定値折り目特異点の消去と特異レフシェッツ束

佐伯　修
（九州大学，マス・フォア・インダストリ研究所）
(Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University)

July 8, 2011

§1. Broken Lefschetz Fibrations

Singularities

以下，C^∞ **カテゴリー**で考える（多様体や写像は C^∞ 級）.

以下，C^∞ **カテゴリー**で考える（多様体や写像は C^∞ 級）.

Definition 1.1
M, Σ: 連結，向き付けられた閉多様体，$\dim_{\mathbf{R}} M = 4$, $\dim_{\mathbf{R}} \Sigma = 2$

Singularities

以下，C^∞ **カテゴリー**で考える（多様体や写像は C^∞ 級）.

Definition 1.1
M, Σ: 連結，向き付けられた閉多様体，$\dim_{\mathbf{R}} M = 4$, $\dim_{\mathbf{R}} \Sigma = 2$
(1) C^∞ 級写像 $M \to \Sigma$ の特異点が，標準形

$$\boxed{(z, w) \mapsto Z = zw}$$

を持つとき，**Lefschetz singularity** という.
（(z, w) や Z は，M^4, Σ^2 の向きに合致した複素局所座標系.）

Singularities

以下，C^∞ **カテゴリー**で考える（多様体や写像は C^∞ 級）.

Definition 1.1
M, Σ: 連結，向き付けられた閉多様体，$\dim_{\mathbf{R}} M = 4$, $\dim_{\mathbf{R}} \Sigma = 2$
(1) C^∞ 級写像 $M \to \Sigma$ の特異点が，標準形

$$\boxed{(z, w) \mapsto Z = zw}$$

を持つとき，**Lefschetz singularity** という.
（(z, w) や Z は，M^4, Σ^2 の向きに合致した複素局所座標系.）
(2) 特異点が，標準形

$$\boxed{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1, x_2^2 + x_3^2 - x_4^2)}$$

を持つとき，**indefinite fold singularity** という.

Definition 1.2 (Auroux–Donaldson–Katzarkov, 2005, etc.)
C^∞ 級写像 $f : M^4 \to \Sigma^2$ が **broken Lefschetz fibration**（略して **BLF**）とは，f が特異点として Lefschetz singularities と indefinite fold singularities しか持たないときをいう．

Definition 1.2 (Auroux–Donaldson–Katzarkov, 2005, etc.)
C^∞ 級写像 $f : M^4 \to \Sigma^2$ が **broken Lefschetz fibration**（略して **BLF**）とは，f が特異点として Lefschetz singularities と indefinite fold singularities しか持たないときをいう．

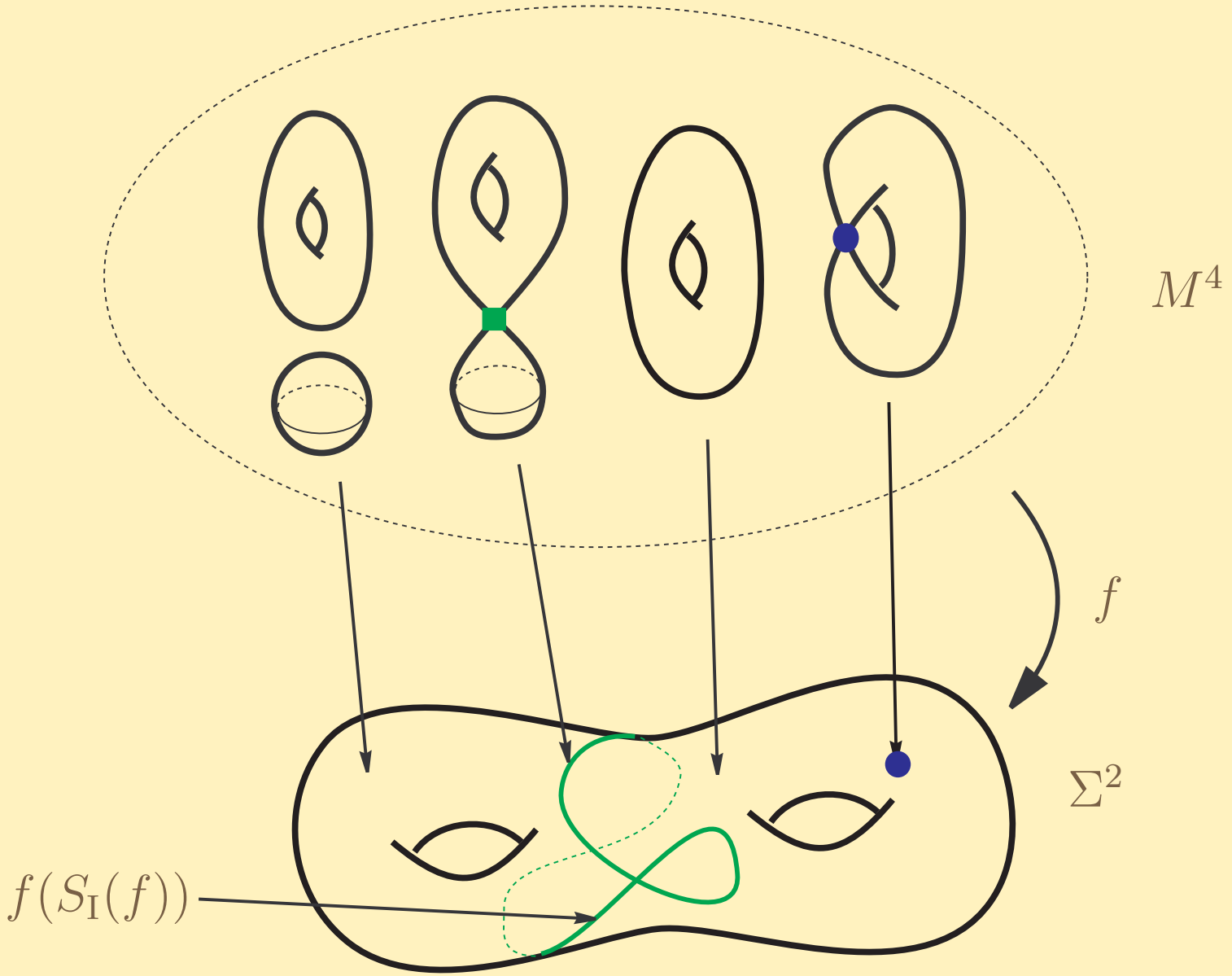
このとき，f の indefinite fold singularities 全体 $S_{\mathrm{I}}(f)$ は，M^4 の 1 次元部分多様体となる（$S_{\mathrm{I}}(f) \cong S^1 \cup \cdots \cup S^1$）．

Definition 1.2 (Auroux–Donaldson–Katzarkov, 2005, etc.)
C^∞ 級写像 $f : M^4 \to \Sigma^2$ が **broken Lefschetz fibration**（略して **BLF**）とは，f が特異点として Lefschetz singularities と indefinite fold singularities しか持たないときをいう．

このとき，f の indefinite fold singularities 全体 $S_{\mathrm{I}}(f)$ は，M^4 の 1 次元部分多様体となる（$S_{\mathrm{I}}(f) \cong S^1 \cup \cdots \cup S^1$）．

通常の **Lefschetz fibration**（略して **LF**）は BLF の特別な場合．
(LF $\Longleftrightarrow$ BLF with $S_{\mathrm{I}}(f) = \emptyset$)

Fibers of a BLF



Near-Symplectic Structures

Donaldson, Gompf, ∼2000

Lefschetz fibrations $\Longleftrightarrow$ **symplectic 構造** (up to blow-up)

Near-Symplectic Structures

Donaldson, Gompf, ∼2000

Lefschetz fibrations $\Longleftrightarrow$ **symplectic 構造** (up to blow-up)

Symplectic 構造: $\omega \in \Omega^2(M^4)$, $d\omega = 0$, 非退化 $(\omega^2 > 0)$

Near-Symplectic Structures

Donaldson, Gompf, ∼2000

Lefschetz fibrations $\Longleftrightarrow$ **symplectic 構造** (up to blow-up)

Symplectic 構造: $\omega \in \Omega^2(M^4)$, $d\omega = 0$, 非退化 $(\omega^2 > 0)$

Kähler $\Longrightarrow$ **symplectic** $\Longrightarrow$ almost complex

Near-Symplectic Structures

Donaldson, Gompf, ∼2000

Lefschetz fibrations $\Longleftrightarrow$ **symplectic 構造** (up to blow-up)

Symplectic 構造: $\omega \in \Omega^2(M^4)$, $d\omega = 0$, 非退化 $(\omega^2 > 0)$

Kähler $\Longrightarrow$ **symplectic** $\Longrightarrow$ almost complex

$\rightsquigarrow$ ゲージ理論的不変量が定義できる.

Near-Symplectic Structures

Donaldson, Gompf, ∼2000

Lefschetz fibrations $\Longleftrightarrow$ **symplectic 構造** (up to blow-up)

Symplectic 構造: $\omega \in \Omega^2(M^4)$, $d\omega = 0$, 非退化 $(\omega^2 > 0)$

Kähler $\Longrightarrow$ **symplectic** $\Longrightarrow$ almost complex

$\rightsquigarrow$ ゲージ理論的不変量が定義できる.

Auroux–Donaldson–Katzarkov, 2005

broken Lefschetz fibrations $\Longleftrightarrow$ **near-symplectic 構造**

(↑ 1 次元の zero locus を持つ)

(up to blow up)

Near-Symplectic Structures

Donaldson, Gompf, ∼2000

Lefschetz fibrations $\Longleftrightarrow$ **symplectic 構造** (up to blow-up)

Symplectic 構造: $\omega \in \Omega^2(M^4)$, $d\omega = 0$, 非退化 $(\omega^2 > 0)$

Kähler $\Longrightarrow$ **symplectic** $\Longrightarrow$ almost complex

$\rightsquigarrow$ ゲージ理論的不変量が定義できる.

Auroux–Donaldson–Katzarkov, 2005

broken Lefschetz fibrations $\Longleftrightarrow$ **near-symplectic 構造**

(↑ 1 次元の zero locus を持つ)

(up to blow up)

Near-symplectic 構造: $\omega \in \Omega^2(M^4)$, $d\omega = 0$, $\omega^2 \geq 0$,

ω は 1 次元部分多様体に沿って（横断的に）ゼロとなる.

Near-Symplectic vs BLF

Theorem 1.3 (ADK, 2005)
M^4：向き付けられた 4 次元閉多様体
$Z \subset M^4$：1 次元閉部分多様体
以下は同値.

(1) $\exists$**near-symplectic form** ω *on* M^4 *with zero locus* Z.

(2) $\exists$**broken Lefschetz pencil (BLP)** f *over* S^2 *with* $S_{\mathrm{I}}(f) = Z$ *s.t. there is an* $h \in H^2(M^4; \mathbf{R})$ *satisfying* $h(C) > 0$ *for every component* C *of every fiber of* f.

さらに，(2) が成り立てば，Z の外で各ファイバー上 *volume form* を与える **near-symplectic 構造の変形類**が一意に決まる.

Near-Symplectic vs BLF

Theorem 1.3 (ADK, 2005)
M^4：向き付けられた 4 次元閉多様体
$Z \subset M^4$：1 次元閉部分多様体
以下は同値.

(1) $\exists$**near-symplectic form** ω *on* M^4 *with zero locus* Z.

(2) $\exists$**broken Lefschetz pencil (BLP)** f *over* S^2 *with* $S_{\mathrm{I}}(f) = Z$ *s.t. there is an* $h \in H^2(M^4; \mathbf{R})$ *satisfying* $h(C) > 0$ *for every component* C *of every fiber of* f.

さらに，(2) が成り立てば，Z の外で各ファイバー上 *volume form* を与える **near-symplectic 構造の変形類**が一意に決まる.

$\exists$BLP $\implies$ $\exists$BLF on a blown up 4-manifold

Near-Symplectic vs BLF

Theorem 1.3 (ADK, 2005)
M^4：向き付けられた 4 次元閉多様体
$Z \subset M^4$：1 次元閉部分多様体
以下は同値.

(1) $\exists$**near-symplectic form** ω *on* M^4 *with zero locus* Z.

(2) $\exists$**broken Lefschetz pencil (BLP)** f *over* S^2 *with* $S_{\mathrm{I}}(f) = Z$ *s.t. there is an* $h \in H^2(M^4; \mathbf{R})$ *satisfying* $h(C) > 0$ *for every component* C *of every fiber of* f.

さらに，(2) が成り立てば，Z の外で各ファイバー上 *volume form* を与える **near-symplectic 構造の変形類**が一意に決まる.

$\exists$BLP $\implies$ $\exists$BLF on a blown up 4-manifold

BLF は BLP の特別な場合 (BLF = BLP without base points).

A Remark

Remark 1.4
すべての 4 次元多様体が symplectic 構造 を許容するわけではない.
(e.g. $\sharp^n \mathbf{C}P^2$, $n \geq 2$, etc.)

A Remark

Remark 1.4
すべての 4 次元多様体が symplectic 構造 を許容するわけではない.
(e.g. $\sharp^n \mathbf{C}P^2$, $n \geq 2$, etc.)

しかし，$b_2^+(M^4) > 0$ **を満たす，すべての向き付けられた 4 次元閉多様体** M^4 は near-symplectic 構造 を許容することが知られている.

A Remark

Remark 1.4
すべての 4 次元多様体が symplectic 構造 を許容するわけではない.
(e.g. $\sharp^n \mathbf{C}P^2$, $n \geq 2$, etc.)

しかし，$b_2^+(M^4) > 0$ **を満たす，すべての向き付けられた 4 次元閉多様体** M^4 は near-symplectic 構造 を許容することが知られている.

実際，与えられた 4 次元多様体 M^4 上にはそうした構造が豊富に存在する.

§2. Singularities of Generic Maps

Definite Fold and Cusp

C^∞ 級写像の特異点理論との関係について述べよう.

Definite Fold and Cusp

C^∞ 級写像の特異点理論との関係について述べよう.

Definition 2.5 (1) 特異点が，標準形

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1, x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)$$

を持つとき，**definite fold singularity** と呼ぶ.

Definite Fold and Cusp

C^∞ 級写像の特異点理論との関係について述べよう.

Definition 2.5 (1) 特異点が，標準形

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1, x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)$$

を持つとき，**definite fold singularity** と呼ぶ.
(2) 特異点が，標準形

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1, x_2^3 - 3x_1x_2 + x_3^2 \pm x_4^2)$$

を持つとき，**cusp** と呼ぶ.

Base Diagrams for Folds

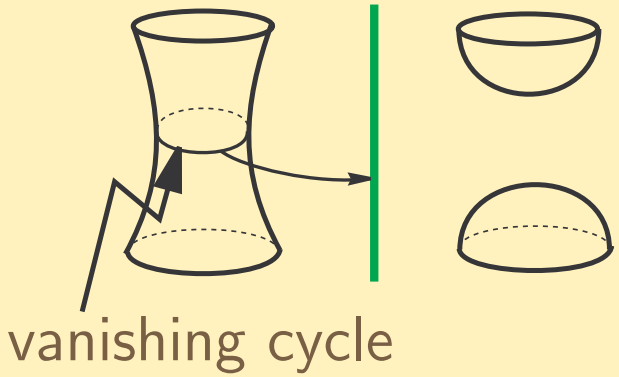


Figure 1: **Indefinite fold**

Base Diagrams for Folds

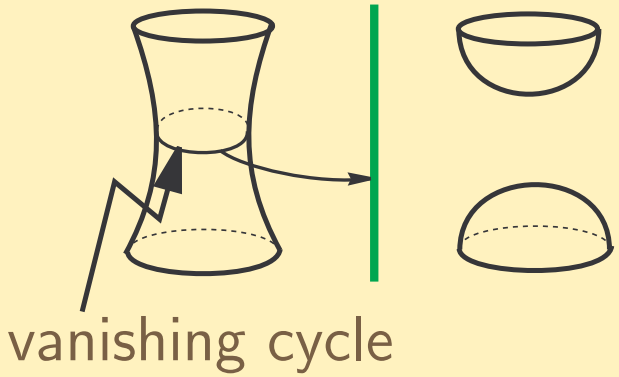


Figure 1: **Indefinite fold**

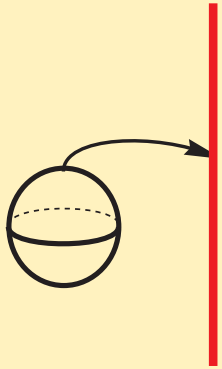


Figure 2: **Definite fold**

Base Diagrams for Cusps

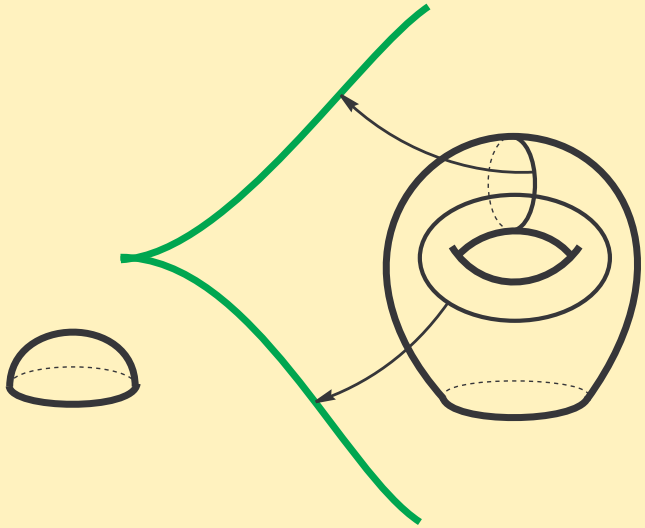


Figure 3: Indefinite cusp

Base Diagrams for Cusps

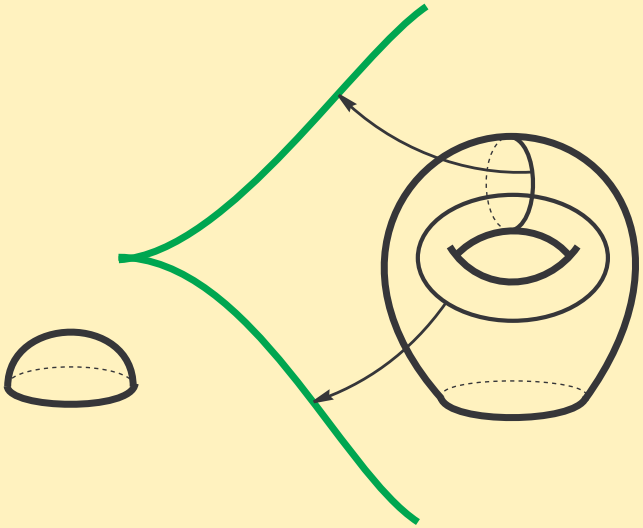


Figure 3: Indefinite cusp

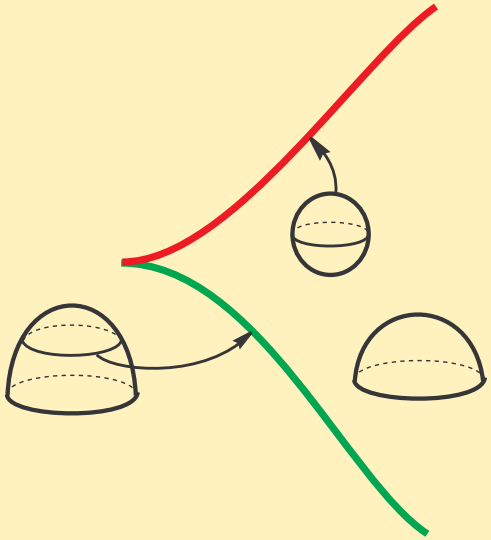


Figure 4: Definite cusp

Excellent Map

Facts.

$\boxed{\text{Whitney (1955)}}$ 任意の C^∞ 級写像 $M^4 \to \Sigma^2$ は，definite fold, indefinite fold, definite cusp, indefinite cusp しか特異点に持たない写像にホモトピックである（実はそうした写像で近似できる）.

Excellent Map

Facts.

Whitney (1955) 任意の C^∞ 級写像 $M^4 \to \Sigma^2$ は，definite fold, indefinite fold, definite cusp, indefinite cusp しか特異点に持たない写像にホモトピックである（実はそうした写像で近似できる）.
このような写像は **excellent map** と呼ばれる.

Excellent Map

Facts.

Whitney (1955) 任意の C^∞ 級写像 $M^4 \to \Sigma^2$ は，definite fold, indefinite fold, definite cusp, indefinite cusp しか特異点に持たない写像にホモトピックである（実はそうした写像で近似できる）.
このような写像は **excellent map** と呼ばれる.

Levine (1965) [Cusp はペアで消去可能]
任意の C^∞ 級写像 $M^4 \to \Sigma^2$ は，$\chi(M^4)$ が偶数であれば cusp なしの，$\chi(M^4)$ が奇数であれば cusp がちょうど 1 つの，excellent map にホモトピックである.

Excellent Map

Facts.

Whitney (1955) 任意の C^∞ 級写像 $M^4 \to \Sigma^2$ は，definite fold, indefinite fold, definite cusp, indefinite cusp しか特異点に持たない写像にホモトピックである（実はそうした写像で近似できる）．
このような写像は **excellent map** と呼ばれる．

Levine (1965) [Cusp はペアで消去可能]
任意の C^∞ 級写像 $M^4 \to \Sigma^2$ は，$\chi(M^4)$ が偶数であれば cusp なしの，$\chi(M^4)$ が奇数であれば cusp がちょうど 1 つの，excellent map にホモトピックである．

- **Excellent map** は definite fold や cusp を持つかも知れないが，Lefschetz singularity は持たない．

Excellent Map

Facts.

Whitney (1955) 任意の C^∞ 級写像 $M^4 \to \Sigma^2$ は，definite fold, indefinite fold, definite cusp, indefinite cusp しか特異点に持たない写像にホモトピックである（実はそうした写像で近似できる）．
このような写像は **excellent map** と呼ばれる．

Levine (1965) [Cusp はペアで消去可能]
任意の C^∞ 級写像 $M^4 \to \Sigma^2$ は，$\chi(M^4)$ が偶数であれば cusp なしの，$\chi(M^4)$ が奇数であれば cusp がちょうど 1 つの，excellent map にホモトピックである．

- **Excellent map** は definite fold や cusp を持つかも知れないが，Lefschetz singularity は持たない．
- **BLF** は Lefschetz singularity を持つが，definite fold や cusp は持たない．

§3. Elimination of Definite Fold

Elimination of Definite Fold

Theorem 3.1 (S., 2006)
任意の C^∞ 級写像 $g : M^4 \to S^2$ は，*definite fold* を持たず，*cusp* を高々 1 つしか持たない *excellent map* にホモトピックである．

Elimination of Definite Fold

Theorem 3.1 (S., 2006)
任意の C^∞ 級写像 $g : M^4 \to S^2$ は，*definite fold* を持たず，*cusp* を高々 1 つしか持たない *excellent map* にホモトピックである．

言いかえると，**definite fold singularities** はホモトピーで消去可能！

Sketch of Proof

Sketch of Proof

Sketch of Proof

g は excellent map として良い.

Sketch of Proof

Sketch of Proof

g は excellent map として良い.

$S(g)$ $(\subset M^4)$: g の特異点全体

$S_{\mathrm{D}}(g)$ $(\subset S(g))$: **definite fold** 全体

Sketch of Proof

Sketch of Proof

g は excellent map として良い.

$S(g)$ $(\subset M^4)$: g の特異点全体

$S_{\mathrm{D}}(g)$ $(\subset S(g))$: **definite fold** 全体

注意. $S(g)$ には向きが付く.

Sketch of Proof

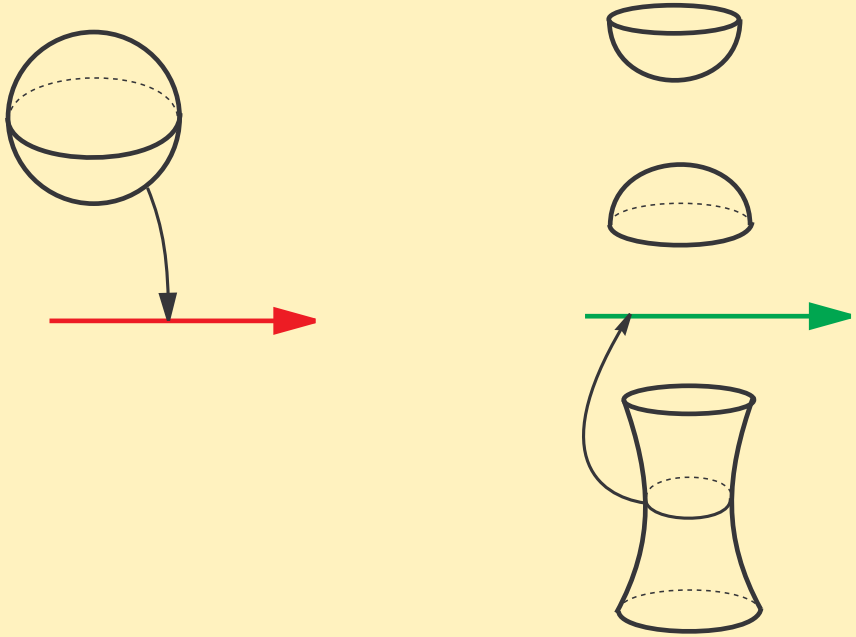
Sketch of Proof

g は excellent map として良い.

$S(g)$ $(\subset M^4)$: g の特異点全体

$S_{\mathrm{D}}(g)$ $(\subset S(g))$: **definite fold** 全体

注意. $S(g)$ には向きが付く.



Sketch of Proof (continued)

Step 1. $S_{\mathrm{D}}(g)$ を 1 成分の自明な結び目にする.

Sketch of Proof (continued)

Step 1. $S_{\mathrm{D}}(g)$ を 1 成分の自明な結び目にする.

次の定理を用いる.

Sketch of Proof (continued)

Step 1. $S_{\mathrm{D}}(g)$ を 1 成分の自明な結び目にする.

次の定理を用いる.

Theorem 3.2 (S., 1995) $g : M^4 \to \Sigma^2$ C^∞ 級写像
$L \subset M^4$：空でない，向き付けられた 1 次元閉部分多様体
$\exists$*excellent map* $f : M^4 \to \Sigma^2$ *homotopic to* g
s.t. $S(f) = L$（向きも込めて）
$\Longleftrightarrow [L] = 0$ *in* $H_1(M^4; \mathbf{Z})$

Moves for Excellent Maps

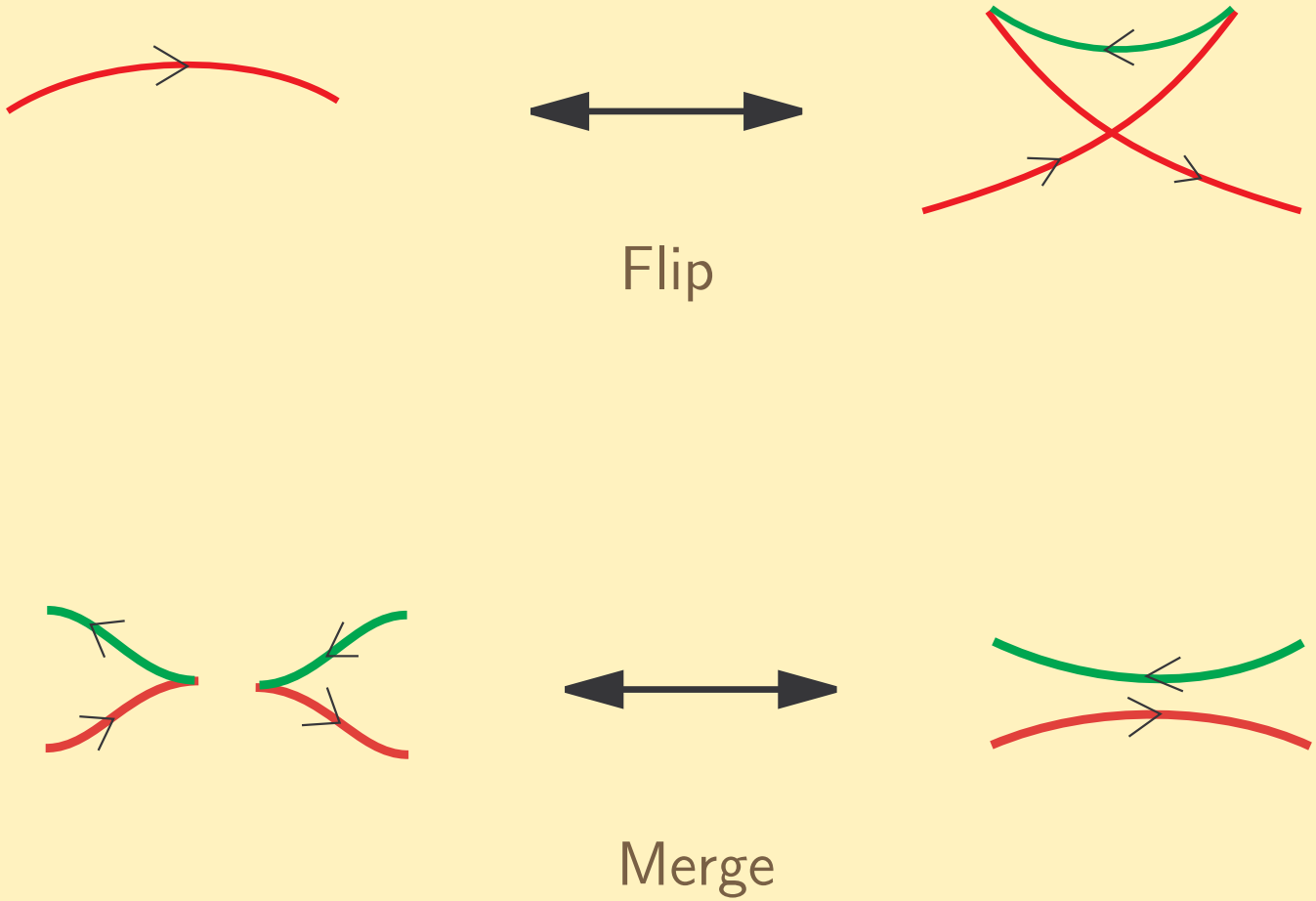


Figure 5: **definite fold** の改変操作

Proof (continued)

Step 2. $g|_{S_{\mathrm{D}}(g)}$ を S^2 への埋め込みにする.

Proof (continued)

Step 2. $g|_{S_{\mathrm{D}}(g)}$ を S^2 への埋め込みにする.

S^2 上での Reidemeister 移動に似た変形を「リフト」すれば良い.
（S^2 だから可能.）

Proof (continued)

Step 2. $g|_{S_{\mathrm{D}}(g)}$ を S^2 への埋め込みにする.

S^2 上での Reidemeister 移動に似た変形を「リフト」すれば良い.
（S^2 だから可能.）

Step 3 のために，次の操作が必要.

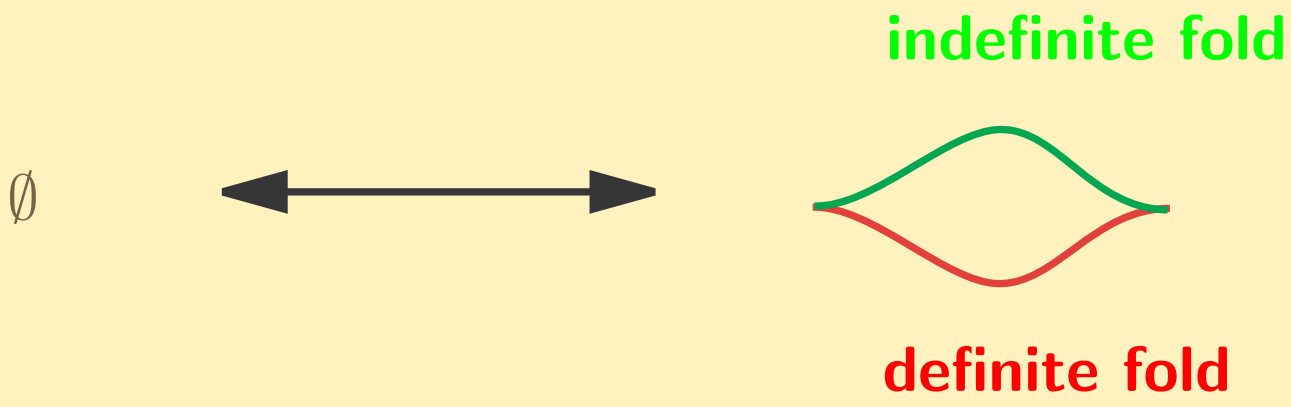


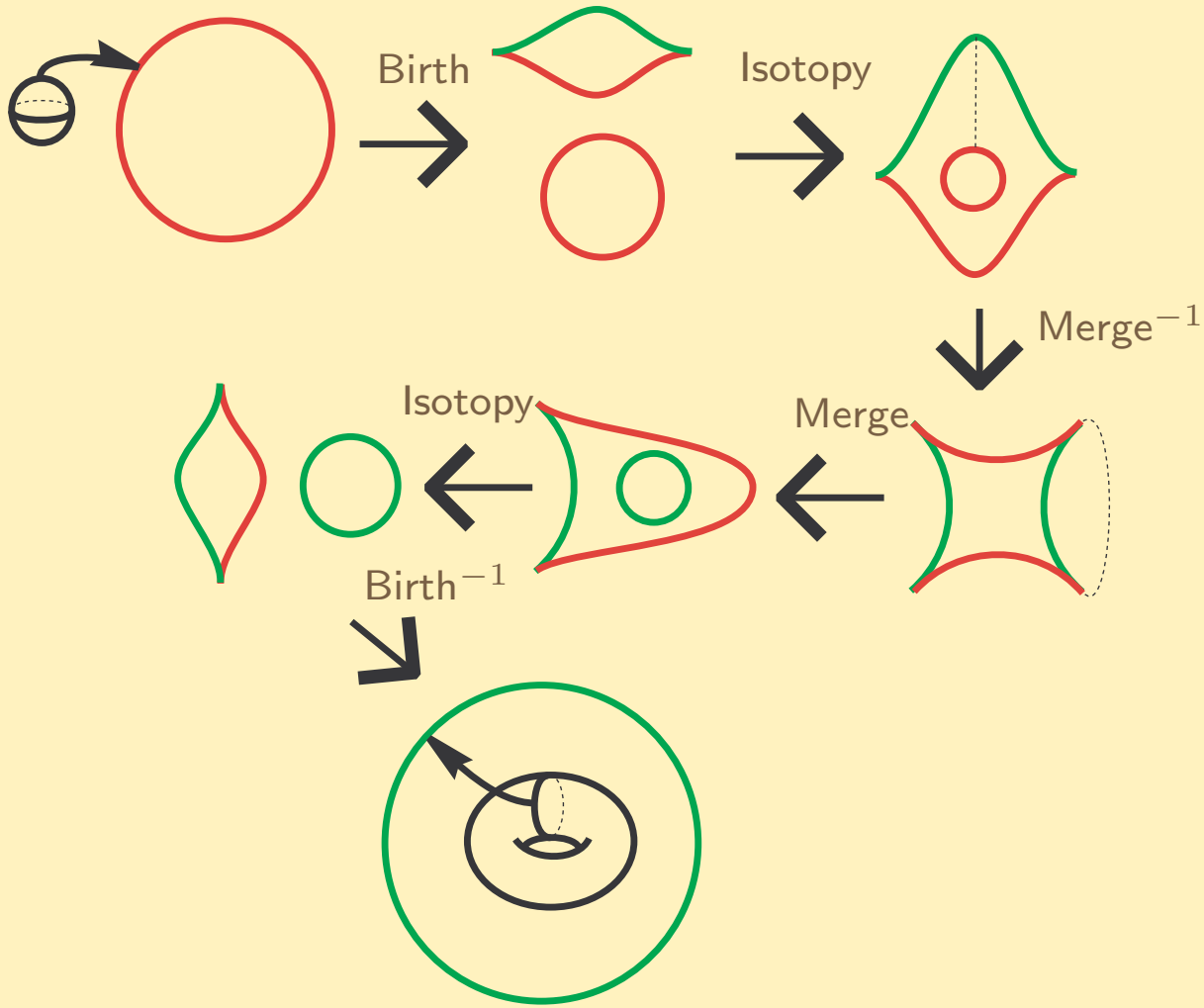
Figure 6: Birth

Definite to Indefinite

Step 3. Definite fold circle $\rightsquigarrow$ Indefinite one (Williams, 2010)

Definite to Indefinite

Step 3. Definite fold circle $\rightsquigarrow$ Indefinite one (Williams, 2010)



Q.E.D.

Existence of BLF

Corollary 3.3 (Baykur, 2008)
任意の向き付けられた 4 次元閉多様体は，S^2 上の *BLF* を許容する．

Existence of BLF

Corollary 3.3 (Baykur, 2008)
任意の向き付けられた 4 次元閉多様体は，S^2 上の *BLF* を許容する．

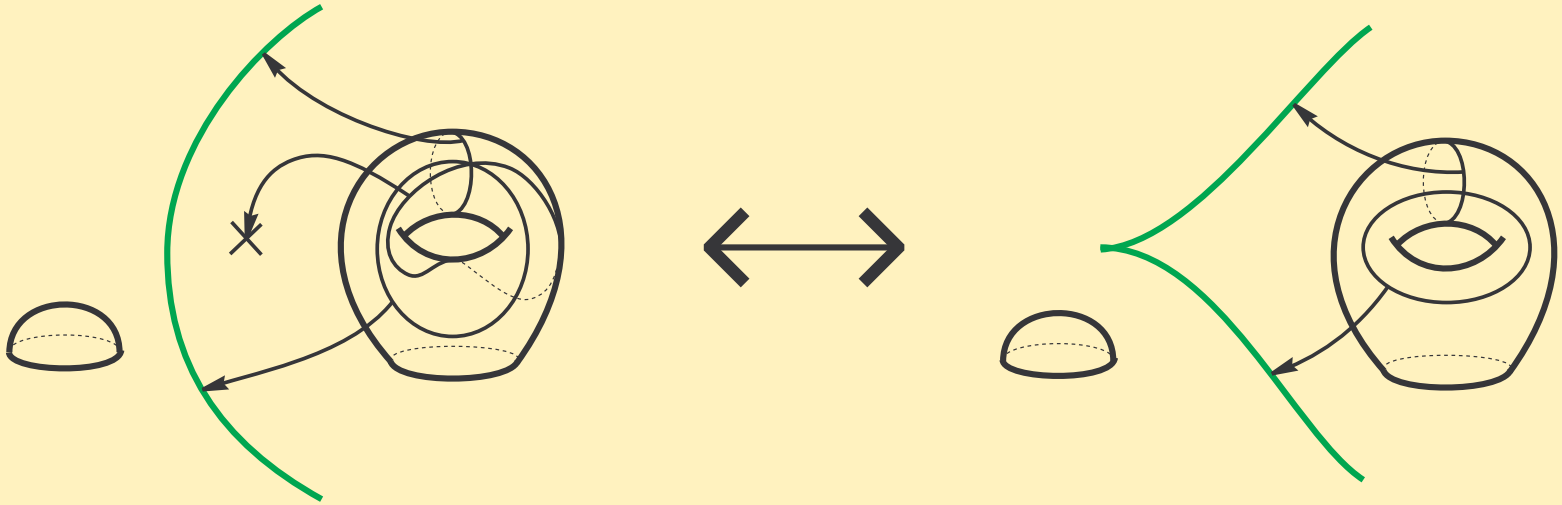


Figure 7: Sinking and Unsinking (Lekili, 2009)

Existence of BLF

Corollary 3.3 (Baykur, 2008)
任意の向き付けられた 4 次元閉多様体は，S^2 上の *BLF* を許容する．

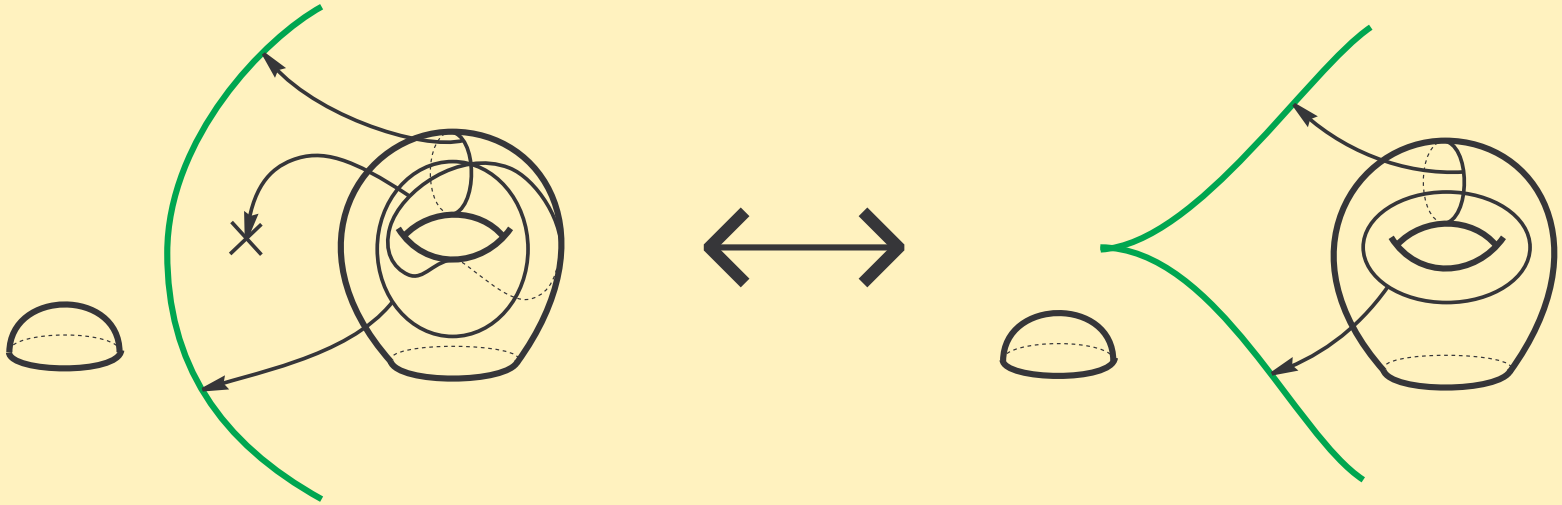


Figure 7: Sinking and Unsinking (Lekili, 2009)

Remark 3.4 BLF の存在定理については，いくつかの証明が知られている (Gay–Kirby, Baykur, Lekili, Akbulut–Karakurt).

Prescribed Indefinite Locus

次も証明できる (cf. Lekili, 2009).

Prescribed Indefinite Locus

次も証明できる (cf. Lekili, 2009).

Theorem 3.5 $g : M^4 \to S^2$ C^∞ 級写像
$L \subset M^4$：空でない，向き付けられた 1 次元閉部分多様体
$\exists f : M^4 \to S^2$ *BLF homotopic to* g
s.t. $S_{\mathrm{I}}(f) = L$（向きも込めて）
$\Longleftrightarrow [L] = 0$ *in* $H_1(M^4; \mathbf{Z})$

Prescribed Indefinite Locus

次も証明できる (cf. Lekili, 2009).

Theorem 3.5 $g : M^4 \to S^2$ C^∞ 級写像
$L \subset M^4$：空でない，向き付けられた 1 次元閉部分多様体
$\exists f : M^4 \to S^2$ *BLF homotopic to* g
s.t. $S_{\mathrm{I}}(f) = L$（向きも込めて）
$\Longleftrightarrow [L] = 0$ *in* $H_1(M^4; \mathbf{Z})$

Near-symplectic 構造について似たような議論を用いることで (Perutz, 2006; Lekili, 2009)，次も示せる.

Prescribed Indefinite Locus

次も証明できる (cf. Lekili, 2009).

Theorem 3.5 $g : M^4 \to S^2$ C^∞ 級写像
$L \subset M^4$：空でない，向き付けられた 1 次元閉部分多様体
$\exists f : M^4 \to S^2$ *BLF homotopic to* g
s.t. $S_{\mathrm{I}}(f) = L$（向きも込めて）
$\Longleftrightarrow [L] = 0$ *in* $H_1(M^4; \mathbf{Z})$

Near-symplectic 構造について似たような議論を用いることで (Perutz, 2006; Lekili, 2009)，次も示せる．

Theorem 3.6 M^4：向き付けられた 4 次元閉多様体，$b_2^+(M^4) > 0$
$L \subset M^4$：空でない，向き付けられた 1 次元閉部分多様体
$\exists$**near-symplectic 構造** ω *s.t. zero locus* $= L$
$\Longleftrightarrow [L] = 0$ *in* $H_1(M^4; \mathbf{Z})$

Recent Result by Gay–Kirby

Theorem 3.7 (Gay–Kirby, 2011) $g : M^4 \to \Sigma^2$ C^∞ 級写像
$\exists f : M^4 \to \Sigma^2$ *BLF homotopic to* g
$\Longleftrightarrow [\pi_1(\Sigma^2) : g_*\pi_1(M^4)] < +\infty$
さらに，$g_* : \pi_1(M^4) \to \pi_1(\Sigma^2)$ が全射ならば，
各ファイバーが連結となるようにできる．

Recent Result by Gay–Kirby

Theorem 3.7 (Gay–Kirby, 2011) $g : M^4 \to \Sigma^2$ C^∞ 級写像
$\exists f : M^4 \to \Sigma^2$ *BLF homotopic to* g
$\iff [\pi_1(\Sigma^2) : g_*\pi_1(M^4)] < +\infty$
さらに，$g_* : \pi_1(M^4) \to \pi_1(\Sigma^2)$ が全射ならば，
各ファイバーが連結となるようにできる．

Remark 3.8 **ファイバーの連結性**は重要！

Recent Result by Gay–Kirby

Theorem 3.7 (Gay–Kirby, 2011) $g : M^4 \to \Sigma^2$ C^∞ 級写像
$\exists f : M^4 \to \Sigma^2$ *BLF homotopic to* g
$\iff [\pi_1(\Sigma^2) : g_*\pi_1(M^4)] < +\infty$
さらに，$g_* : \pi_1(M^4) \to \pi_1(\Sigma^2)$ が全射ならば，
各ファイバーが連結となるようにできる．

Remark 3.8 **ファイバーの連結性**は重要！
Near-symplectic 構造の存在と一意性に関する ADK の定理において，cohomology の条件があったことに注意．

§4. Moves for BLFs

Lekili's Moves

Lekili 移動と呼ばれる，BLF の変形操作あり．

Lekili's Moves

Lekili 移動と呼ばれる，BLF の変形操作あり．

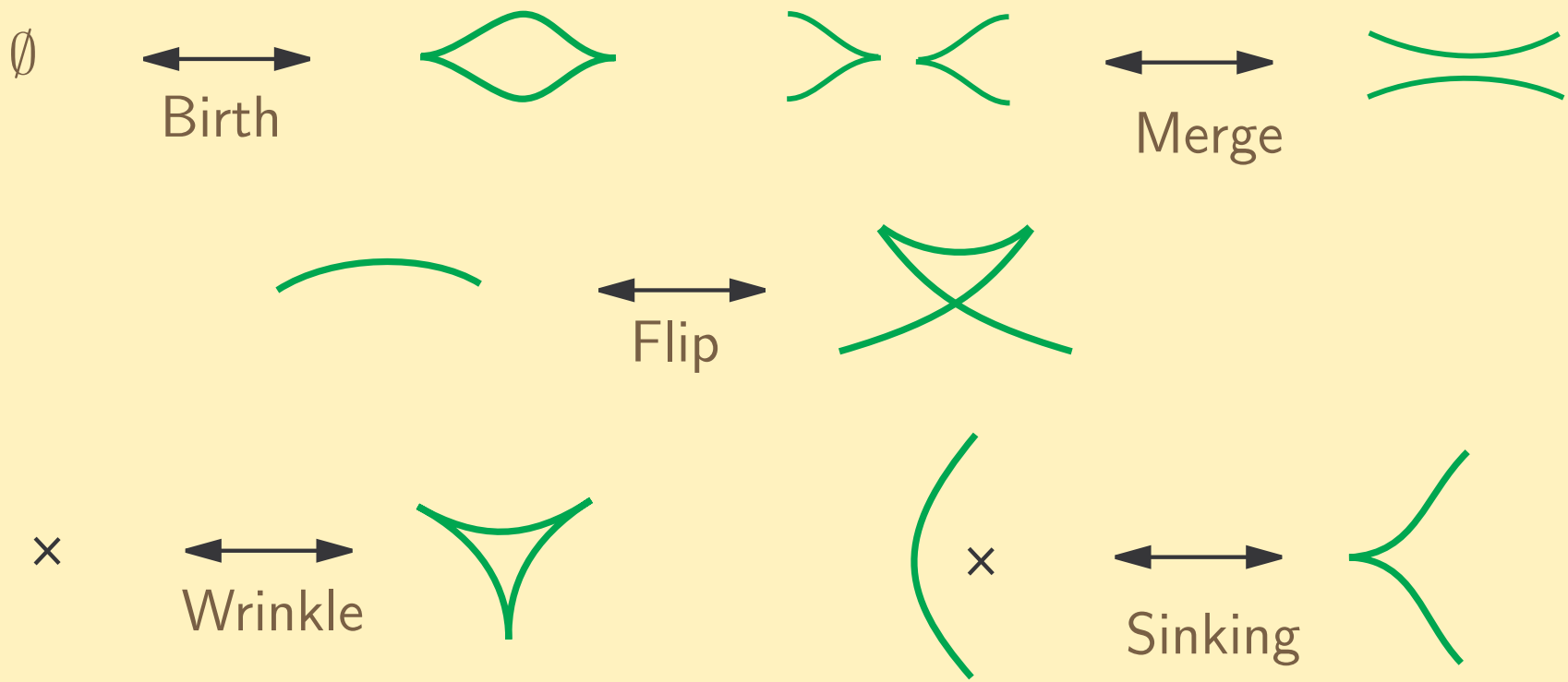


Figure 8: Lekili 移動

Uniqueness

Theorem 4.1 (Williams, 2010; Gay–Kirby, 2011)
2 つの *BLF* $M^4 \to \Sigma^2$ がホモトピックであれば，有限回の **Lekili 移動** (*Birth*, *Merge*, *Flip*, *Wrinkle*, *Sink* とその逆操作) と「イソトピー」で互いに移り合う.

Uniqueness

Theorem 4.1 (Williams, 2010; Gay–Kirby, 2011)
2 つの *BLF* $M^4 \to \Sigma^2$ がホモトピックであれば，有限回の **Lekili 移動** (*Birth, Merge, Flip, Wrinkle, Sink* とその逆操作) と「イソトピー」で互いに移り合う.

対応する near-symplectic 構造の変化が記述できれば，4 次元多様体に対してゲージ理論的不変量が定義できるであろう.
$\Longrightarrow$ **Lagrangian matching invariant** (Perutz, 2007)

Uniqueness

Theorem 4.1 (Williams, 2010; Gay–Kirby, 2011)
2 つの *BLF* $M^4 \to \Sigma^2$ がホモトピックであれば，有限回の **Lekili 移動** (*Birth, Merge, Flip, Wrinkle, Sink* とその逆操作) と「イソトピー」で互いに移り合う.

対応する near-symplectic 構造の変化が記述できれば，4 次元多様体に対してゲージ理論的不変量が定義できるであろう.
$\Longrightarrow$ **Lagrangian matching invariant** (Perutz, 2007)

予想：**Lagrangian matching invariant は Seiberg–Witten invariant に等しい**であろう.

Another Problem

Problem 4.2 (Baykur)
Null-homologous なファイバー成分を持たないクラスの *BLF* に対する変形操作を探せ.

Another Problem

Problem 4.2 (Baykur)

Null-homologous なファイバー成分を持たないクラスの *BLF* に対する変形操作を探せ.

ファイバーが連結なクラスではどうか？

Another Problem

Problem 4.2 (Baykur)
Null-homologous なファイバー成分を持たないクラスの *BLF* に対する変形操作を探せ.
ファイバーが連結なクラスではどうか？

Note.
これらがうまくいけば，**near-symplectic BLF** のクラスにとどまったまま変形操作ができることになる.

An Answer

Theorem 4.3 (Gay–Kirby, 2011)
$f_0, f_1 : M^4 \to \Sigma^2$ **excellent maps** *without definite folds s.t. all the fibers are connected.*
$\Longrightarrow \exists$**generic homotopy** f_t *between* f_0 *and* f_1 *without definite folds s.t.* $\forall$*fibers of* f_t *are connected.*

An Answer

Theorem 4.3 (Gay–Kirby, 2011)
$f_0, f_1 : M^4 \to \Sigma^2$ **excellent maps** *without definite folds s.t. all the fibers are connected.*
$\Longrightarrow \exists$**generic homotopy** f_t *between* f_0 *and* f_1 *without definite folds s.t.* $\forall$*fibers of* f_t *are connected.*

アイデア：Cerf 理論の応用.

An Answer

Theorem 4.3 (Gay–Kirby, 2011)
$f_0, f_1 : M^4 \to \Sigma^2$ **excellent maps** *without definite folds*
s.t. all the fibers are connected.
$\Longrightarrow \exists$**generic homotopy** f_t *between* f_0 *and* f_1 *without definite folds*
s.t. $\forall$*fibers of* f_t *are connected.*

アイデア：Cerf 理論の応用.
cf. **Kirby moves** for 3-manifolds.

§5. Simplified BLFs

Simplified BLF

$f : M^4 \to S^2$ を BLF とする.

Simplified BLF

$f : M^4 \to S^2$ を BLF とする． 以下を仮定しよう：

(1) $S_{\mathrm{I}}(f) \cong S^1$,
(2) $f|_{S_{\mathrm{I}}(f)}$ は S^2 上の赤道への埋め込み,
(3) すべてのファイバーは連結.

Simplified BLF

$f : M^4 \to S^2$ を BLF とする． 以下を仮定しよう：

(1) $S_{\mathrm{I}}(f) \cong S^1$,
(2) $f|_{S_{\mathrm{I}}(f)}$ は S^2 上の赤道への埋め込み,
(3) すべてのファイバーは連結.

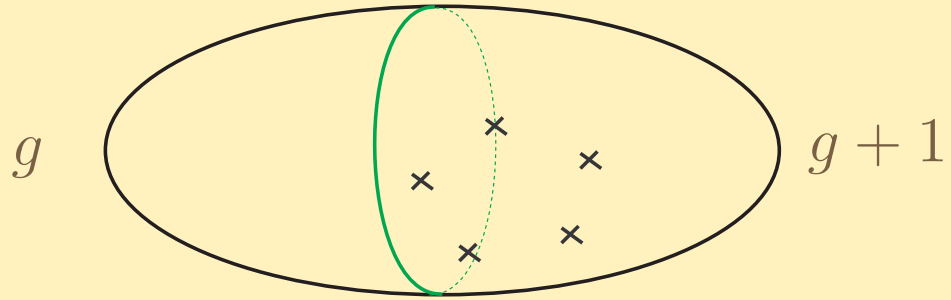
このとき，f は **simplified broken Lefschetz fibration** (略して **SBLF**) と呼ばれる.

Simplified BLF

$f : M^4 \to S^2$ を BLF とする． 以下を仮定しよう：

(1) $S_{\mathrm{I}}(f) \cong S^1$,
(2) $f|_{S_{\mathrm{I}}(f)}$ は S^2 上の赤道への埋め込み,
(3) すべてのファイバーは連結.

このとき，f は **simplified broken Lefschetz fibration** (略して **SBLF**) と呼ばれる.

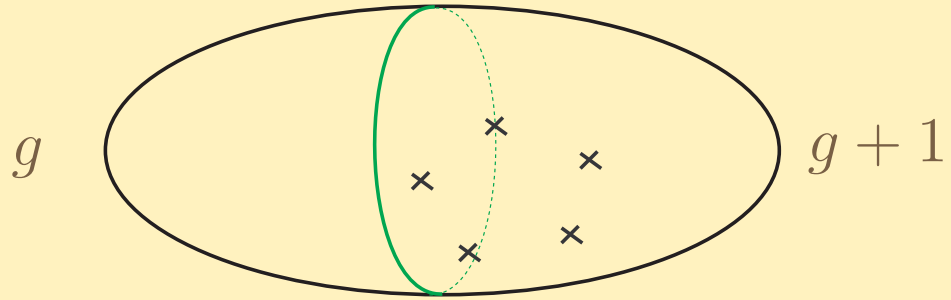


Simplified BLF

$f : M^4 \to S^2$ を BLF とする． 以下を仮定しよう：

(1) $S_{\mathrm{I}}(f) \cong S^1$,
(2) $f|_{S_{\mathrm{I}}(f)}$ は S^2 上の赤道への埋め込み,
(3) すべてのファイバーは連結.

このとき，f は **simplified broken Lefschetz fibration** (略して **SBLF**) と呼ばれる.



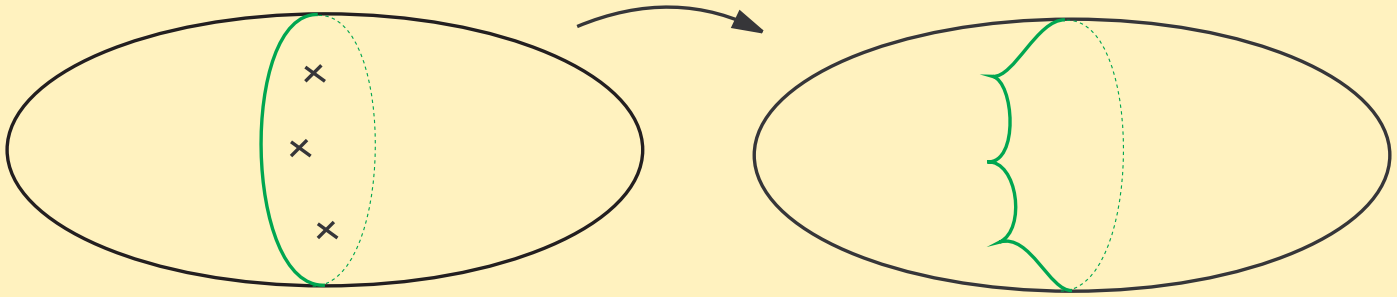
すべての向き付けられた 4 次元閉多様体は SBLF を許容することが知られている (Gay–Kirby, etc.).

Surface Diagram

Williams (2010): Lekili 移動により，Lefschetz singularities を cusp にできる.

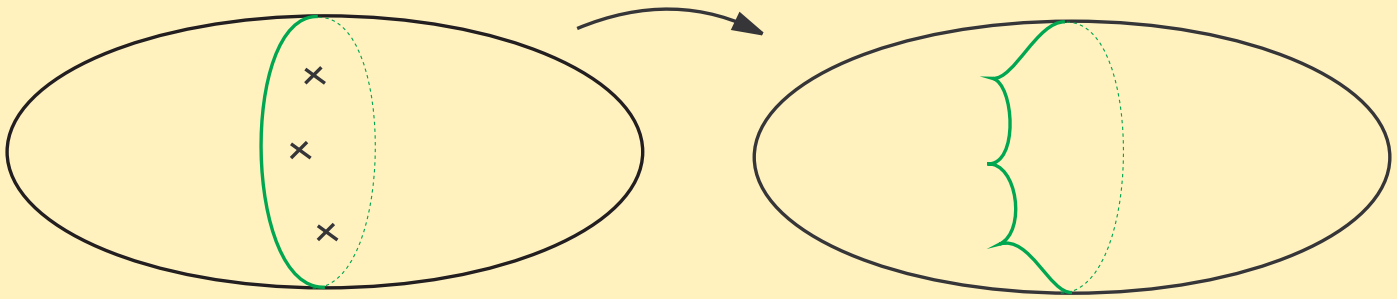
Surface Diagram

Williams (2010): Lekili 移動により，Lefschetz singularities を cusp にできる.



Surface Diagram

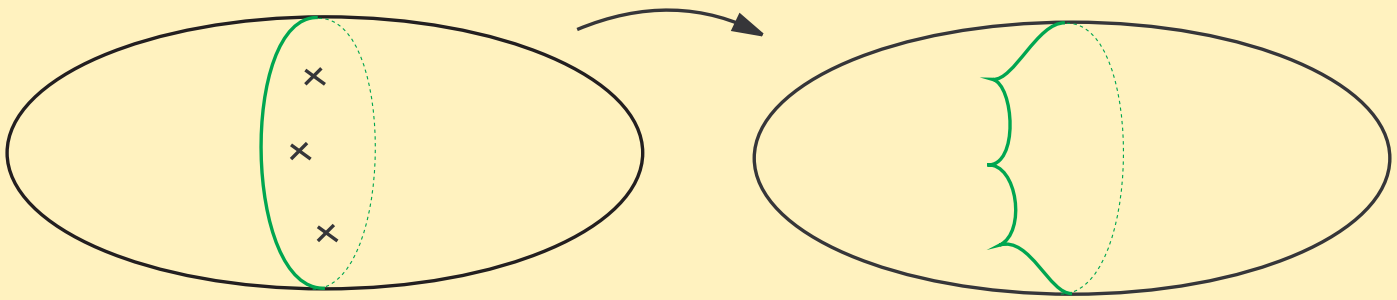
Williams (2010): Lekili 移動により，Lefschetz singularities を cusp にできる．



すると，4 次元閉多様体を，ファイバー曲面内の単純閉曲線の有限列で表示することができる．$\rightsquigarrow$ 4 次元多様体の **surface diagram**

Surface Diagram

Williams (2010): Lekili 移動により，Lefschetz singularities を cusp にできる．



すると，4 次元閉多様体を，ファイバー曲面内の単純閉曲線の有限列で表示することができる．$\rightsquigarrow$ 4 次元多様体の **surface diagram**

Theorem 5.1 (Williams, 2011)
向き付けられた 4 次元閉多様体の *surface diagram* は，*stabilization*, *handleslide*, *multislide*, *shift* と呼ばれる操作を除いて一意的．

Summary

(1) すべての向き付けられた 4 次元閉多様体は，**BLF** をたくさん許容し，$b_2^+(M^4) > 0$ ならば，対応する **near-symplectic 構造**も豊富に許容する．

(2) 互いにホモトピックな 2 つの BLF は **Lekili 移動**で互いに移り合う．それらはさらに各ファイバーが連結であるクラスの中でも互いに移り合う．これにより，near-symplectic 構造に対する **Lagrangian matching invariant** が **Seiberg-Witten invariant** に一致するであろうという予想が証明できるかも知れない．

(3) BLF の **indefinite locus** は，homology の条件さえ満たせば何でも実現できる．Near-symplectic 構造の **zero locus** も同様．

(4) SBLF に付随して現れる **surface diagram** は，4 次元多様体を表示する手法として有用かも知れない．

Thank you for your attention !