数学概論２ 中間試験

２００７年5月３１日（木）１３：００〜１５：３０

佐伯 修

以下の問いに解答せよ．鍵括弧 [ ] 内の数字は配点を表す．なお，問題は解けるものだけを選んで，途中を飛ばして解答しても構わない．たとえば，(2) ができなくても，その結果だけを用いれば (3) ができるような場合，(2) の結果を用いて (3) を解いても構わない．また解答の際，何を認めて良く，何を示すべきなのか，問題文を良く読み，各自判断すること．

なお，ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ $(n \geq 1)$ には通常の位相を入れて考えるものとする．

１．[45] 集合 $X = \{a, b, c\}$ に対して，その部分集合 U, V, W を

$$U = \{a, b\},\ V = \{b, c\},\ W = U \cap V$$

で定める．

(1) $\mathcal{O} = \{\emptyset, U, V, W, X\}$ は X に位相を定めることを示せ．

以下 X には位相 $\mathcal{O}$ を考えて位相空間とみなす．

(2) 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の閉集合をすべて求めよ．

(3) 集合 U の集積点をすべて求めよ．

(4) 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ は T_0 空間か？またハウスドルフ空間か？

(5) X に次の同値関係 “$\sim$” を考える．

$$a \sim a,\ b \sim b,\ c \sim c,\ a \sim c,\ c \sim a$$

この同値関係による商空間 $X/\!\sim\, = \{[a], [b]\}$ $([a] = [c])$ の開集合をすべて求めよ．

２．[15] ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の空でない部分集合 A と点 $x \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \in \mathbf{R} \mid a \in A\}$$

と定義する．

(1) $d(x, A) = 0$ となるためには，x が A の触点となることが必要十分である．このことを示せ．

(2) A が閉集合であるためには，

「$\mathbf{R}^n$ の点 x に対して $x \notin A \Longrightarrow d(x, A) > 0$」　　$(*)$

が成り立つことが必要十分であることを示せ．

３．[15] X を空でない集合とし，d_1, d_2 をその上の二つの距離関数で，任意の $x, y \in X$ に対して

$$d_2(x,y) \leq d_1(x,y)$$

が成り立つものとする．以下，必要であれば，$x \in X$ と $\varepsilon > 0$ に対して，

$$U_1(x,\varepsilon) = \{y \in X \mid d_1(x,y) < \varepsilon\}$$
$$U_2(x,\varepsilon) = \{y \in X \mid d_2(x,y) < \varepsilon\}$$

という記号を用いよ．

(1) 距離空間 (X, d_2) の部分集合 U が開集合であることの定義を述べよ．

(2) 恒等写像 $\mathrm{id} : X \to X$ を距離空間 (X, d_1) から (X, d_2) への写像とみたとき，連続写像となることを示せ．

４．[20] (1) 位相空間の間の写像が同相写像であることの定義を述べよ．

(2) X, Y を位相空間とし，$y_0 \in Y$ とする．直積空間 $X \times Y$ の部分空間 X_0 を

$$X_0 = \{(x, y_0) \in X \times Y \mid x \in X\}$$

で定め，写像 $f : X \to X_0$ を

$$f(x) = (x, y_0) \quad (x \in X)$$

で定める．f が同相写像であることを示せ．

５．[5] 次の (1), (2) **いずれか一つ**に解答せよ．

(1) 普段の講義と演習について（今日の試験についてではない）の感想，質問，意見，要望等を詳しく述べよ．

(2) 講義で紹介した定理のうち，自分が最も気に入った定理を一つ述べ，気に入った理由を詳しく述べよ．