数学概論２・演習　期末試験　略解

佐伯 修

２００７年７月１９日（木）実施の期末試験の略解を書いておきます．

１． 定義を書く問題でした．それぞれ教科書の定義 2.12, 2.8, 2.42–43, 2.37 を参照して下さい．

２． (1) $X \subset U((0,0),2)$ ゆえ X は有界である．また，任意の $a = (a_1, a_2) \in \mathbf{R}^2 - X = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 > 1\}$ に対して，$\varepsilon = (d((0,0),a) - 1)/2 > 0$ とおけば，$U(a,\varepsilon) \subset \mathbf{R}^2 - X$ となることがわかる．したがって $\mathbf{R}^2 - X$ は $\mathbf{R}^2$ の開集合であり，よって X は $\mathbf{R}^2$ の閉集合である．$\mathbf{R}^2$ の有界閉集合はコンパクトだから X はコンパクトである．

(2) 任意の $r > 0$ に対して $a_r = (r, -r)$ を考えると，$d((0,0),a_r) > r$ であるが，$a_r \in Y$ である．よって Y は有界でない．コンパクトであれば有界であるので，したがって Y はコンパクトでない．

(3) 直積空間 $Z = X \times Y$ がコンパクトであるためには，X, Y がともにコンパクトであることが必要十分である．ところが Y はコンパクトでないので，したがって Z もコンパクトでない．

３． (1) $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} F_n = 0$ ゆえ，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N \in \mathbf{N}$ が存在して，$n \geq N \Longrightarrow \operatorname{diam} F_n < \varepsilon$ となる．ここで仮定から $x_N, x_{N+1}, \ldots \in F_N$ であるので，$m, n \geq N \Longrightarrow d(x_m, x_n) \leq \operatorname{diam} F_N < \varepsilon$ となる．よって点列 $\{x_n\}$ はコーシー列である．

(2) X は仮定より完備なので，点列 $\{x_n\}$ は収束する．その収束先を $x \in X$ とすると，各 $n \in \mathbf{N}$ に対して部分列 $\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$ も x に収束する．この部分列は F_n 内の点列であり，仮定より F_n は X の閉集合だから $x \in F_n$ となる．これがすべての $n \in \mathbf{N}$ について成り立つので，

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \ni x$$

となる．よって求めることが示された．

４． (1) 正しい．講義の定理 5.1.7 そのものなので省略．

(2) 正しくない．反例（の例）：$\mathbf{R}$ は完備であるが，その連続写像

$$\operatorname{Arctan} : \mathbf{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$$

による像 $(-\pi/2, \pi/2)$ は完備でない．

5． (1) $[x] \in X/\sim$ に対して，$\bar{f}([x]) = f(x) \in Y$ と定義する．これが同値類 $[x]$ の代表元の選び方に依らないことを示そう．$x_1, x_2 \in X$ に対して $[x_1] = [x_2]$ すなわち $x_1 \sim x_2$ とすると，仮定から $f(x_1) = f(x_2)$ である．よって上の定義は well-defined である．

さらに勝手な $x \in X$ に対して，

$$\bar{f} \circ \pi(x) = \bar{f}([x]) = f(x)$$

となるので，図式の可換性がしたがう．以上で求める $\bar{f}$ の存在が示された．

(2) まず f は全射ゆえ，任意の $y \in Y$ に対してある $x \in X$ があって $y = f(x)$ となる．このとき上の定義から $\bar{f}([x]) = y$ となるので，$\bar{f}$ も全射である．

また，$x_1, x_2 \in X$ に対して

$$\bar{f}([x_1]) = \bar{f}([x_2]) \Longrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 \sim x_2 \Longrightarrow [x_1] = [x_2]$$

が成り立つので，$\bar{f}$ は単射である．

次に $\bar{f}$ が連続であることを示すため，開集合 $U \subset Y$ を任意に取る．すると (1) の図式の可換性より，

$$f^{-1}(U) = \pi^{-1}(\bar{f}^{-1}(U))$$

が成り立つ．f は連続だから $f^{-1}(U)$ は X の開集合である．よって商位相の定義から $\bar{f}^{-1}(U)$ は $X/\sim$ の開集合である．したがって $\bar{f}$ は連続である．

(3) X はコンパクトゆえ，その商写像 π（これは連続写像である）による像 $\pi(X) = X/\sim$ はコンパクトである．一方 Y は $\mathbf{R}^n$ の部分空間ゆえハウスドルフである．コンパクト空間からハウスドルフ空間への全単射連続写像は同相写像であるので，(2) より $\bar{f}$ は同相写像である．

6． 勝手な 2 点 $p, q \in \cup_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda$ を取ると，ある $\lambda_x, \lambda_y \in \Lambda$ があって，$x \in L_{\lambda_x}, y \in L_{\lambda_y}$ となる．

$\lambda_x = \lambda_y$ のときは，x と y は直線 $L_{\lambda_x} = L_{\lambda_y}$ 上にあるので，その直線内の弧で結べる．

$\lambda_x \neq \lambda_y$ のときは，仮定より直線 L_{λ_x}, L_{λ_y} は平行でないので，交点がちょうど一つ存在する．それを z とすると，x と z, z と y はそれぞれ弧で結べる．したがって x と y も $\cup_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda$ 内の弧で結べる．

以上より $\cup_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda$ は弧状連結である．弧状連結であれば連結なので，これで求めることが示された．