数学概論２

２００７年5月２４日分

佐伯 修

練習問題についての注意

これまで練習問題をかなり数多く出題してきました．これらの問題は，演習の時間に**すべてを解くことは想定していません**．全員が2題以上解けるだけの問題数を確保する意味もあって，多めに出しています．その点誤解のないようにお願いします．また，前回のプリントにも書きましたが，演習で問題を解く際，問題の難易度によって点数を変えますが，どの問題が難しくどの問題が簡単であるかについては，こちらからは何もコメントしません．各自で考えて下さい．

中間試験について

来週５月３１日午後の演習の時間に中間試験を行います．詳細について，５月１７日配布のプリントを良く読んでおいて下さい．

練習問題

５２．$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし，$\mathcal{B}$ を開集合系 $\mathcal{O}$ の基とする．このとき，X の部分集合 A について以下の3条件が同値となることを示せ．

(1) A は X の開集合である．

(2) A の任意の点 x に対して，ある開集合 U で，$x \in U \subset A$ となるものがある．

(3) A の任意の点 x に対して，ある $V \in \mathcal{B}$ で，$x \in V \subset A$ となるものがある．

５３．$(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間，$f : X \to Y$ をその間の同相写像とする．

(1) $U \in \mathcal{O}_X$ に対して，その f による像 $f(U)$ は Y の開集合となることを示せ．

(2) (1) より，写像 $\tilde{f} : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y$ を，

$$\tilde{f}(U) = f(U) \quad (U \in \mathcal{O}_X)$$

で定めることができる．$\tilde{f}$ は全単射となることを示せ．

５４．ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の部分集合 A について，以下の2条件は同値であることを示せ．

(1) A は閉集合である．

(2) A 内の点列 $\{x_k\}$ で $\mathbf{R}^n$ 内で収束するものに対し，その極限 $\lim_{k\to\infty} x_k$ は常に A の点である．

５５．位相空間 X の部分集合 A と，X の開集合 U について，

$$\overline{A} \cap U \neq \emptyset \Longleftrightarrow A \cap U \neq \emptyset$$

が成り立つことを示せ．ここで $\overline{A}$ は A の閉包を表す.

５６．練習問題１８番の位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ について考える．$X = \{a, b, c\}$, $\mathcal{O}_X = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$ であったことを思い出そう.

(1) 集合 $B = \{a, b\}$ に相対位相を入れて位相空間と考えたときの，B の開集合をすべて求めよ.

(2) 同様に部分空間 $C = \{b, c\}$ の開集合をすべて求めよ.

(3) 部分空間 B と C は位相空間として同相であるか？

(4) 一般に，位相空間 $(Y, \mathcal{O}_Y)$ の部分空間 V, W が位相空間として同相であり，なおかつ V が Y の開集合であれば，W も Y の開集合であるといえるか？

５７．$X = \mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$ とし，$x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in X$ に対して,

$$x \sim y \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 & (x_1 \neq 0 \text{ または } y_1 \neq 0 \text{ のとき}) \\ x_2 y_2 > 0 & (x_1 = y_1 = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める.

(1) 「$\sim$」が X に同値関係を定めることを示せ.

(2) X に $\mathbf{R}^2$ から誘導される相対位相を入れたとき，商空間 $X/\sim$ はハウスドルフ空間にはならない．このことを示せ.

５８．今，位相空間 X, Y と写像 $f : X \to Y$ が与えられているとする．また，$X = A \cup B$ となる部分集合 A, B であって，f の制限写像 $f|A$, $f|B$ が共に Y への連続写像であるものがあったとする.（なお，集合 A, B には X の部分空間としての位相を考える.）

(1) A, B が共に X の開集合であれば，f も連続写像となることを示せ.

(2) A, B が共に X の閉集合であれば，f も連続写像となることを示せ.

５９．X, Y を位相空間，“$\sim_X$”を X の同値関係，“$\sim_Y$”を Y の同値関係とする．このとき，$X \times Y$ に次の二項関係 “$\sim$”を導入する．$(x, y), (x', y') \in X \times Y$ に対して,

$$(x, y) \sim (x', y') \Longleftrightarrow x \sim_X x' \text{ かつ } y \sim_Y y'.$$

(1) “$\sim$”は $X \times Y$ に同値関係を定めることを示せ.

(2) 商空間 $(X \times Y)/\sim$ から，$X/\sim_X$ と $Y/\sim_Y$ の積空間 $(X/\sim_X) \times (Y/\sim_Y)$ への，連続な全単射が存在することを示せ.

(3) 位相空間の間の連続写像が，開集合を常に開集合に写すとき，**開写像**であるという．上において，商写像

$$\pi_X : X \to X/\sim_X, \quad \pi_Y : Y \to Y/\sim_Y$$

がともに開写像であれば，商空間 $X/\sim_X$ と $Y/\sim_Y$ の積空間 $(X/\sim_X) \times (Y/\sim_Y)$ は，商空間 $(X \times Y)/\sim$ と同相となる．このことを示せ.

６０．X を位相空間，“$\sim$”をその同値関係とする．

(1) $\mathcal{R} \subset X \times X$ を

$$(x,y) \in \mathcal{R} \Longleftrightarrow x \sim y$$

で定める（$\mathcal{R}$ を二項関係 “$\sim$” の**グラフ**ということもある）．このとき，商空間 $X/\sim$ がハウスドルフになるためには，$\mathcal{R}$ が積空間 $X \times X$ の閉集合になることが必要である．このことを示せ．

(2) 商写像 $\pi : X \to X/\sim$ が開写像であったとする．このとき，商空間 $X/\sim$ がハウスドルフになるためには，$\mathcal{R}$ が積空間 $X \times X$ の閉集合になることが必要十分である．このことを示せ．

６１．位相空間 X と Y が同相であるとき以下の問いに答えよ．

(1) X が T_0 空間であれば Y もそうである．

(2) X が T_1 空間であれば Y もそうである．

(3) X がハウスドルフ空間であれば Y もそうである．

６２．X, Y, Z をそれぞれ位相空間とする．直積集合 $X \times Y \times Z$ に次の３つの位相を考えると，これらはすべて $X \times Y \times Z$ に同じ開集合系を定めることを示せ．

(1) ３つの集合の直積位相．すなわち，$U \times V \times W$（U は X の開集合，V は Y の開集合，W は Z の開集合）なる形の集合の和集合を $X \times Y \times Z$ の開集合とする位相．

(2) X と Y の直積空間 $X \times Y$ と，位相空間 Z の直積空間としての位相．言い換えると，$(X \times Y) \times Z$ としての位相．

(3) 位相空間 X と，直積空間 $Y \times Z$ との直積空間としての位相．言い換えると，$X \times (Y \times Z)$ としての位相．

６３．X, Y を位相空間としたとき，直積空間 $X \times Y$ と $Y \times X$ は同相である．これを示せ．

６４．(X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間とし，$f : X \to Y$ を写像とする．今，ある正の実数 c が存在して，任意の $x_1, x_2 \in X$ について

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq c\, d_X(x_1, x_2)$$

が成り立つとする．このとき f は連続であることを示せ．

６５．X を空でない集合とし，$\mathcal{O}$ をその離散位相とする．このとき X がコンパクト空間となるためには，X が有限集合であることが必要十分であることを示せ．

６６．X を空でない集合とし，$\mathcal{O}$ をその密着位相とする．

(1) X が２点以上含めば，位相空間 $(X, \mathcal{O})$ はハウスドルフでないことを示せ．X が１点のみからなる集合の場合はどうか？

(2) 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ はコンパクトであることを示せ.

６７．開区間 $(0,1)$ はコンパクトでないことを示せ.

Coffee Break

皆さんは**黄金分割**というのをご存知でしょうか? これは下図のように，線分 AB を $AB : AC = AC : BC$ となるように分割することをいいます．そしてこのとき，$T = AB/AC$ のことを**黄金比**と呼びます．2 次方程式の計算から，

$$T = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803398...$$

となることが容易に確かめられます.

この黄金比はなかなかきれいな数で，自然界や芸術作品のなかによく現れると言われています.

一方，皆さんは**フィボナッチ数列**というのをご存知でしょうか？これは

$$a_0 = 1,\, a_1 = 1,\, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

で定義される数列で，この数列も自然界の現象のなかによく現れると言われています.（ちなみにこの数列は 1202 年にイタリアのフィボナッチ[1]が考え出したものです.）

実はフィボナッチ数列と黄金分割の間には密接な関係があります．フィボナッチ数列の相隣り合う項の比からなる数列

$$\left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\}$$

を考えると，

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \dots$$

となって，これは黄金比に収束するのです．なぜでしょう？興味のある人は是非考えてみて下さい.

$AB : AC = AC : BC$

[1]正確には，フィボナッチ（1170 頃－ 1250）は，ピサのレオナルド (Leonardo da Pisa) あるいはボナッチ家の一員だったこともあって,「ボナッチの息子 (filio Bonacci)」と呼ばれていました. それが短縮されてフィボナッチ (Fibonacci) と呼ばれるようになったそうです.