数学概論２

２００７年4月１９日分

佐伯 修

前回の講義の補足

定理 1.2.7 (1) で，A° が A の開集合であることの証明が分かりにくかったようですので，解説を加えておきます．

開集合の定義より，各点 $x \in A$ に対してある $\varepsilon > 0$ が存在して，

$$U(x, \varepsilon) \subset A^\circ$$

となることを示す必要があります．一方 A° は A の内点全体の集合なので，内点の定義より，ある $\varepsilon > 0$ が存在して，

$$U(x, \varepsilon) \subset A$$

となることはわかります．

よって，この ε-近傍 $U(x, \varepsilon)$ が A° に入ること，すなわち，$U(x, \varepsilon)$ の任意の点が A の内点であることを示せば十分であることになります．

そこで $U(x, \varepsilon)$ の任意の点 y を取ります．この y に対して，正の実数 δ が存在して，$U(y, \delta) \subset A$ となることが示せれば，y は A の内点であることになります．

$U(x, \varepsilon)$ の定義より，$d(x, y) < \varepsilon$ となります．そこで

$$\delta = \varepsilon - d(x, y)$$

と置くと，$\delta > 0$ となります．この δ に対して $U(y, \delta) \subset A$ となることを示しましょう．任意の点 $z \in U(y, \delta)$ を取ると，δ-近傍の定義から

$$d(y, z) < \delta$$

となります．したがって，三角不等式と，δ の定め方から

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + \delta = \varepsilon$$

となり，$z \in U(x, \varepsilon)$ がわかります．z は $U(y, \delta)$ の勝手な点でしたから，

$$U(y, \delta) \subset U(x, \varepsilon)$$

がわかりました．

ここで，$U(x, \varepsilon) \subset A$ でした．よって，$U(y, \delta) \subset A$ となります．したがって y は A の内点であることがわかります．

これで求めることが示されたことになり，A° が開集合であることがわかりました．

なお，ε-近傍 $U(x,\varepsilon)$ を考えるためには，$\varepsilon>0$ である必要があります．上の証明で $\delta>0$ をいちいち示しているのは，y の δ-近傍を考える必要があるからです．

４月１２日実施の小テストについて

プリントの練習問題１番を解いてもらいました．採点は，(1), (2), (3) が各 10 点，(4) が 20 点の計 50 点満点で行いました．平均点は 23.7 点でした．50 点満点は 2 人しかいませんでした．演習担当の先生から解答と解説があったと思いますが，念のため**解答例**を以下に書いておきます．きちんと復習をしておいて下さい．

(1) 任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある $\delta>0$ が存在して，$|x-a|<\delta$ なる勝手な $x\in\mathbf{R}$ に対して $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ が成り立つ．
(2) ある $\varepsilon>0$ が存在して，任意の $\delta>0$ に対して，ある $x\in\mathbf{R}$ で $|x-a|<\delta$ なるものが存在して，$|f(x)-f(a)|\geq\varepsilon$ となる．
(3) a に収束するある実数列 $\{x_n\}$ と，ある $\varepsilon>0$ が存在して，勝手な自然数 N に対して，ある $n\geq N$ で，$|f(x_n)-f(a)|\geq\varepsilon$ となるものが存在する．
(4) まず関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続であることを仮定して (3) の命題 $(*)$ を示す．任意の $\varepsilon>0$ を取ると，仮定よりある $\delta>0$ が存在して，$|x-a|<\delta$ ならば $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ となる．ここで，$\{x_n\}$ は a に収束するので，ある自然数 N が存在して，$n\geq N$ ならば $|x_n-a|<\delta$ となる．よって上のことから $|f(x_n)-f(a)|<\varepsilon$ となる．すなわち，任意の $\varepsilon>0$ に対し，ある自然数 N が存在して，$n\geq N$ ならば $|f(x_n)-f(a)|<\varepsilon$ となることが示された．すなわち (3) の命題 $(*)$ が示された．
次に，関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続でないと仮定する．すると (2) より，ある $\varepsilon>0$ が存在して，任意の $\delta>0$ に対して，ある $x\in\mathbf{R}$ で $|x-a|<\delta$ なるものが存在して，$|f(x)-f(a)|\geq\varepsilon$ となる．そこで各自然数 n に対して，$\delta=1/n$ とおくと，ある $x_n\in\mathbf{R}$ で $|x_n-a|<1/n$ なるものが存在して，$|f(x_n)-f(a)|\geq\varepsilon$ となることがわかる．実数列 $\{x_n\}$ はあきらかに a に収束する．よってこのことは (3) より，(3) の命題 $(*)$ の否定が成り立つことを示している．
以上より，求める同値性が示された．

皆さんからの感想・質問等について

前回の小テストの際，講義についての感想・質問・要望等を書いてもらいました．そのいくつかについて以下にコメントします．

学生１． 練習問題を家で予習してくる形にして欲しい．一年後期の概論はそうでした．

佐伯． 各回に配る演習問題は，すべてその時間内には解けないと思います．残った問題は予習してきて次回の演習に役立てていただければと思います．

学生２． 近傍って $B_r(x)$ とかでもいいですか？

佐伯． できれば講義と同じ $U(x,r)$ という記号を使ってもらいたいと思います．$B_r(x)$ という記号を使う本などもあるかも知れませんが，これだと

$$\{y \in \mathbf{R}^n \mid d(y,x) < r\}$$

を指すのか

$$\{y \in \mathbf{R}^n \mid d(y,x) \leq r\}$$

を指すのか良くわかりません．

学生３． 全体的に講義のスピードが早いと思います．予習・復習はやって当前なので，それでもわからない時に何でもすぐに質問できるような教室であることを願います．

学生４． 何ヶ所か分からないところが存在し，そこで考え込んでしまったために，その後の先生の話についていけなくなってしまいました．講義中に何回か質問を受けつける時間をとってほしいです．

佐伯． 質問は講義中いつでも受けつけているつもりです．私が話で一呼吸置いているところでいつでも声をかけて下さい．講義中に「ここまで何か質問はありませんか？」と数回言ったつもりだったのですが…

なお，講義中で考え込むのは，私個人の意見としてはあまりお勧めではありません．わからなかった部分を記しておき，後でじっくり考えることをむしろお勧めします．ただそれは「質問なんかするな」という意味ではありません．わからなかったら素直に質問して下さい．時間の制約があり，細かい説明はできないかも知れません．その場合は演習の時間に再度質問して下さい．演習の時間はそのためにあるのです．

なお，質問があるのに質問することをためらっている人が多いかと思います．しかし，質問すると他の学生の役に立ち，他の学生から感謝されます．仮に「馬鹿な」質問でも，その質問に先生が対処している間に，他の学生はもっと他のことが考えられます．つまり，講義にそれだけ余裕が生まれるのです．先生の一方的講義ではなかなかそうは行きません．勇気を出して質問することを強く勧めます．

学生５． できれば成績評価の仕方をもう少し明確にしてもらえるとありがたいです．

佐伯． これについてはもう少し待って下さい．この講義を担当するのは初めてですので，もう少し様子を見させて下さい．ただし，演習の時間の解答状況，小テスト等はそれなりに重視するつもりです．

学生６． ちょっと僕には早かったです．小テストはどのような内容を出していくんですか？

学生７． 小テストを行う時は前の週に連絡があるでしょうか．できれば前の週に小テスト実施の有無を連絡して下さればと思います．

佐伯．小テストには簡単で基本的な問題を出してゆく予定です．なお毎週やるとは限りません．ときどき行います．

前の週に連絡はしません．地道に毎回準備をして臨んで下さい．この講義は試験前の一夜漬けでは決して単位は取れません．

なお，講義のスピードが速い，というコメントがかなりありました．これはすみませんが仕方ありません．適当に質問をしてくれればスピードが落ちるかも知れませんが，教えるべき内容の量がかなりありますので，どうしてもスピードが速くなってしまいます．講義中にわからなかったら**演習の時間を活用**して理解するよう努力して下さい．

学生８．ちゃんと予習などもしたいので，講義スケジュールなども教えていただければ，予習しやすくなるので，とてもありがたいです．

佐伯．すみませんがこの講義担当は初めてで，あまり細かいスケジュールは未定です．教科書の２章をだいたいその順番通りにやってゆく予定ですので，それで見当をつけてもらえればと思います．

練習問題

７．A を $\mathbf{R}^n$ の部分集合とする．点 $x \in \mathbf{R}^n$ が A の触点であるためには，A 内の点列 $\{x_n\}$ で x に収束するものが存在することが必要十分である．このことを示せ．

８．

$$A = \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbf{N} \right\} \subset \mathbf{R}$$

と置く．

(1) 0 が A の集積点であることを示し，$\overline{A} = A \cup \{0\}$ となることを示せ．

(2) A の点はすべて孤立点であることを示せ．

(3) $A^\circ = \emptyset$ を示せ．

９．X を空でない集合とする．X の閉集合系を定義し，それに属する部分集合の補集合を開集合と定義することにより，X に位相が定まることを示せ．

１０．X を空でない集合とする．X の部分集合の族 $\mathcal{B}$ が次を満たすとする．

(i) $\displaystyle\bigcup_{U \in \mathcal{B}} U = X.$

(ii) 任意の $U, V \in \mathcal{B}$ に対して，$U \cap V$ は $\mathcal{B}$ に属する集合の和集合として書ける．

このとき，$\mathcal{B}$ を基とする開集合系 $\mathcal{O}$ が一意的に存在することを示せ．

１１．ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ に対し，

$$\mathcal{B}' = \{U(x,r) \subset \mathbf{R}^n \,|\, x \in \mathbf{Q}^n,\ r \text{ は正の有理数}\}$$

が開集合系の基となることを示せ．また，$\mathcal{B}'$ が可算集合であることを示せ．

１２． 第二可算公理を満たさない位相空間の例を挙げよ．

１３． $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする．$\mathcal{O}$ の部分集合 $\mathcal{B}$ は，$\mathcal{B}$ に属する有限個の開集合の共通部分

$$U_1 \cap \cdots \cap U_k \quad (U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{B})$$

の全体が開集合系の基となるとき，**部分基**（あるいは**準基**）であるという．

さて X を空でない集合とする．X の部分集合の族 $\mathcal{B}$ が与えられたとき，それを部分基とする開集合系が一意的に存在するために $\mathcal{B}$ が満たすべき条件を求めよ．

１４． ユークリッド空間や距離空間に対して，定義 1.2.6 の内部・閉包の定義が，定義 2.3.1 と一致することを確かめよ．

１５． 位相空間 X の部分集合 A, B に対して次の等式が成り立つか？

(1) $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$.

(2) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

それぞれについて，成り立つならば証明を与え，成り立たないならば反例を挙げよ．

１６． X を位相空間とし，A をその部分集合とする．

(1) $x \in A$ が A の内点であるためには，x の開近傍で A に含まれるものがあることが必要十分であることを示せ．

(2) $x \in A$ が A の内点であるためには，A が x の近傍であることが必要十分であることを示せ．

(3) $x \in X$ が A の触点であるためには，x の任意の開近傍に対して $U \cap A \neq \emptyset$ となることが必要十分であることを示せ．

(4) $X - \overline{A} = \mathrm{Int}(X - A)$ が成り立つことを示せ．

１７． (1) $\mathbf{Q}^n$ は $\mathbf{R}^n$ で稠密であることを示せ．

(2) $\mathrm{Int}(\mathbf{Q}^n) = \emptyset$ となることを示せ．

(3) $\mathbf{Q}^n$ は孤立点を持たないことを示せ．

英単語集１

これまでの講義，演習で登場した言葉のうち，対応する英語を知っておいた方が良いものを以下に挙げておきます．参考にして下さい．

定義　definition,　命題　proposition,　補題　lemma,　定理　theorem

ユークリッド空間　Euclidean space,　距離　distance

近傍　neighborhood（又は neighbourhood）

開集合　open set,　閉集合　closed set,　内部　interior,　閉包　closure

Coffee Break

かなり前の話になります．スイスのジュネーブ大学で勉強していた頃，学生寮の私の隣の部屋に，イランから亡命してきているという，ジュネーブ大学数学科の1年生が住んでいました．彼とは良くスポーツをしたり，映画を見に行ったり，大の仲良しになりました．

ある日，彼と2人で街を散歩していると，彼が，
「そろそろ微積の試験があるから，何か簡単な問題を出してくれないか？」
と言うので，私は次のような問題を彼に出しました．
「$0.999\cdots$ という数を考えよう．いったいこの数は1より小さいだろうか，1に等しいだろうか，それとも1より大きいだろうか？」

彼はしばらく考えてから，たぶん1に等しいと思うけれど，どうしてだかわからない，と答えました．彼は数学が大好きで，勉強も熱心にしていたのですが，まだ数学を始めたばかりで，数学的なものの考え方がまだ分かっていなかったのです．

そこで私は次のような「解答」を彼に言いました．
「まずこの $0.999\cdots$ という数を S と置こう．すると，

$$10S = 9.999\cdots$$

となるから，これから

$$S = 0.999\cdots$$

を引くと，$9S = 9$ となる．したがって，$S = 1$ となるわけだ．」

この解答を聞いたら，彼はきっと，「なるほど！」と言ってくれるだろうと私は期待していたのですが，意に反して，彼の反応は，
「そりゃそうだけど，何だかどこかおかしいような気がするなあ．」
という言葉でした．そうなのです．実は上の議論には，1つギャップ（日本語で言うと飛躍）があるのです．そのことを彼に言うと，彼はそのギャップを見つけることができませんでした．では，九州大学数学科の皆さんには，問題のギャップがどこにあるか分かるでしょうか？数学の基本が分かっていれば，少し考えただけで分かると私は思うのですが...

ヒント：$0.999\cdots$ という数をいかにして数学的に定義するか（または定式化するか）が鍵です．