって

$$U_1(x, \varepsilon) \subset U_2(x, \varepsilon)$$

が示された．

このことと $U_2(x, \varepsilon) \subset U$ より，

$$U_1(x, \varepsilon) \subset U$$

がわかる．したがって U は (X, d_1) の開集合である．以上より id が連続写像であることが示された．

4．(1) 位相空間の間の写像 $f : X \to Y$ が，全単射連続で，逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ も連続のとき，f を <u>同相写像</u> という．

(2) f が全単射となることは明らかである．

f の連続性を示す．X_0 の勝手な開集合 W を取る．X_0 には直積空間 $X \times Y$ の部分空間としての位相が入っているので，$X \times Y$ のある開集合 $\widetilde{W}$ が存在して，$W = \widetilde{W} \cap X_0$ となる．

ここで $X \times Y$ の開集合 $\widetilde{W}$ は，X の開集合 U と Y の開集合 V の直積 $U \times V$ の形をした集合の和集合として書ける．したがって，W は，

$$(U \times V) \cap X_0$$

なる形の集合の和集合となる．

もし V が y_0 を含めば，$f^{-1}((U \times V) \cap X_0) = U$ であり，これは X の開集合である．もし V が y_0 を含まなければ，$f^{-1}((U \times V) \cap X_0) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ であり，これも X の開集合である．いずれにしても，$f^{-1}((U \times V) \cap X_0)$ は X の開集合である．

したがって，X_0 の開集合 W の f による逆像は，X の開集合の和集合となり，よって X の開集合である．以上より f が連続であることが示された．

次に逆写像 $f^{-1} : X_0 \to X$ が連続写像であることを示す．U を X の任意の開集合とする．

$$(f^{-1})^{-1}(U) = f(U) = \{(x, y_0) \in X \times Y \mid x \in U\}$$

となる．そこで $U \times Y$ という集合を考えると，U は X の開集合であり，Y は Y の開集合であるので，$U \times Y$ は直積空間 $X \times Y$ の開集合となる．そして，

$$(U \times Y) \cap X_0 = f(U)$$

となることがわかる．したがって相対位相の定義から，$f(U)$ は X_0 の開集合である．以上で f^{-1} が連続写像であることが示された．

したがって f は同相写像である．

５． 省略．

Coffee Break

♡ それにしても「零の発見」という画期的な大発見をした無名のインド人は，自分の発見が後世これほど大きな影響を及ぼしたことを自覚していただろうか．自ら「画期的」と称した発見が「画期的」であったためしは少ない．(吉田洋一)

♡ なに？貴様は数学の教授だと？それなら答えてみろ．マクローリン級数を第 n 項で切ったときの剰余項は何だ．できたら許してやる．できなかったら銃殺だ．(旧ソ連の物理学者タム（1958 年ノーベル賞受賞）がロシア革命直後，食糧買い出しに行ってゲリラ隊につかまったときのこと．彼はこの「一生でもっともおそろしい試験」に危うく合格して，無事に帰れた．相手の数学者の隊長の名は知られていない.)

♡ 数学の本性は，その自由性にある. (カントール)

♡ 数学的発見の原動力は推論ではなく想像力である. (ド・モルガン)

♡ 数学一般は基本的に自明なものの科学である. (クライン)

（数学セミナー増刊「１００人の数学者」より）