

数学の汎用性

～トポロジーの話題から～

九州大学大学院数理学研究院
佐伯 修

目次

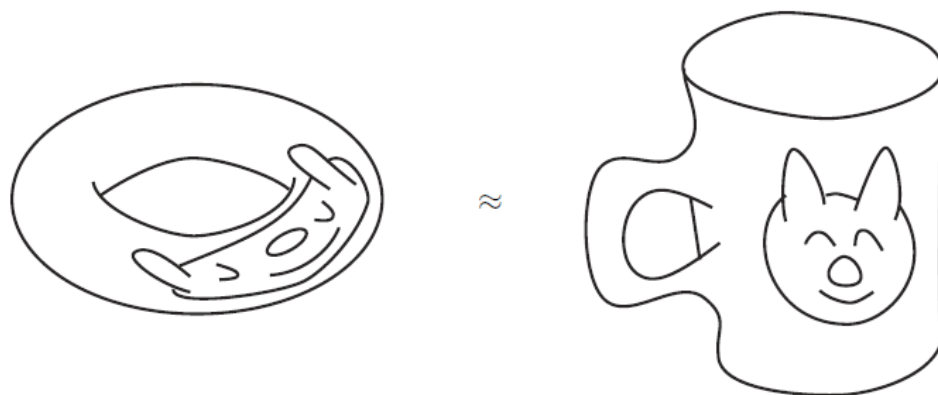
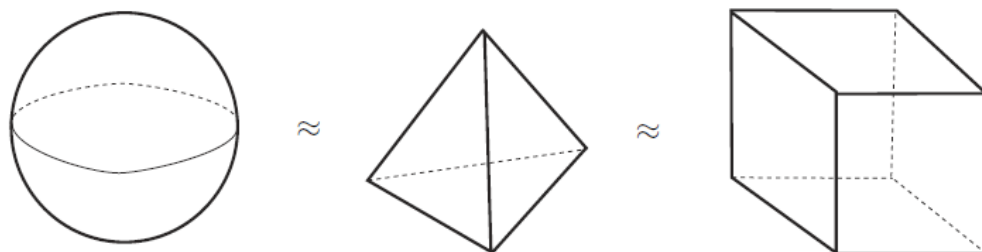
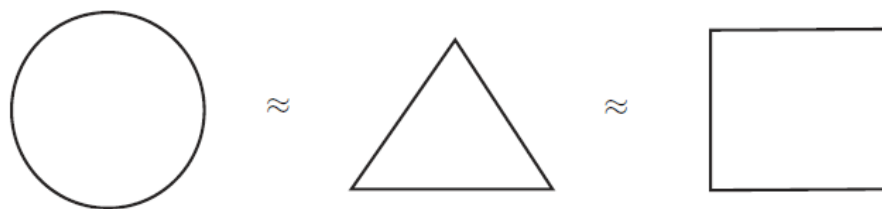
- トポロジーとは
- 実数の連続性
- 結び目理論とDNA
- ポアンカレ予想と宇宙の形
- グラフ理論の話題から
- 数学と社会

トポロジー = 位相幾何学

図形などの幾何学的対象



連続的に変形しても変わらない性質を研究

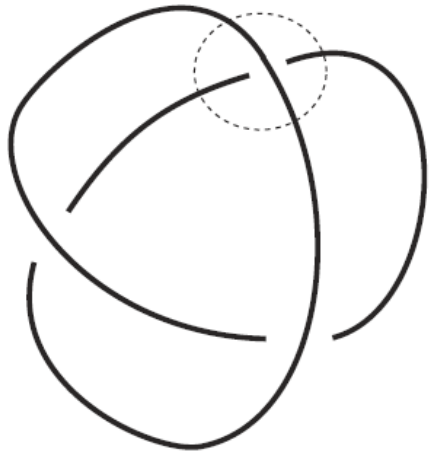


トポロジーで同じとなる図形の例

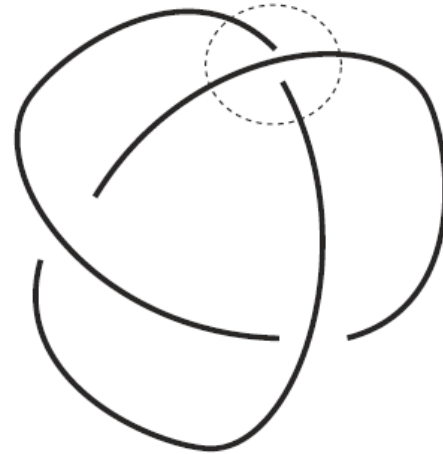
キーワード = 連続

図形は、好きなように曲げたり、
延ばしたりして良いが、
切り離したり、くっつけたりしては
いけない。

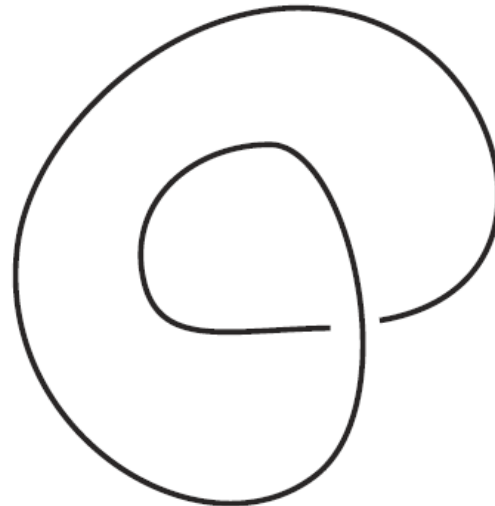
例



ダメ!



OK



$$\frac{1}{3} = 0.333\dots$$

$$\frac{1}{3} \times 3 = 0.333\dots \times 3$$

$$\therefore 1 = 0.999\dots$$



$$S = 0.999\dots$$

とおく.



あやしい!

両辺を10倍して

$$10S = 9.999\dots$$

第二式から第一式を引いて

$$10S - S = 9$$

$$\therefore S = 1$$

しかし, $S = 0.999\cdots$ を

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} 9 \times \left(\frac{1}{10}\right)^n$$

なる**無限級数**, より正確には, 数列

$$S_n = \sum_{k=1}^n 9 \times \left(\frac{1}{10}\right)^k$$

の**極限**と考えれば, 正しい議論になる!

大事なこと:

数列 $0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, \dots$ の
極限が**存在すること**



実数の連続性



しかし、 $0.999\cdots$ と 1 は、
表し方が異なるのだから、
異なる数ではないのか？

実は、無限小数も許すと、実数の小数による「表示」は、一意的ではない！

$$2 = 1.999\cdots$$

$$1.5 = 1.4999\cdots$$

$$10.13 = 10.12999\cdots$$

$$2 = 2.000\cdots$$

$$1.5 = 1.5000\cdots$$

$$10.13 = 10.13000\cdots$$

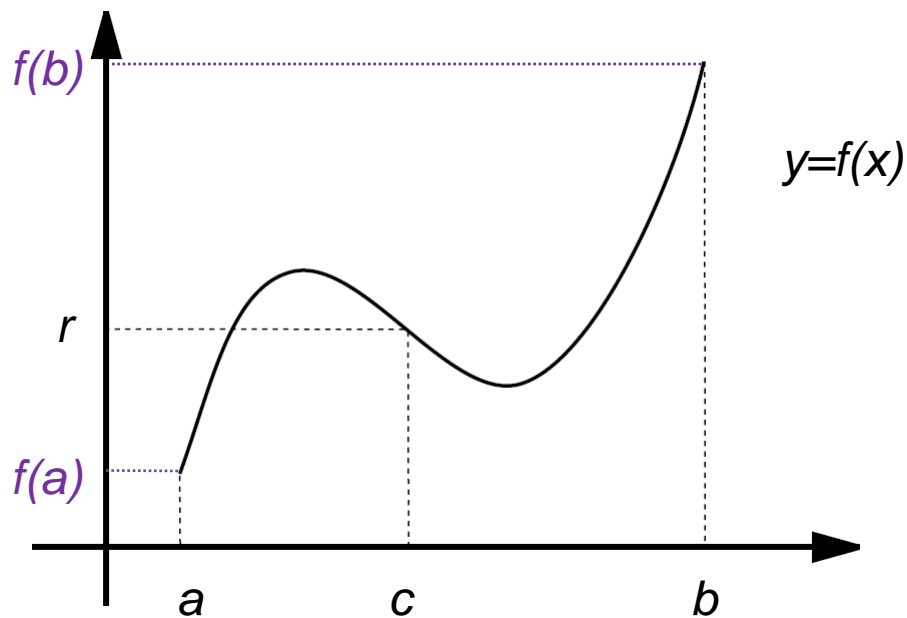
※ 有限小数のみ一意性が成り立たない

※ 記数法にもよる. たとえば2進法, 3進法等でも似た現象が起こるが,
一意性が成り立たない数は変わってくる.

有理数(分数)にはなぜ連続性がないのか？

実数の連続性を如実に表す定理 (中間値の定理)

区間 $[a, b]$ 上の実数値連続関数 f と、実数 r について、もし $f(a) < r < f(b)$ が成り立てば、 $f(c) = r$ となる c で、 $a < c < b$ なるものが存在する。



$f(x) = x^2$ は区間 $[0, 2]$ 上で連続.

$$f(0) < 2 < f(2)$$

$f(c) = c^2 = 2$ となる c はあるか？

実数の範囲では 存在する:

$$c = \sqrt{2}$$

しかし, これは有理数ではない! つまり,
中間値の定理は, 有理数に対して成立しない.
⇒ 「有理数の不連続性」

※ 不連続な有理数を「完備化」して実数が構成されている.

実数は有難い！

キーワード : 連続性

実数直線はつながっている

結び目理論とその応用

左は結ばれていない, 右は結ばれている

DNA結び目

結び目の表(ごく一部)

結び目の科学的研究：**ガウス**(18世紀末)が始めたと言われる。

1860年代半ば：**ケルヴィン**卿による**渦原子仮説**
異なる結び目に異なる原子が対応すると主張

➡ 間違いが指摘され、物理学者・化学者から忘れ去られる。

1980年代：**ジョーンズ**が、フォン・ノイマン環や統計力学との関係を指摘 → **フィールズ賞受賞**

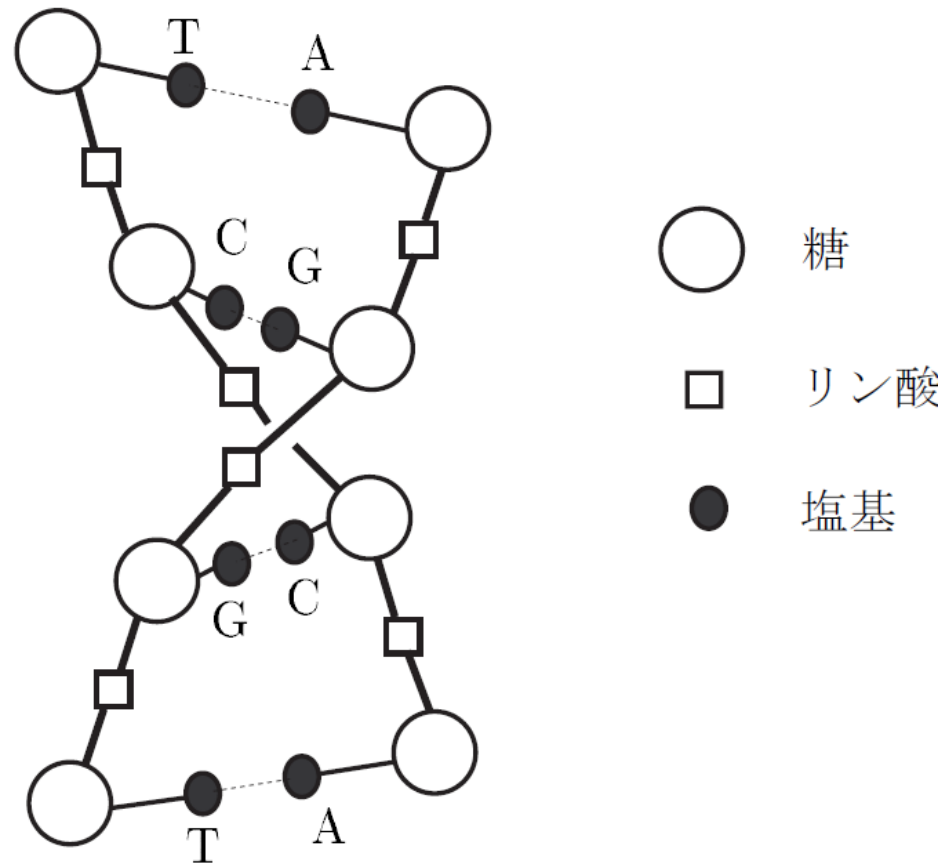
➡ 現在も盛んに研究が続けられている
(数学の花形分野の一つ)

結び目理論は諸科学のかけ橋である
と言っても過言ではない。

例：

DNA組み換えの解析への応用

DNAの2重らせん構造



DNAはとにかく長い

細胞をサッカーボールにたとえると...
細い紐が200kmくらいつまっている算段

1963年頃、輪になった**環状DNA**が発見された

その後、多くのDNAが環状をしていることが
わかってきた。

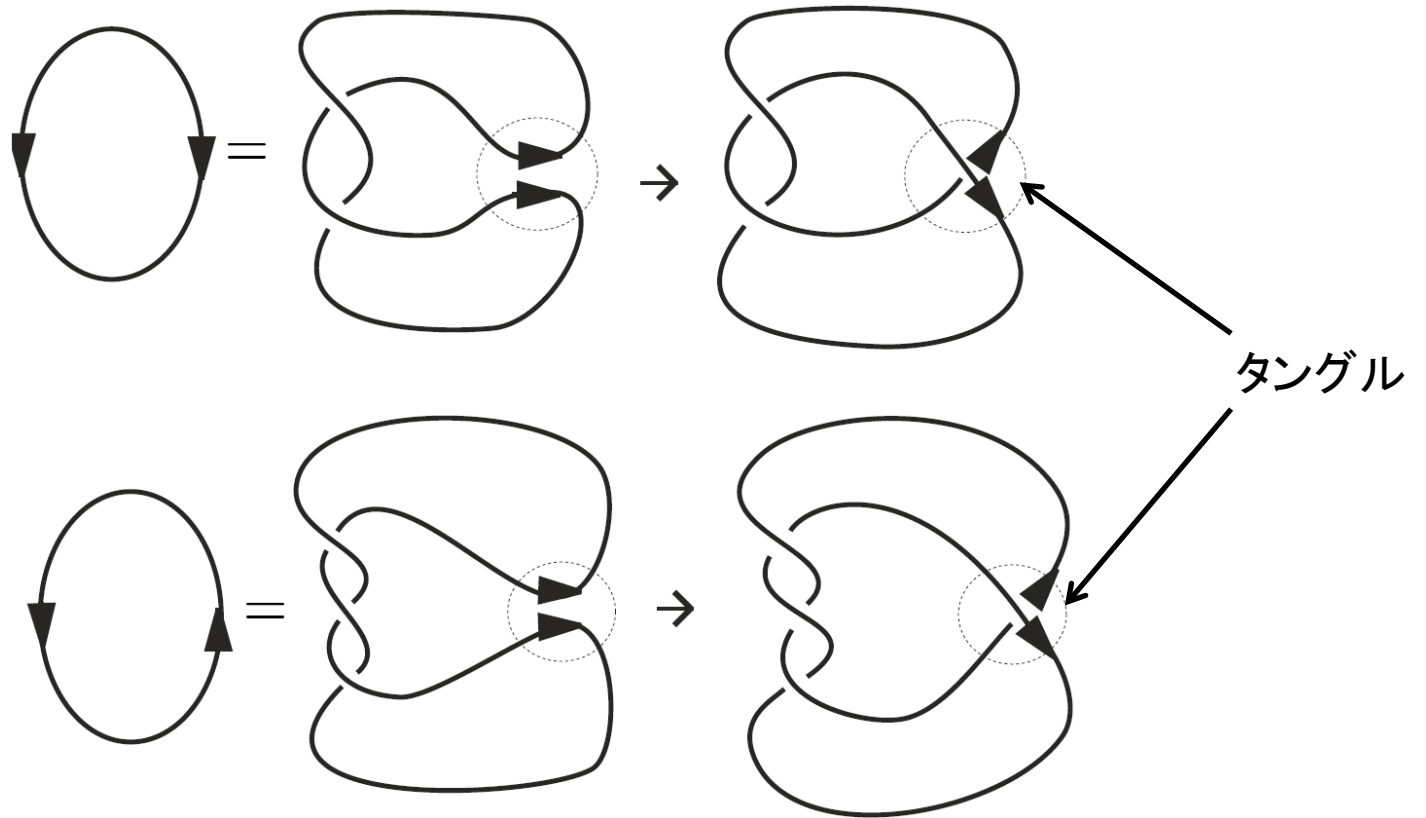
それが結ばれたり、あるいは複数の環状DNAが
絡んだりしているものも発見されてきた。

複製・転写・組み換えを行う際、
絡んでいてはうまくゆかない。
これを解消しているのが、トポイソメラーゼ
といわれる酵素

制限酵素：

DNAの紐の特定の配列をした数箇所のみ
に作用して組み換えを行う。

DNAの部位特異的組み換えと呼ばれる。



制限酵素による部位特異的組み換えの例

しかし、実験で観察できるのは、

組み換え前の結び目の形(基質: K_S)と
組み換え後の結び目の形(生成物: K_P)
のみ.

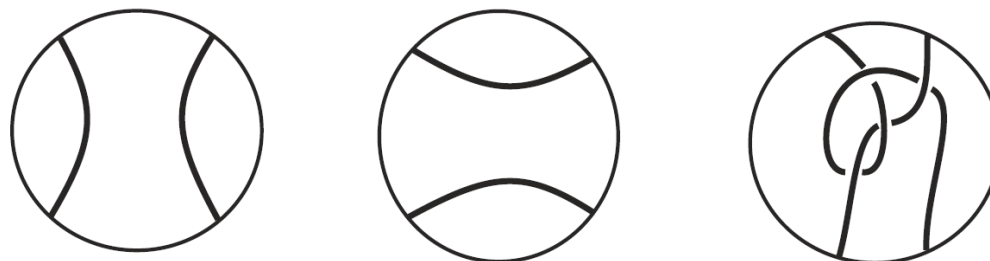
実際に酵素が働いているタングルの中身は

ブラックボックス

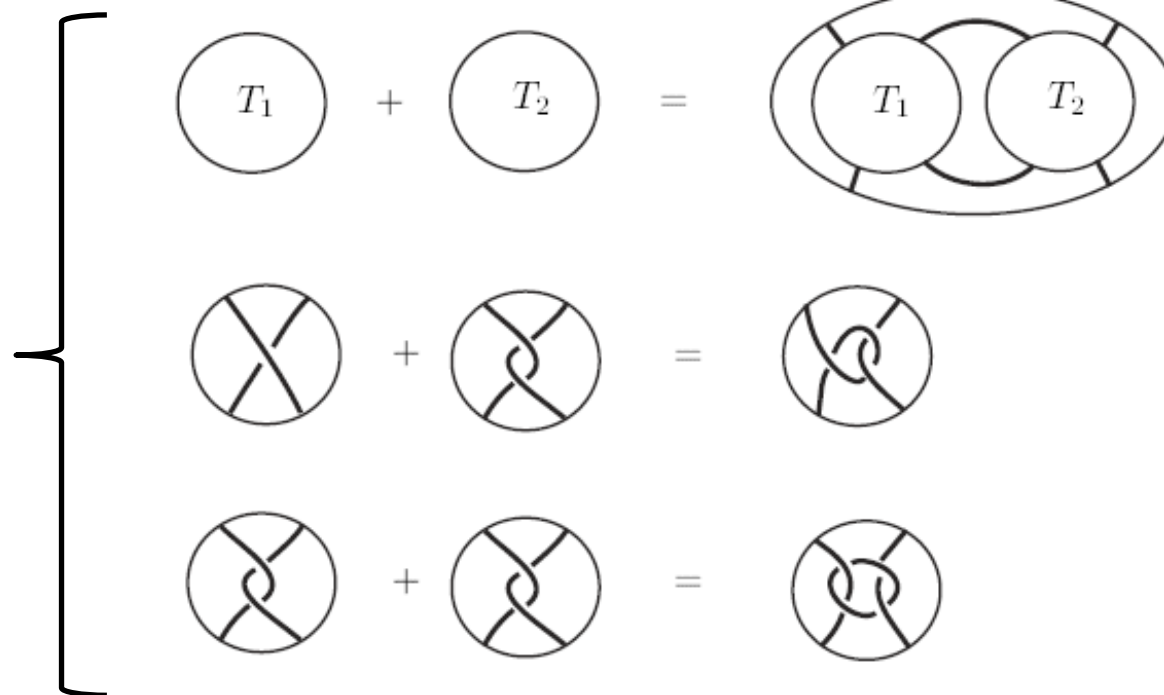
実際の観察で組み換えの様子を特定する
のは不可能！

結び目理論(数学)が大活躍！

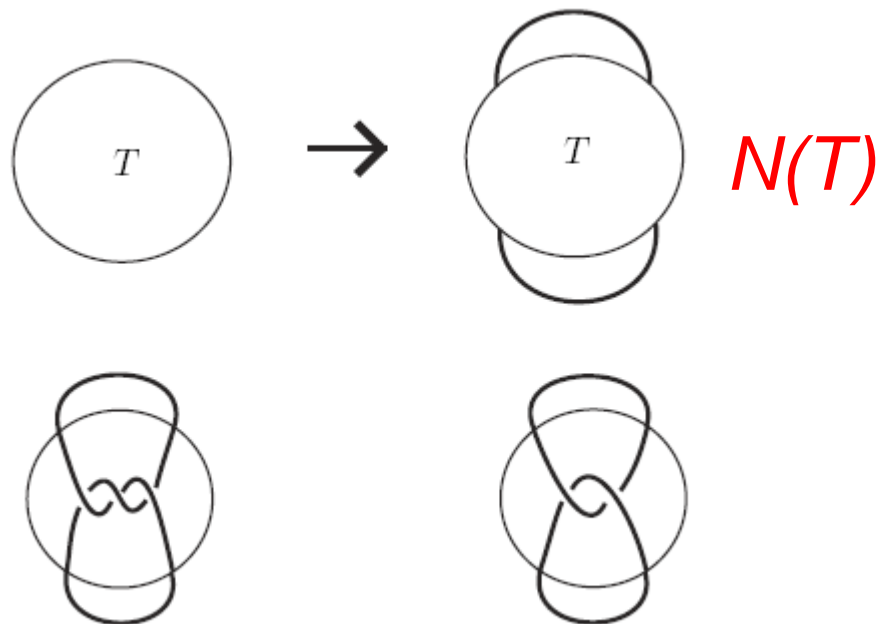
タンゲルの例

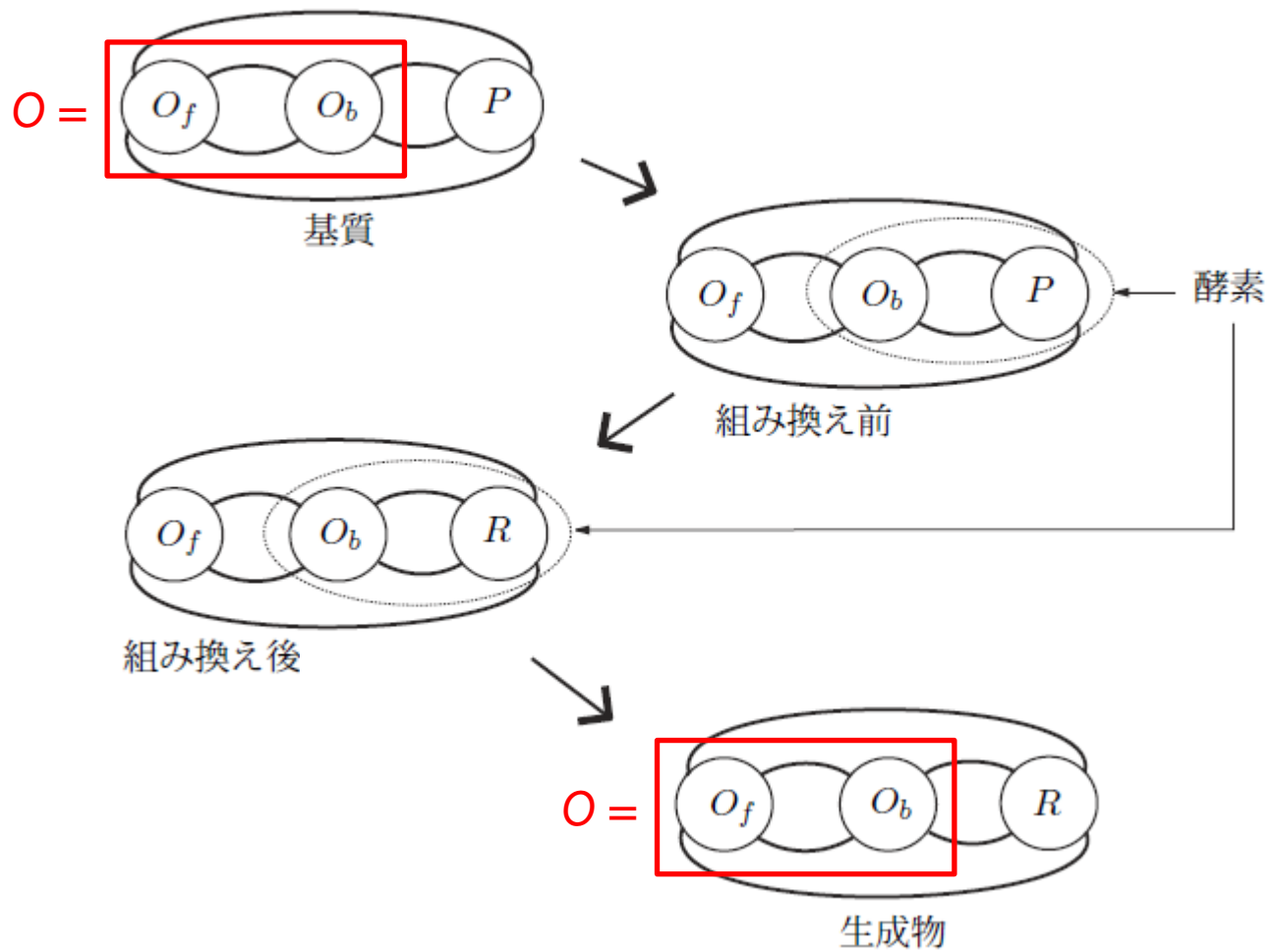


タンゲルの 足し算



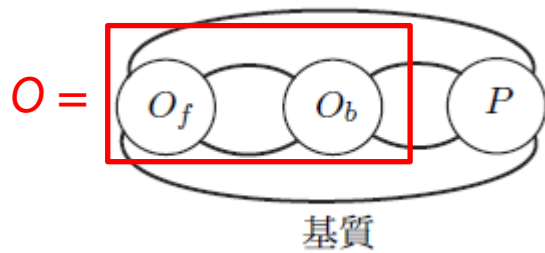
タングルから結び目を作る





DNA組み換えのモデル

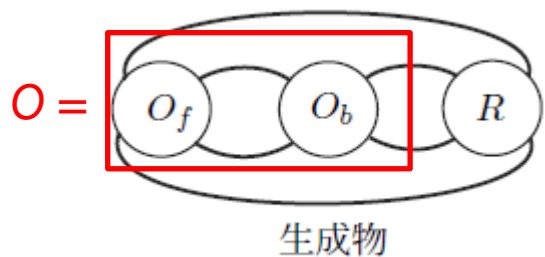
タンゲル方程式



$$= K_S$$

$$N(O+P) = K_S$$

実験結果として観察可能



$$= K_P$$

$$N(O+R) = K_P$$

$$N(O+P) = \text{○}$$

$$N(O+R) = \text{⊖}$$

$$N(O+2R) = \text{⌘}$$

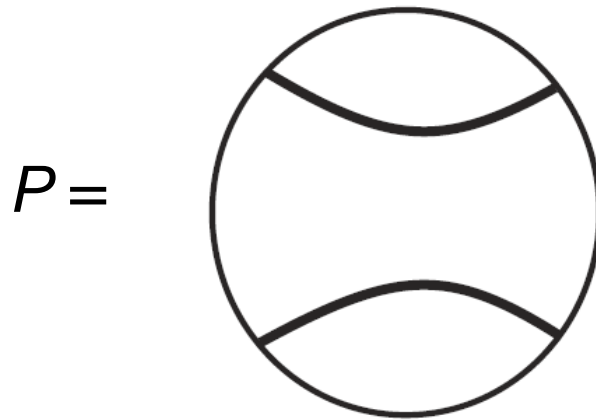
$$N(O+3R) = \text{⌚}$$

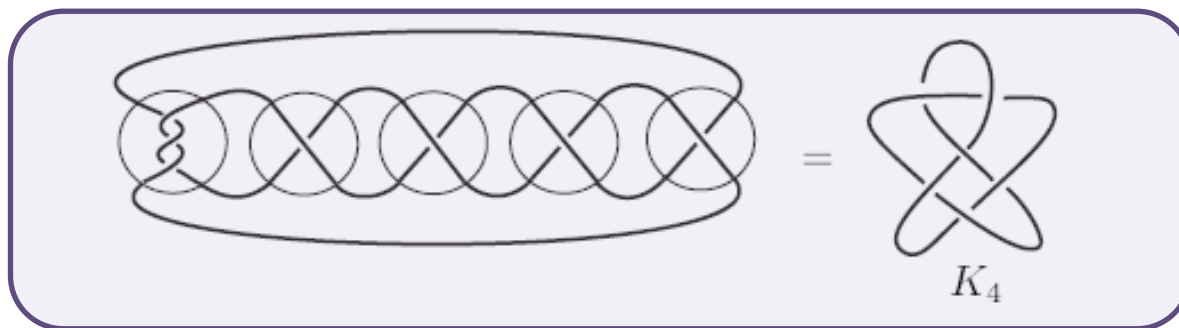
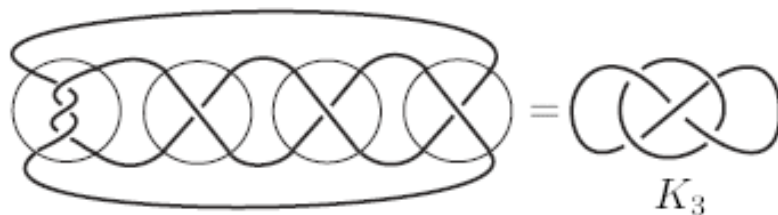
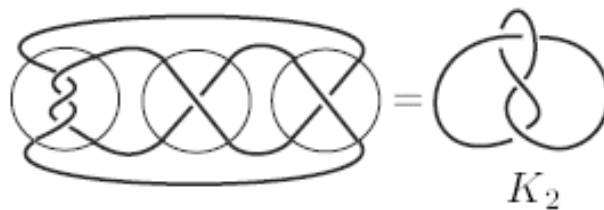
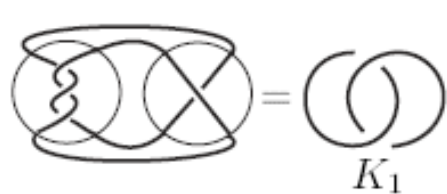
実際に得られた
タングル方程式

Ernst と Sumners (1990)は, 位相幾何学の種々の手法・定理を駆使して, この方程式を解いた!



※ P の数学的解は、実は無限個存在する.
しかし、生物学的理由から、 P は以下となる
ことが推察できる.





予想が的中！

タングル方程式を解くための鍵となる定理：
巡回手術定理

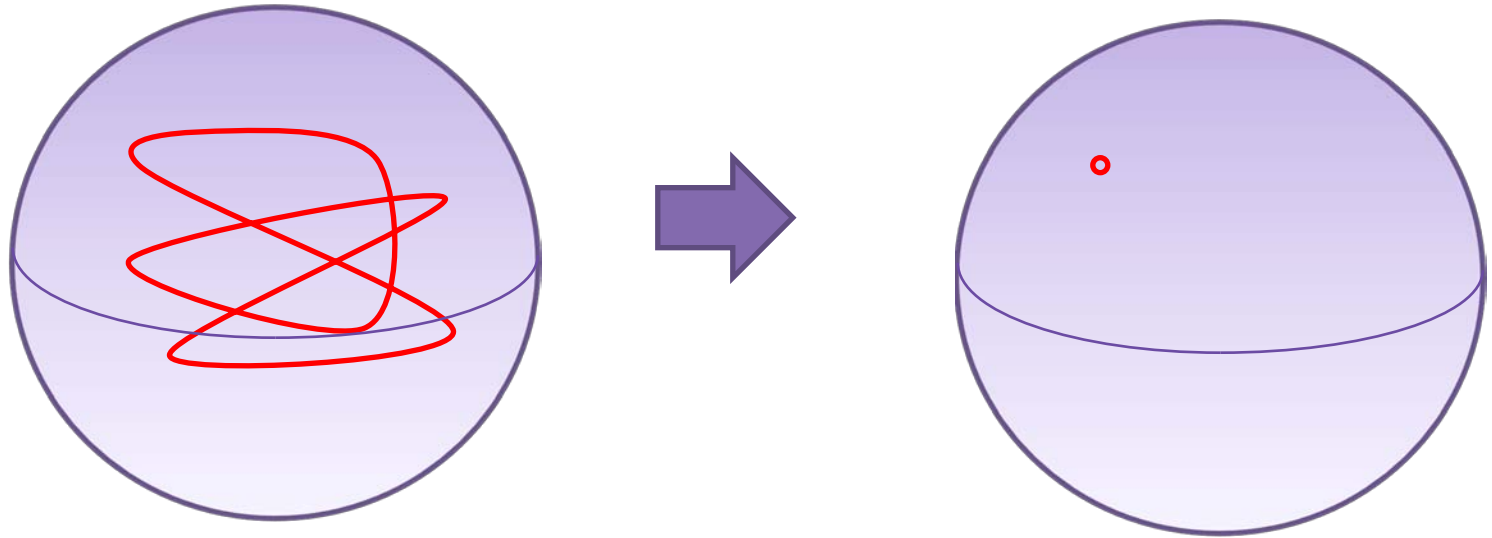
(Culler, Gordon, Luecke, Shalen, 1985)

※ 3次元多様体という「図形」に関する深い定理

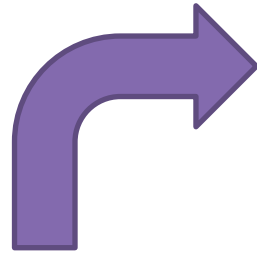


最近解かれた**ポアンカレ予想**とも大きく関連

ポアンカレ予想

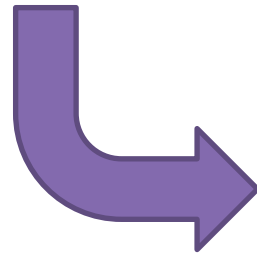


空間に果てがなく、どんな輪も連続的に1点に縮められるならば、それは「3次元の球」と言える、というポアンカレ予想(20世紀初頭提出)は、つい最近ペレルマンにより正しいことが証明された。



DNA組み換えの解析

ポアンカレ予想



宇宙の形

数学の普遍性のなせる技！

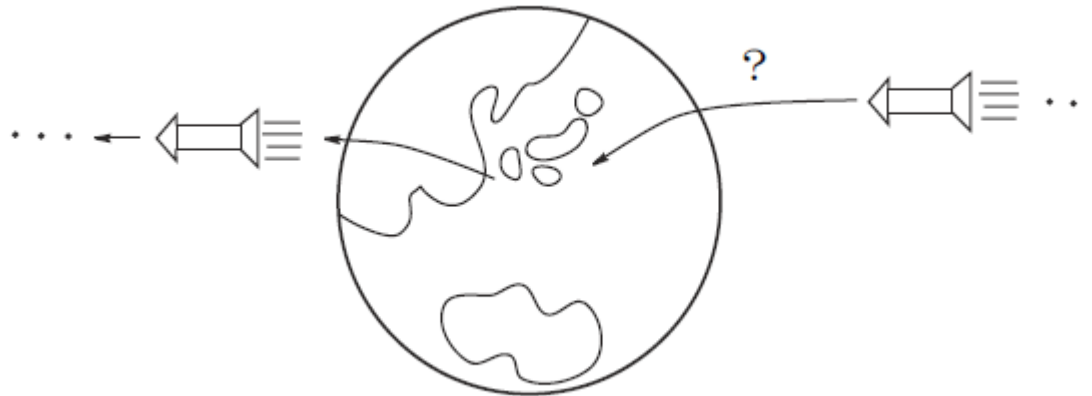
昔の人は...
地球は平らで、果てがある
とっていた(らしい)

しかし実際には...

でも、昔の人を馬鹿にはできません...

宇宙の形，分かりますか？
どこまでもまっすぐに延びていて，
果てがあると，漠然と思いませんか？

宇宙が丸かったら...



宇宙一周旅行？

宇宙の本当の形はまだ分かっていません.

しかし, 多くの数学者がその形を特定しようと努力しています.

近い将来, 特定される日が来るでしょう.

※ ビッグバン時代に放射された宇宙マイクロ波が手掛かり

グラフ理論の話題から

「数学活用」の例

グラフ

いくつかの頂点を
いくつかの辺で
結んでできる図形

オイラーの定理

平面上に描かれたグラフについて、常に以下が成り立つ.

$$v - e + f = 2$$

v : 頂点の個数 e : 辺の本数 f : 領域の個数

$$v = 4$$

$$e = 7$$

$$f = 5$$

$$v - e + f = 4 - 7 + 5 = 2$$

※ 実はトポロジーの定理. 多面体でも成立.

トポロジー的には

と同じ！

$$v - e + f = 2$$

別名：**オイラーの多面体定理**

これを使うと, たとえば下のグラフが平面上に描けないことがわかる.

もし描けたとすると, オイラーの定理より
 $5 - 10 + f = 2$ ゆえ $f = 7$

各領域は3本以上の辺で囲まれ, 各辺は高々2つの領域に隣接するから,
 $7 \times 3 \div 2 = 10.5$ 本以上の辺があるはず.
ところが, 辺は10本しかない. 矛盾.

数学と実社会



Math-for-Industry
Education & Research Hub

数学と社会

直接的な応用 需要の高まり

- ロケット, 生産管理, スケジューリング
← 制御理論, OR理論, 最適化理論
- 意思決定理論 ← 統計学, 学習理論, 最適化理論
- 指紋認識(FBI), 信号理論 ← ウェーブレット
- CT, MRI ← ラドン変換
- 暗号理論 ← 整数論, 楕円曲線
- 数理ファイナンス ← 確率解析
- 航空機 ← 非線型方程式(渦), スプライン
- DNA解析 ← 位相幾何学(結び目)
- CG, 映像 ← 微分幾何学, 偏微分方程式, 数値計算法

例：資源探査、採掘（シェル・リサーチ）

偏微分方程式, 数値解析（従来の手法）

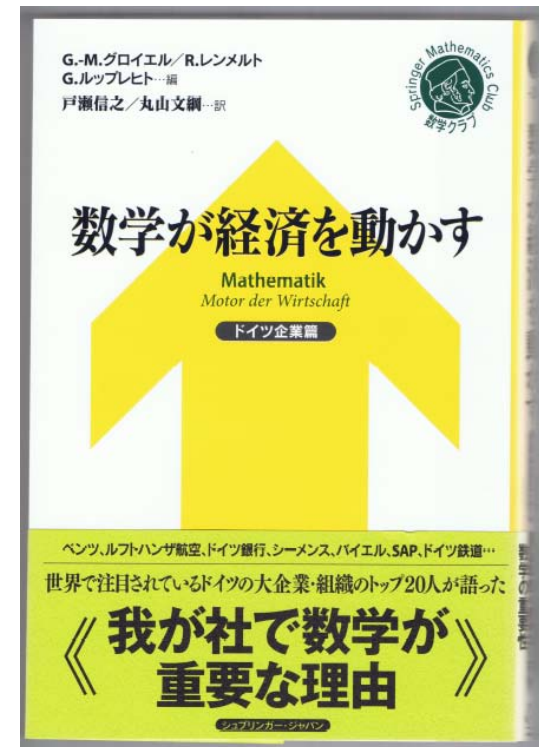
ベクトル空間, 多項式環 ← 代数的オイルプロジェクト

代数的曲面として油層の境界を記述

「近似可換代数」という新しい概念を生み出した

— 数学へのフィードバック

油が存在できない「穴」の数：
代数的トポロジーの手法を
用いて計算



「はい、はい、長田教授は口が
 悪いので、古くから研究費を生か金
 沢全の財源だ。
 通明感がある。ハリのあ肌
 の決まりは、皮膚いじり外
 側で体産産(角質)に
 みる。角質は常に剥がれ
 再生する。
 この再生は仕組み、スキ
 マの専門集団と数学者が手
 差を組んで理論的に解明を
 している。「10ほどは数
 学を学ばせ、産業界と協力
 して産業界で役立つ数学者の育
 成を目指す。」

「九州大学は来年、その名も「マ
 ス・フォア・インダストリ」(産
 業数学)研究所」という新しい
 研究所を設ける。産業界と協力
 して産業界で役立つ数学者の育
 成を目指す。」

「九州大学は来年、その名も「マ
 ス・フォア・インダストリ」(産
 業数学)研究所」という新しい
 研究所を設ける。産業界と協力
 して産業界で役立つ数学者の育
 成を目指す。」

「九州大学は来年、その名も「マ
 ス・フォア・インダストリ」(産
 業数学)研究所」という新しい
 研究所を設ける。産業界と協力
 して産業界で役立つ数学者の育
 成を目指す。」

「九州大学は来年、その名も「マ
 ス・フォア・インダストリ」(産
 業数学)研究所」という新しい
 研究所を設ける。産業界と協力
 して産業界で役立つ数学者の育
 成を目指す。」

「九州大学は来年、その名も「マ
 ス・フォア・インダストリ」(産
 業数学)研究所」という新しい
 研究所を設ける。産業界と協力
 して産業界で役立つ数学者の育
 成を目指す。」

「九州大学は来年、その名も「マ
 ス・フォア・インダストリ」(産
 業数学)研究所」という新しい
 研究所を設ける。産業界と協力
 して産業界で役立つ数学者の育
 成を目指す。」

九州大学は来年、その名も「マ
 ス・フォア・インダストリ」(産
 業数学)研究所」という新しい
 研究所を設ける。産業界と協力
 して産業界で役立つ数学者の育
 成を目指す。

日経
 (2010.6.27)

企業は数式を愛せるか

もっと「産業数学」の研究を

中外時評

企業は数式を愛せるか もっと「産業数学」の研究を

論説委員
 滝 順一

「九州大学は来年、その名も「マ
 ス・フォア・インダストリ」(産
 業数学)研究所」という新しい
 研究所を設ける。産業界と協力
 して産業界で役立つ数学者の育
 成を目指す。」



数学は社会で求められている

文科省科学技術政策研究所

レポート2006

数学 新領域への展開が必要 中核的組織の不足
研究開発チーム内の**数学的基礎を持つ人**の存在

必要度 65%(欧米では実現)

現状 26%

40%の格差を埋める人材育成が急務

ご清聴，ありがとうございました。