

数学の汎用性

～トポロジーの話題から～

九州大学大学院数理学研究院
佐伯 修

目次

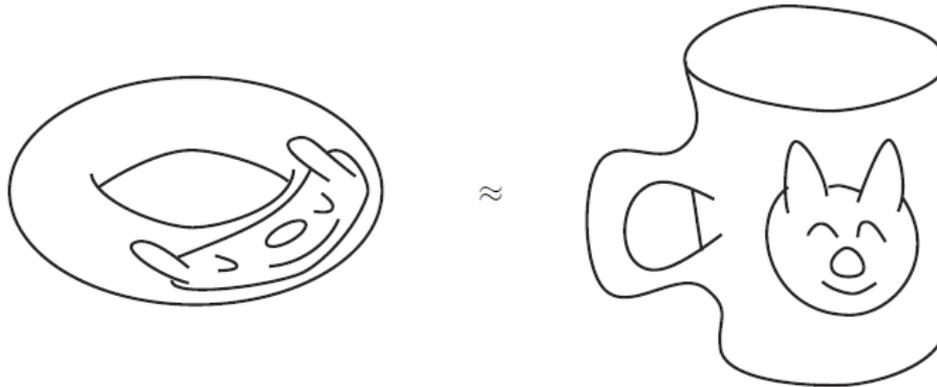
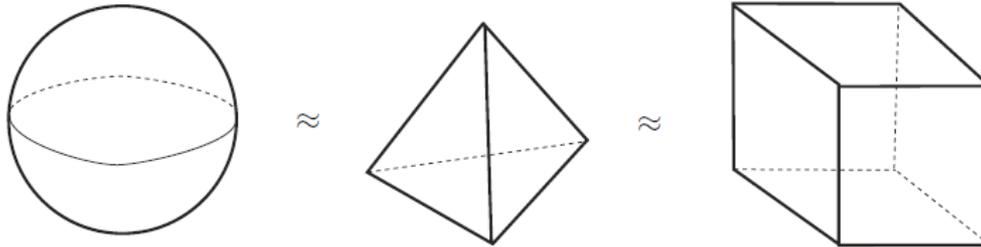
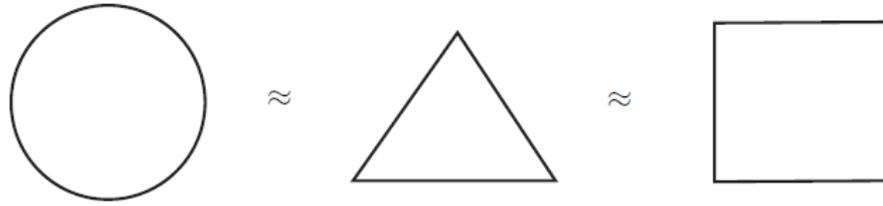
- トポロジーとは
- 実数の連続性
- 結び目理論とDNA
- ポアンカレ予想と宇宙の形
- グラフ理論の話題から
- 数学と社会

トポロジー = 位相幾何学

図形などの幾何学的対象



連続的に変形しても変わらない性質を研究

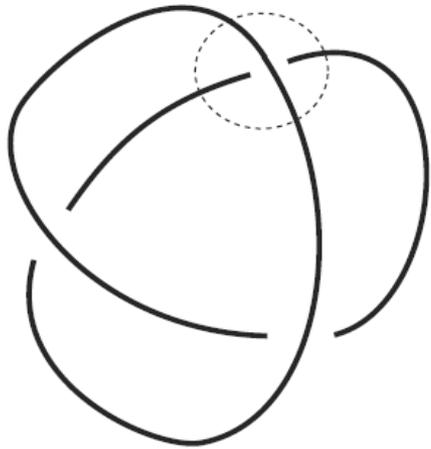


トポロジーで同じとなる図形の例

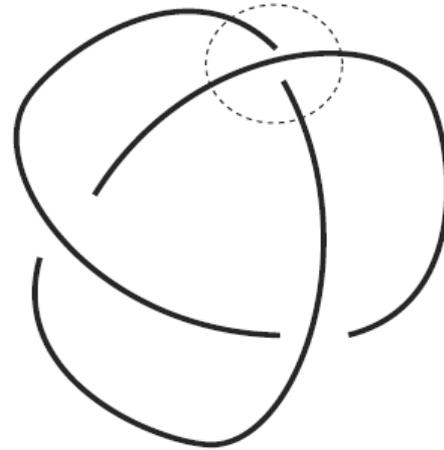
キーワード = 連続

図形は、好きなように曲げたり、
延ばしたりして良いが、
切り離したり、くっつけたりしては
いけない。

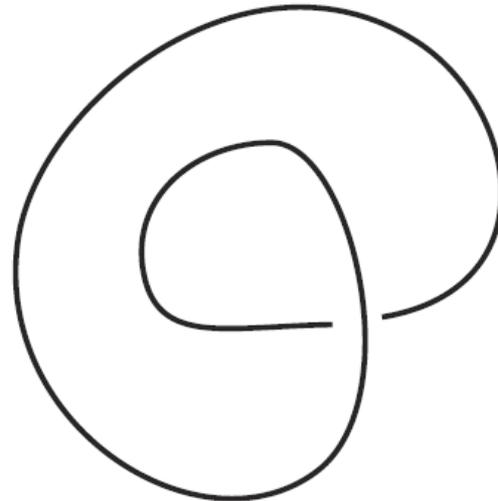
例



ダメ!



OK



$$\frac{1}{3} = 0.333\dots$$

$$\frac{1}{3} \times 3 = 0.333\dots \times 3$$

∴

$$1 = 0.999\dots$$



$$S = 0.999\dots$$

とおく.



あやしい!

両辺を10倍して

$$10S = 9.999\dots$$

第二式から第一式を引いて

$$10S - S = 9$$

$$\therefore S = 1$$

しかし, $S = 0.999\cdots$ を

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} 9 \times \left(\frac{1}{10}\right)^n$$

なる**無限級数**, より正確には, 数列

$$S_n = \sum_{k=1}^n 9 \times \left(\frac{1}{10}\right)^k$$

の**極限**と考えれば, 正しい議論になる!

大事なこと:

数列 $0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, \dots$ の
極限が**存在すること**



実数の連続性



しかし、 $0.999\cdots$ と 1 は、
表し方が異なるのだから、
異なる数ではないのか？

実は、無限小数も許すと、実数の小数による「表示」は、一意的ではない！

$$2 = 1.999\cdots$$

$$1.5 = 1.4999\cdots$$

$$10.13 = 10.12999\cdots$$

$$2 = 2.000\cdots$$

$$1.5 = 1.5000\cdots$$

$$10.13 = 10.13000\cdots$$

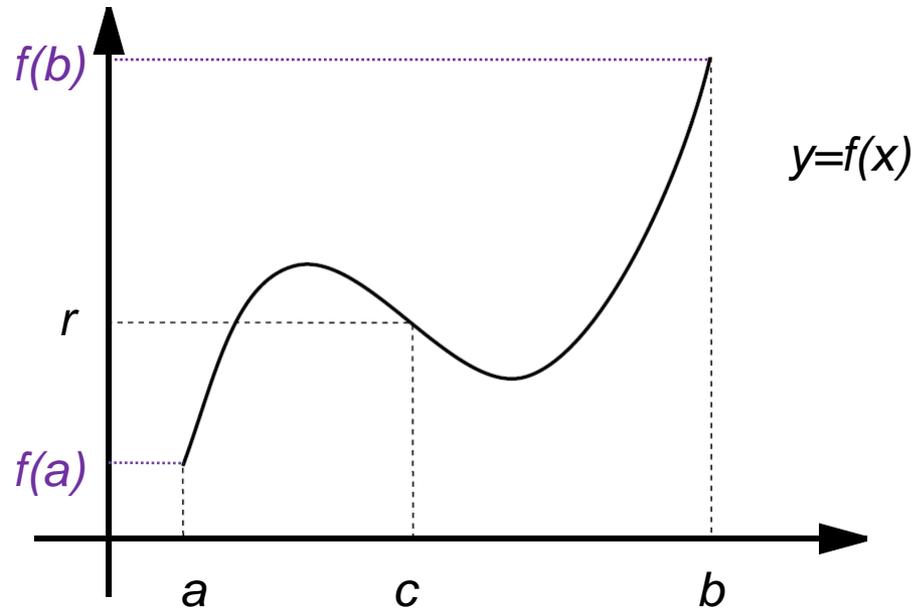
※ 有限小数のみ一意性が成り立たない

※ 記数法にもよる. たとえば2進法, 3進法等でも似た現象が起こるが、一意性が成り立たない数は変わってくる.

有理数(分数)にはなぜ連続性がないのか？

実数の連続性を如実に表す定理 (中間値の定理)

区間 $[a, b]$ 上の実数値連続関数 f と、実数 r について、もし $f(a) < r < f(b)$ が成り立てば、 $f(c) = r$ となる c で、 $a < c < b$ なるものが存在する。



$f(x) = x^2$ は区間 $[0, 2]$ 上で連続.

$$f(0) < 2 < f(2)$$

$f(c) = c^2 = 2$ となる c はあるか？

実数の範囲では 存在する:

$$c = \sqrt{2}$$

しかし, これは有理数ではない! つまり,
中間値の定理は, 有理数に対して成立しない.
⇒ 「有理数の不連続性」

※ 不連続な有理数を「完備化」して実数が構成されている.

実数は有難い！

キーワード : 連続性

実数直線はつながっている

結び目理論とその応用

左は結ばれていない, 右は結ばれている

DNA結び目

結び目の表(ごく一部)

結び目の科学的研究：**ガウス**(18世紀末)が始めた
と言われる。

1860年代半ば：**ケルヴィン**卿による**渦原子仮説**
異なる結び目に異なる原子が対応すると主張

➡ 間違いが指摘され、物理学者・化学者か
ら忘れ去られる。

1980年代：**ジョーンズ**が、フォン・ノイマン環や
統計力学との関係を指摘 → **フィールズ賞受賞**

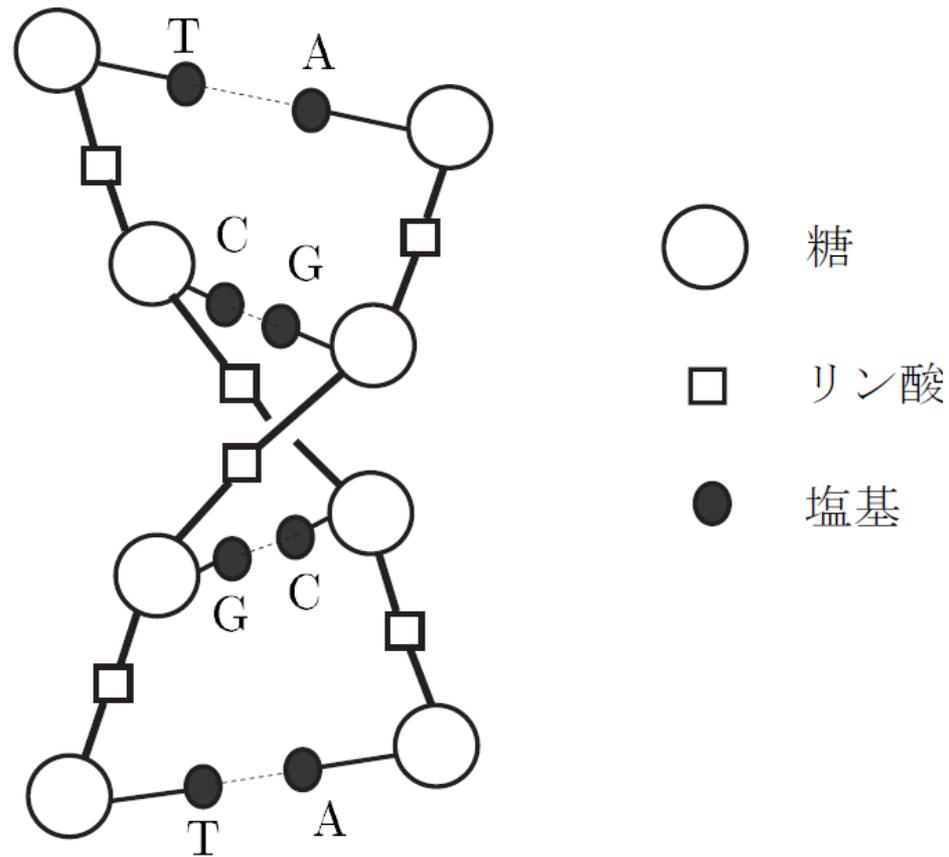
➡ 現在も盛んに研究が続けられている
(数学の花形分野の一つ)

結び目理論は諸科学のかけ橋である
と言っても過言ではない。

例：

DNA組み換えの解析への応用

DNAの2重らせん構造



DNAはとにかく長い

細胞をサッカーボールにたとえると...
細い紐が200kmくらいつまっている算段

1963年頃、輪になった**環状DNA**が発見された

その後、多くのDNAが環状をしていることが
わかってきた。

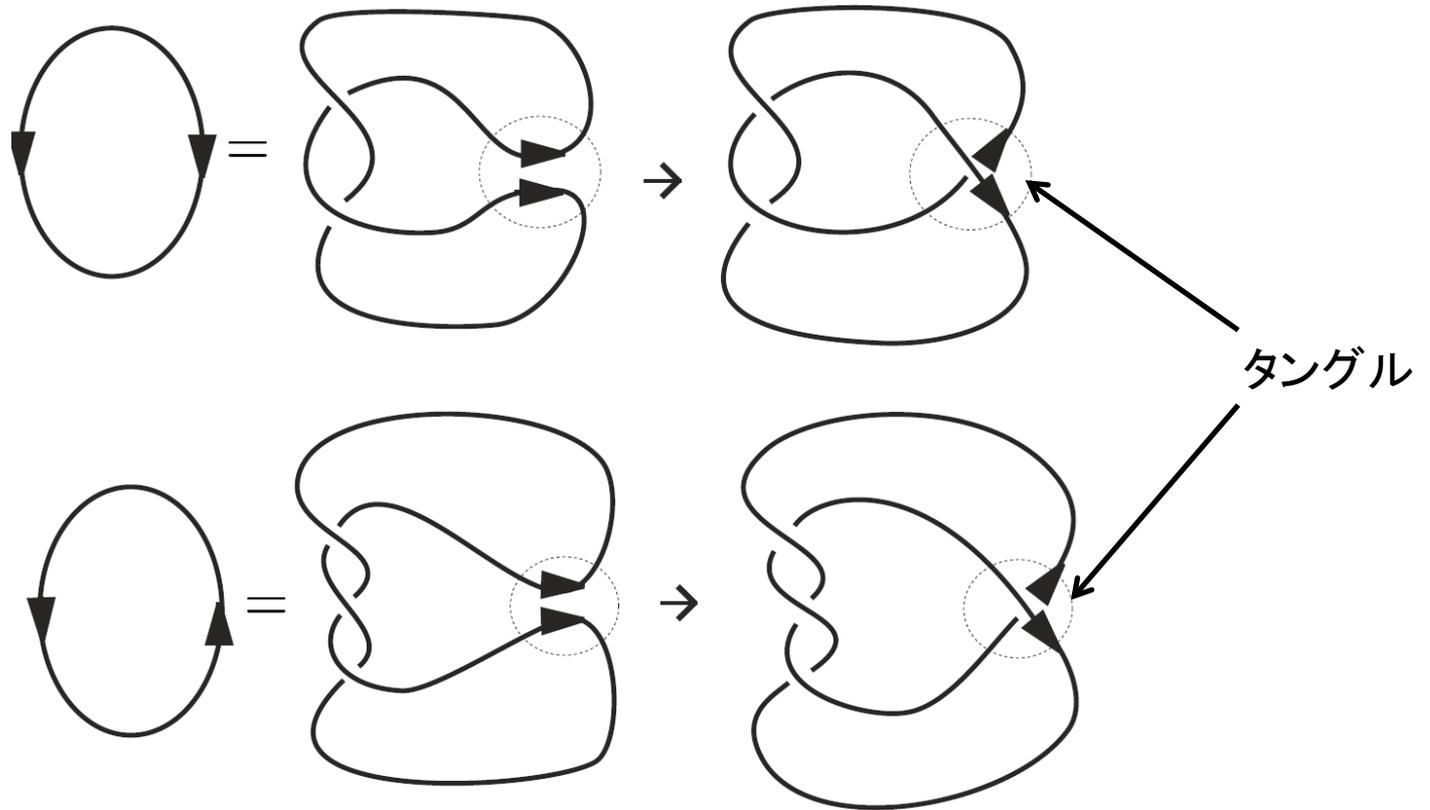
それが結ばれたり、あるいは複数の環状DNAが
絡んだりしているものも発見されてきた。

複製・転写・組み換えを行う際、
絡んでいてはうまくゆかない。
これを解消しているのが、トポイソメラーゼ
といわれる酵素

制限酵素：

DNAの紐の特定の配列をした数箇所のみ
に作用して組み換えを行う。

DNAの部位特異的組み換えと呼ばれる。



制限酵素による部位特異的組み換えの例

しかし、実験で観察できるのは、

組み換え前の結び目の形(基質: K_S)と
組み換え後の結び目の形(生成物: K_P)
のみ.

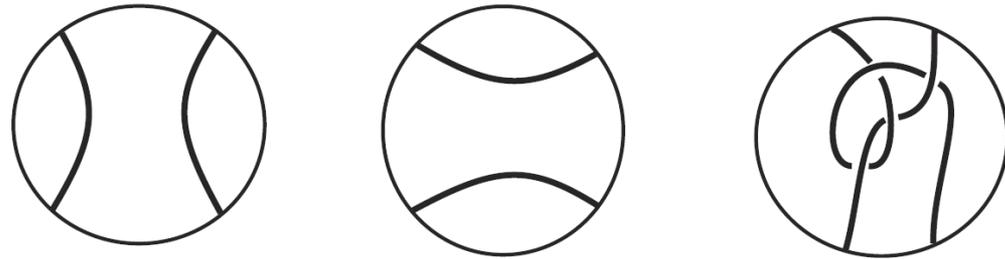
実際に酵素が働いているタングルの中身は

ブラックボックス

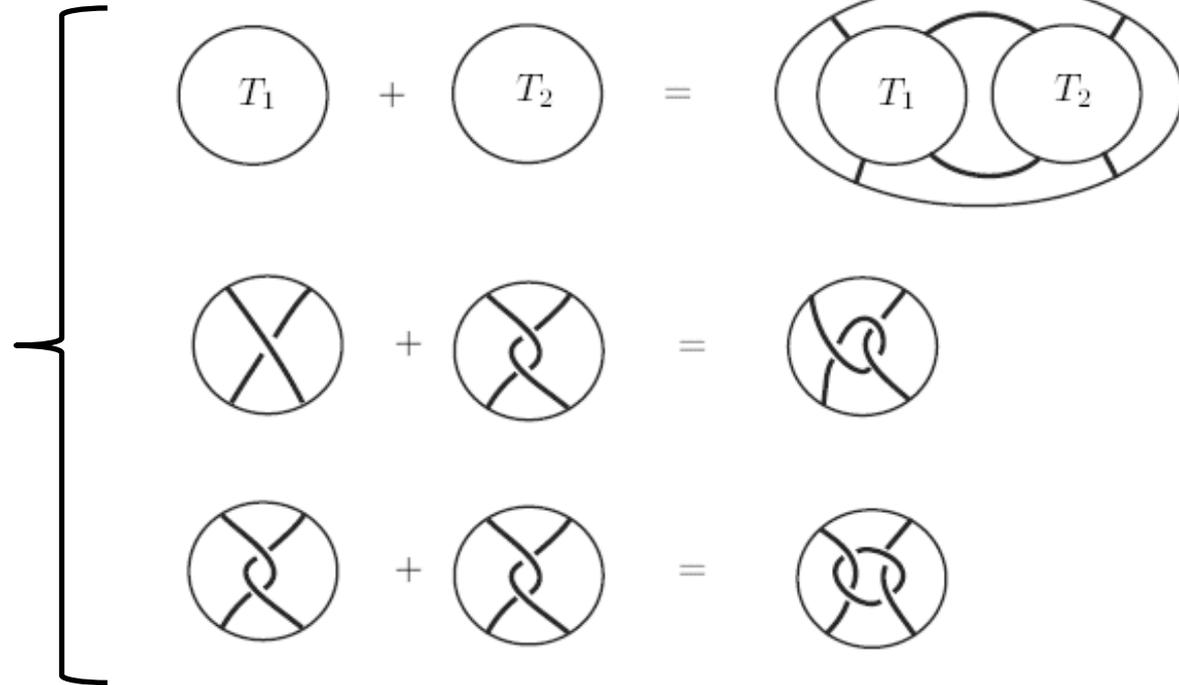
実際の観察で組み換えの様子を特定する
のは不可能！

結び目理論(数学)が大活躍！

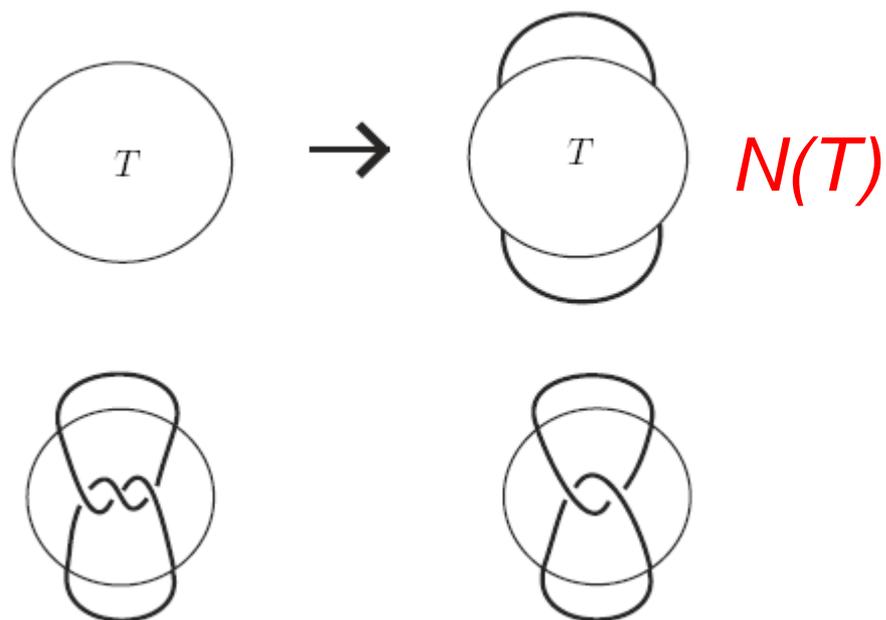
タンゲルの例

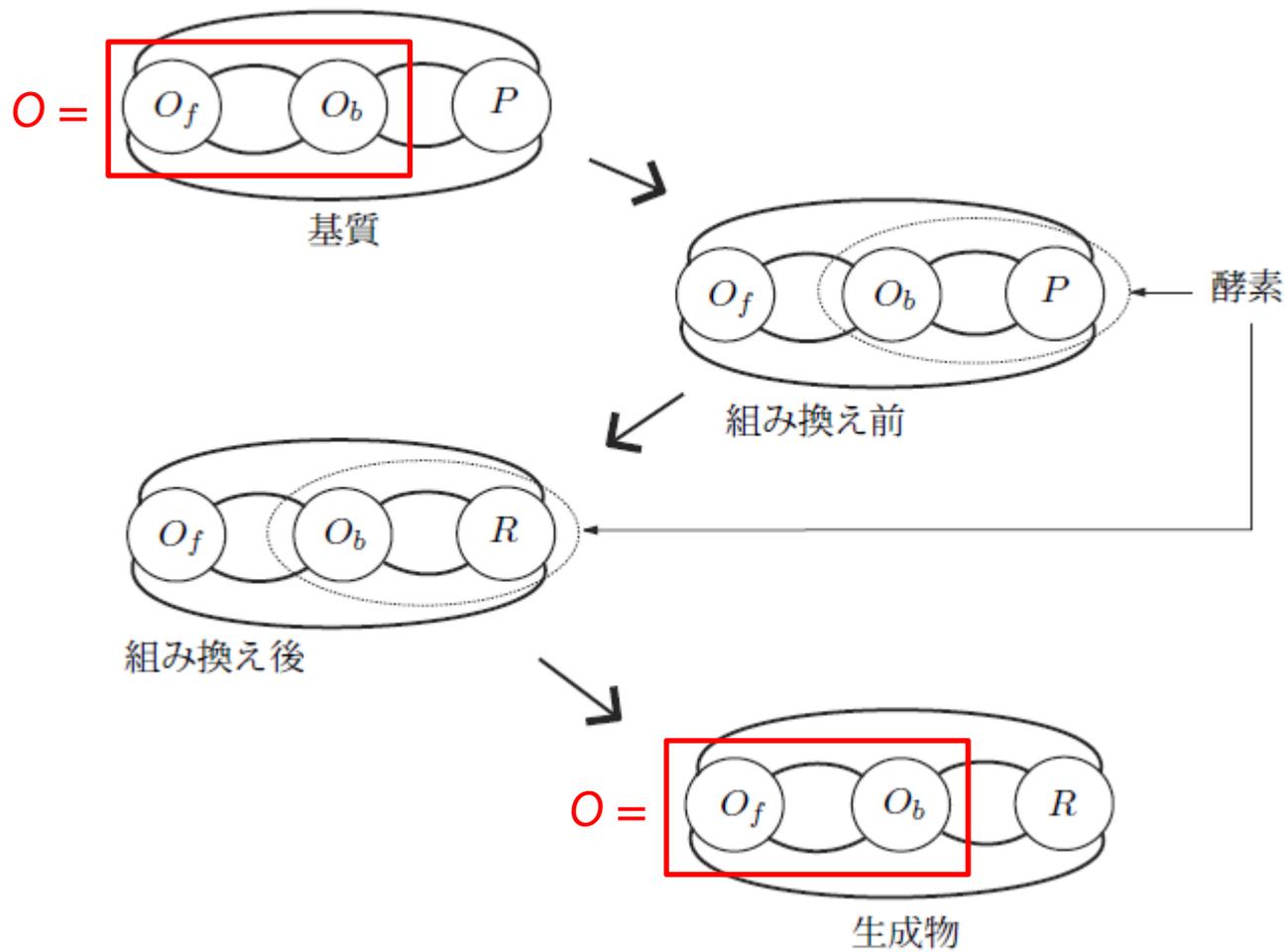


タンゲルの 足し算



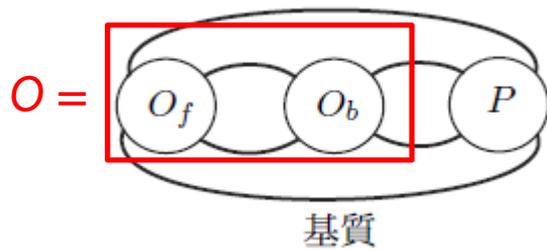
タングルから結び目を作る





DNA組み換えのモデル

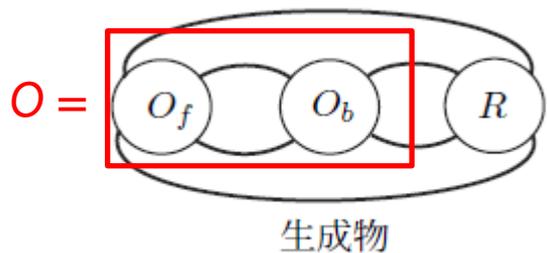
タングル方程式



$$= K_S$$

$$N(O+P) = K_S$$

実験結果として観察可能



$$= K_P$$

$$N(O+R) = K_P$$

$$N(O+P) = \bigcirc$$

$$N(O+R) = \bigcirc \bigcirc$$

$$N(O+2R) = \bigcirc \text{ (with a twist) }$$

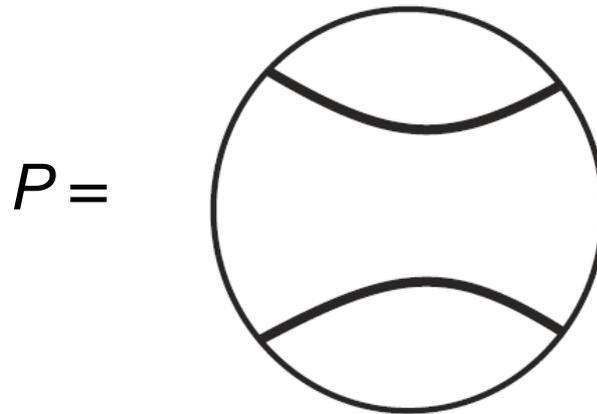
$$N(O+3R) = \bigcirc \text{ (with two crossings) }$$

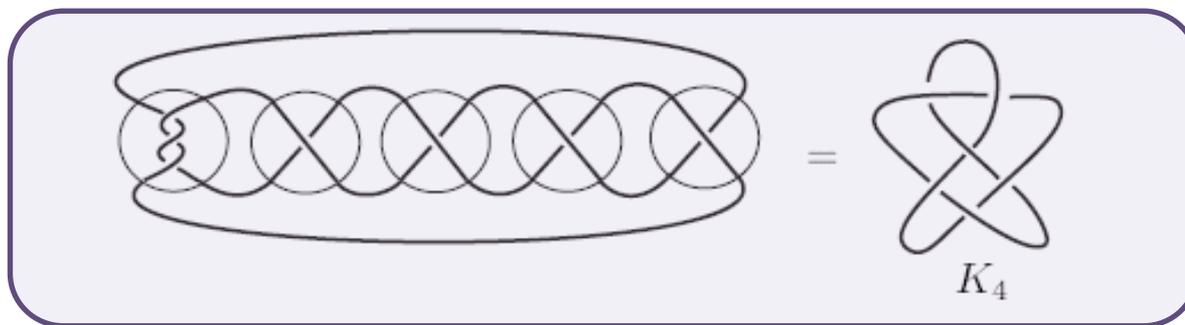
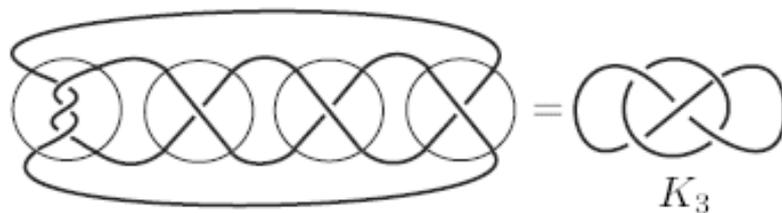
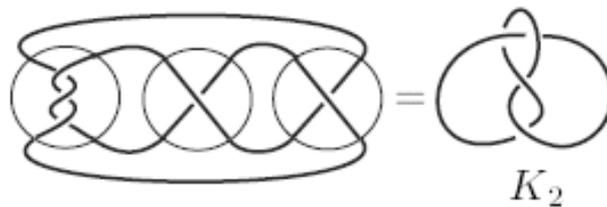
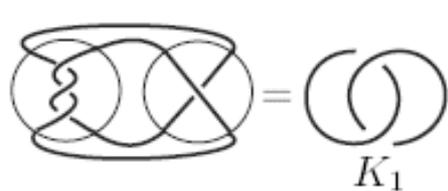
実際に得られた
タングル方程式

Ernst と Sumners (1990)は, 位相幾何学の種々の手法・定理を駆使して, この方程式を解いた!



※ P の数学的解は、実は無限個存在する.
しかし、生物学的理由から、 P は以下となる
ことが推察できる.





予想が的中！

タングル方程式を解くための鍵となる定理：
巡回手術定理

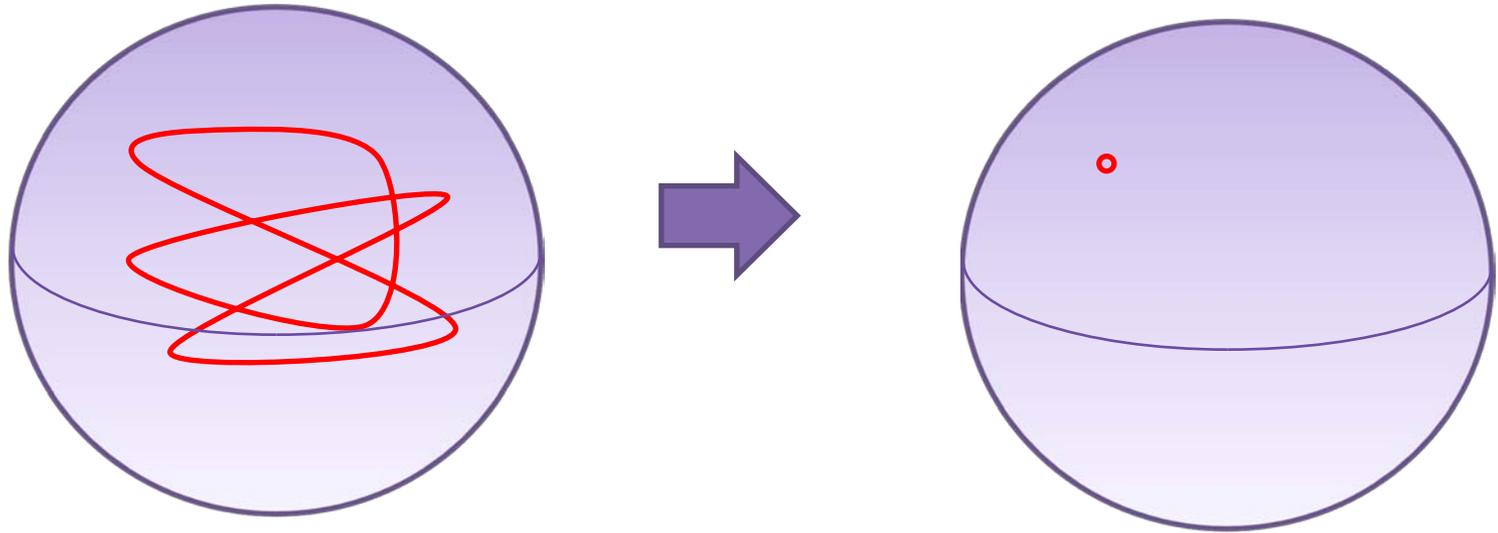
(Culler, Gordon, Luecke, Shalen, 1985)

※ 3次元多様体という「図形」に関する深い定理

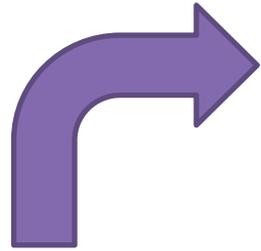


最近解かれた**ポアンカレ予想**とも大きく関連

ポアンカレ予想



空間に果てがなく、どんな輪も連続的に1点に縮められるならば、それは「3次元の球」と言える、というポアンカレ予想(20世紀初頭提出)は、つい最近ペレルマンにより正しいことが証明された。



DNA組み換えの解析

ポアンカレ予想



宇宙の形

数学の普遍性のなせる技！

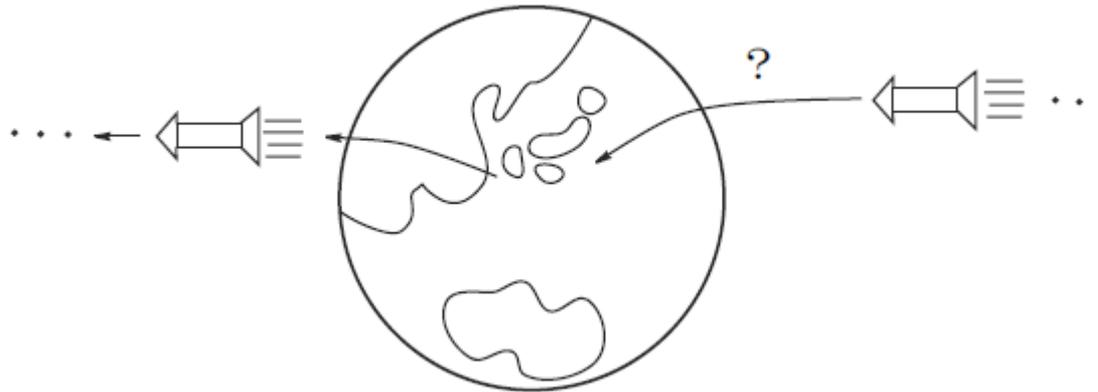
昔の人は...
地球は平らで、果てがある
とっていた(らしい)

しかし実際には...

でも、昔の人を馬鹿にはできません...

宇宙の形，分かりますか？
どこまでもまっすぐに延びていて，
果てがあると，漠然と思っていないですか？

宇宙が丸かったら...



宇宙一周旅行？

宇宙の本当の形はまだ分かっていません.

しかし, 多くの数学者がその形を特定しようと努力しています.

近い将来, 特定される日が来るでしょう.

※ ビッグバン時代に放射された宇宙マイクロ波が手掛かり

グラフ理論の話題から

「数学活用」の例

グラフ

いくつかの頂点を
いくつかの辺で
結んでできる図形

オイラーの定理

平面上に描かれたグラフについて、常に以下が成り立つ.

$$v - e + f = 2$$

v : 頂点の個数 e : 辺の本数 f : 領域の個数

$$v = 4$$

$$e = 7$$

$$f = 5$$

$$v - e + f = 4 - 7 + 5 = 2$$

※ 実はトポロジーの定理. 多面体でも成立.

トポロジー的には

と同じ！

$$v - e + f = 2$$

別名：**オイラーの多面体定理**

これを使うと, たとえば下のグラフが平面上に描けないことがわかる.

もし描けたとすると, オイラーの定理より
 $5 - 10 + f = 2$ ゆえ $f = 7$

各領域は3本以上の辺で囲まれ, 各辺は高々2つの領域に隣接するから,
 $7 \times 3 \div 2 = 10.5$ 本以上の辺があるはず.
ところが, 辺は10本しかない. 矛盾.

数学と実社会

数学と社会

直接的な応用 需要の高まり

- ロケット, 生産管理, スケジューリング
← 制御理論, OR理論, 最適化理論
- 意思決定理論 ← 統計学, 学習理論, 最適化理論
- 指紋認識(FBI), 信号理論 ← ウェーブレット
- CT, MRI ← ラドン変換
- 暗号理論 ← 整数論, 楕円曲線
- 数理ファイナンス ← 確率解析
- 航空機 ← 非線型方程式(渦), スプライン
- DNA解析 ← 位相幾何学(結び目)
- CG, 映像 ← 微分幾何学, 偏微分方程式, 数値計算法

例：資源探査、採掘（シェル・リサーチ）

偏微分方程式, 数値解析（従来の手法）

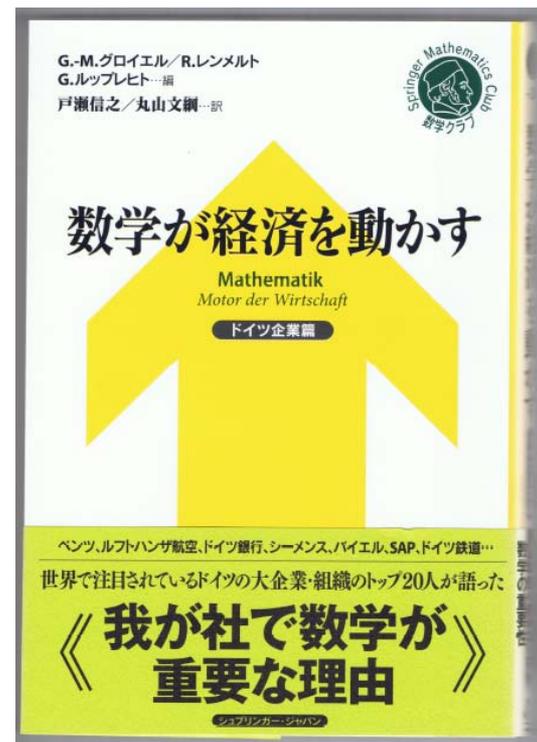
ベクトル空間, 多項式環 ← 代数的オイルプロジェクト

代数的曲面として油層の境界を記述

「近似可換代数」という新しい概念を生み出した

— 数学へのフィードバック

油が存在できない「穴」の数：
代数的トポロジーの手法を
用いて計算



数学は社会で求められている

文科省科学技術政策研究所
レポート2006

数学 新領域への展開が必要 中核的組織の不足
研究開発チーム内の**数学的基礎を持つ人**の存在

必要度 65%(欧米では実現)

現状 26%

40%の格差を埋める人材育成が急務

ご清聴，ありがとうございました。