数学概論２

２００７年7月５日分

佐伯 修

６月２８日実施の小テストについて

問題は

「X を連結な位相空間とし，$f : X \to \mathbf{R}$ を連続関数とする．$x, y \in X$ があって，$a = f(x) < f(y) = b$ ならば，$a < \forall c < b$ に対して，ある $z \in X$ が存在して $f(z) = c$ となることを示せ.」

でした．20 点満点で採点し，平均点は 5.6 点でした．

これは６月２１日の講義で証明した定理 6.1.10 そのものでした．以前にも言いましたが，講義の復習をきちんとしておけばある程度はできる問題だったと思います．まったくできなかった人は良く復習をしておいて下さい．

練習問題

１１１．X を距離空間とし，A をその空でない部分集合とする．点 $x \in X$ が A の集積点であるためには，A の点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ で，次を満たすものが存在することが必要十分であることを示せ.

(1) $n \neq m \Longrightarrow x_n \neq x_m$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = x$

１１２．X, Y を距離空間とし，$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ を X の点列，$\{y_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ を Y の点列，$a \in X$，$b \in Y$ とする．このとき次の 2 条件は同値であることを示せ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = a$ かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} y_n = b$

(2) 直積距離空間 $X \times Y$（２９番参照）の点列 $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbf{N}}$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (a, b)$$

１１３．(1) $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ を連続関数で，$f(0) \cdot f(1) \leq 0$ なるものとする．このときある $t \in [0, 1]$ が存在して $f(t) = 0$ となることを示せ.

(2) $g : [0, 1] \to [0, 1]$ を連続関数とする．このとき，ある $t \in [0, 1]$ が存在して $g(t) = t$ となることを示せ.

１１４．$\mathbf{R}^2$ 内の単位円周を S^1 と書く．勝手な連続写像 $f : S^1 \to \mathbf{R}$ に対して，ある $a \in S^1$ で $f(a) = f(-a)$ となるものがあることを示せ.

１１５．A と B を $\mathbf{R}^2$ の有界部分集合で面積を持つものとする．このとき，平面上の直線で，それぞれ面積がちょうど半分になるように A および B を２分するものが存在する．このことを示せ．

１１６．A が $\mathbf{R}^2$ の有界部分集合で面積を持つものであれば，A の面積を４等分する互いに直交する２直線の組が存在する．このことを示せ．

１１７．次の $\mathbf{R}^2$ の部分集合のうち，連結なものを決定せよ．

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \,|\, x^2+y^2<1\} \\ B &= \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \,|\, x^2+y^2>1\} \\ C &= \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \,|\, x^2+y^2\neq 1\} \end{aligned}$$

１１８．次の $\mathbf{R}^3$ の部分集合のうち，連結なものを決定せよ．

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \,|\, x^2+y^2-z^2=1\} \\ B &= \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \,|\, x^2+y^2-z^2=-1\} \end{aligned}$$

１１９．$n\geq 2$ のとき，$\mathbf{R}^n-\{\mathbf{0}\}$ が連結であることを示せ（ここで $\mathbf{0}$ は $\mathbf{R}^n$ の原点である）．また，

$$S^{n-1}=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^n \,|\, x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1\}$$

が連結であることを示せ．

１２０．X を完備距離空間とし，$f:X\to X$ を写像とする．今，ある定数 c で $0<c<1$ なるものが存在して，任意の $x,y\in X$ に対して

$$d(f(x),f(y))\leq c\cdot d(x,y)$$

が成り立つとする．（このような f は**縮小写像**と呼ばれる．）すると，ある $a\in X$ で $f(a)=a$ となるものが存在することを示せ（この事実を**縮小写像の原理**と呼ぶ）．

１２１．X を距離空間とし，$\widehat{X}$ をそのコーシー列全体の集合とする．$\{x_n\},\{y_n\}\in\widehat{X}$ に対して，

$$\{x_n\}\sim\{y_n\}\Longleftrightarrow\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n)=0$$

と定義する．関係 “$\sim$” は $\widehat{X}$ に同値関係を定めることを示せ．

皆さんからの感想・質問等について

６月２８日実施の小テストの際に２人の学生から質問をもらいました．以下に私のコメントを書いておきます．番号は６月７日のプリントからの続き番号です．

学生３２．今回の授業の初めに証明した

$$（d_1 \text{ の定める位相}）=（d_2 \text{ の定める位相}）$$

の部分で何がイコールなのかちょっとまだ理解できていない．

佐伯．口頭では説明しましたが，その意味をもう一度説明しておきます．

距離空間 (X, d_1) の開集合全体の集合を $\mathcal{O}_1$ と書くことにします．これは X の開集合系ともいいますが，X の**位相**ともいいます．同様に (X, d_2) の開集合系を $\mathcal{O}_2$ とします．このとき，上の等式は

$$\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$$

ということを意味しています．“集合の集合”としての等式ですから，その意味するところを言い換えると，「(X, d_1) の開集合は (X, d_2) の開集合であり，(X, d_2) の開集合は (X, d_1) の開集合である」ということです．

距離空間の開集合の定義には ε-近傍の概念を用いますが，これを定義するには距離関数が必要です．したがって集合 X が同じでも，その上の距離関数が異なれば，一般には対応する開集合系は異なります．それが異ならない条件を与えているのが命題 7.1.1 なのです．

学生３３．この講義以降でもっと位相について詳しくやる講義は 2 年後期以降あるのですか？

佐伯．本講義のように本格的に詳しくやる講義はもうありません．しかし位相の話が重要になってくる講義はあります．2 年生後期の幾何学 A，3 年生後期の幾何学 C，数学特論 C2 (位相幾何) がその代表的なものでしょう．解析学 B2 や数学特論 C3 (関数解析) では関数のなす空間の位相の話が出てきます．

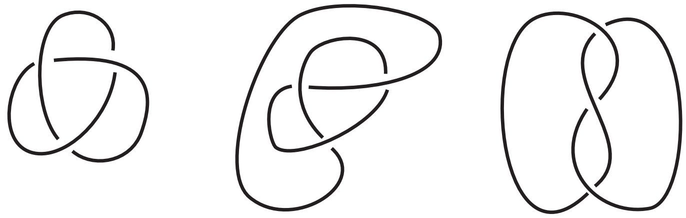
英単語集３

連結　connected,　弧状連結　arcwise connected
連結成分　connected component,　一様連続　uniformly continuous
収束する　converge,　発散する　diverge,　極限　limit
極限点　limit point,　コーシー列　Cauchy sequence
完備距離空間　complete metric space,　等長写像　isometry
完備化　completion

Coffee Break

紐を結ぶお話です．

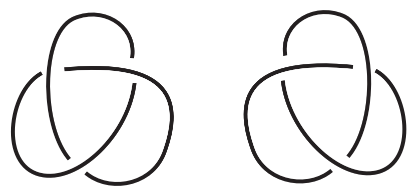
一般に，空間内の（自分自身とは交わらない）閉じた曲線のことを**結び目**と呼びますが，これはトポロジー（位相幾何学）における重要な研究対象です．なお，



2つの結び目は，それらを空間内で切ったりくっつけたりせず，また自分自身とも交叉しないように連続的に変形できるとき，同じ結び目であると考えます．たとえば，上の例はすべて同じ結び目を表します．

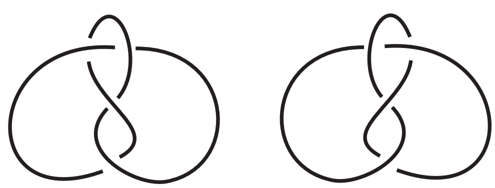
では問題です．以下の2つの結び目は同じでしょうか，異なるでしょうか？

（ア）



では次の例はどうでしょうか？

（イ）



実は，（ア）の2つは異なる結び目であり，（イ）の2つは同じ結び目であることが知られています．なぜでしょうか？（イ）はやればできるので，興味のある人は是非チャレンジしてみて下さい．（ア）の2つが異なることを示すのは結構大変で，結び目理論といわれている分野の定理を使わないと証明できません．

なお，結び目理論は「紐」といった卑近な対象を研究するので，あまり高級な数学という感じがしないかも知れませんが，それは大きな間違いです．実際，結び目理論は数学の他の様々な分野（解析学，数理物理学，微分幾何学，代数幾何学，等々）と深い関連があるばかりか，DNA 研究などの生化学にも応用できることがわかっていて，現在でも世界中で非常に活発に研究されています．